俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅲ(1))

# 斯米尔诺夫高等数学

## (第三卷·第一分册)

[俄罗斯]斯米尔诺夫 著　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅲ (1))

（第三卷·第一分册）


[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译



HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08-2016-040 号

## 内容简介

本书系根据苏联国立科学技术理论书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔诺（В. И. Смирнов）著《高等数学教程》（Курс высшей математики）第三卷第一分册 1951 年第四版译出. 原书经苏联高等教育部审定为综合大学数理系教学参考书.

本书适合高等院校相关专业师生参考使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

斯米尔诺夫高等数学. 第三卷. 第一分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著;斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5603-6608-1

Ⅰ.①斯… Ⅱ.①斯… ②斯… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088952 号

书名:Курс высшей математики

作者:В. И. Смирнов

В. И. Смирнов《Курс высшей математики》



策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 19.25　字数 348 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6608-1
定　　价　58.00 元

# ◎ 第四版序言

在这一版中，由于补充了新的材料，第三卷分成两部分，第一部分包括全部关于线性代数、二次型理论和群论的材料. 在这一部分中主要的补充是关于群论的. 在编写这些补充材料的过程中，Д. К. 法捷耶夫给了我很大的帮助. 特别是关于转动群与劳伦次群单纯性的阐明，按结构常数来建立群与群上的积分[70,81,87,88,89,90]这些部分的材料的说明是属于他的. 对于他在这本书的准备工作中所给予的帮助我表示极大的谢意.

В. И. 斯米尔诺夫

# ◎目录

# 行列式与方程组的解法

第一章

## §1 行列式及其性质

### 1. 行列式的概念

我们从解一个简单的代数问题，即从解一次方程组的问题来开始这一节. 由于对这种问题的研究，我们获得了行列式的重要概念.

让我们从研究一些最简单的特殊情形来开始. 先取具有两个未知数的两个方程所成的方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

未知数的系数 $a_{ik}$ 带有两个指标，第一个指标说明这个系数出现在哪一个方程中，而第二个说明它是哪一个未知数的系数.

大家知道，这方程组的解具有下面的形式：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

再看由具有三个未知数的三个方程所成的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

这里我们仍用上面的关于系数的标记法，将前两个方程改写成下列形式：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1-a_{13}x_3$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3$$

按上面的公式，由这两个方程解未知数 $x_1$ 与 $x_2$，即得

$$x_1=\frac{a_{22}(b_1-a_{13}x_3)-a_{12}(b_2-a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}(b_2-a_{23}x_3)-a_{21}(b_1-a_{13}x_3)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

把这两个表达式代入方程组的最后一个方程中，即得一个仅含未知数 $x_3$ 的方程. 最后解这个方程，即得 $x_3$ 的最终表达式

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\qquad(1)$$

我们来详细地研究一下这表达式的结构. 首先看到，将分母中的属于所要确定的未知数 $x_3$ 的所有系数 $a_{i3}$ 各用常数项 $b_i$ 替换即得分子. 这样，还待阐明的只是组成分母的规律了. 分母不含有常数项而是纯粹由方程组的系数组成的. 先让我们把这些系数按它们在原来方程组中的位置写成一个正方形的表：

$$\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{Vmatrix}\qquad(2)$$

这个表含有三行与三列. $a_{ik}$ 这些数叫作它的元素. $a_{ik}$ 的第一个指标表示它所在的行的序数，而第二个则表示它所在的列的序数. 现在写出式(1) 的分母

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\qquad(3)$$

我们看到，它由六项组成，其中每一项是(2) 中的三个元素的乘积，而且每个乘积含有每一行和每一列的元素. 实际上，这些乘积具有下面的形式：

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}\qquad(4)$$

其中 $p,q,r$ 是整数 1,2,3 的某一个一定的排列. 如此，正如几个第一个指标一样，几个第二个指标也正是整数 1,2,3 的全体，因而乘积(4) 确实含有每行和每列的一个元素. 为要得到式(3) 中的所有的项，只需要在乘积(4) 中就第二个指标 $p,q,r$ 取所有可能的不同的排列. 第二个指标的所有可能的排列显然有以下六种：

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2;\quad 1,3,2;\quad 2,1,3;\quad 3,2,1\qquad(5)$$

于是，我们即得式(3) 的六项. 但是我们看到，乘积(4) 在式(3) 中出现时，有一些带有正号，而另一些则带有负号. 于是只剩下要说明选择符号所依据的法则

了. 如我们所见,带有正号出现的那些乘积(4)的第二个指标形成下列的排列:

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2 \tag{$5_1$}$$

而带有负号出现的那些乘积的第二个指标形成下列排列:

$$1,3,2;\quad 2,1,3;\quad 3,2,1 \tag{$5_2$}$$

现在来说明排列($5_1$)与排列($5_2$)的区别. 在一个排列中,比较每一对数,如果大的在小的前面,则叫作一个逆序. 我们来计算($5_1$)中诸排列的逆序个数. 其中第一个排列没有逆序,就是说逆序的个数为零. 再看第二个排列,逐次比较每一数与其后各数的大小,我们看出,这里有两个逆序. 即一个是2在1前面,一个是3在1前面. 同样,不难看到,($5_1$)中的第三个排列含有两个逆序. 总之,可以说在($5_1$)中的所有排列都含有偶数个逆序. 用完全同样的方法来研究($5_2$)中的排列,我们看到,它们都含有奇数个逆序. 现在,我们可以把表达式(3)中的符号法则叙述如下:乘积(4)中,凡是第二指标形成的排列中逆序数是偶数的,出现在表达式(3)中时,没有任何改变. 凡是第二指标形成的排列中逆序数为奇数的,出现在表达式(3)中时,冠以负号. 表达式(3)叫作对应于数表(2)的三阶行列式. 现在不难把它推广到任何阶行列式的情形.

假定有 $n^2$ 个数被安排在一个 $n$ 行 $n$ 列的正方形的表内:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\| \tag{6}$$

这个表内的元素 $a_{ik}$ 是给定的复数,而 $i$ 与 $k$ 分别表示元素 $a_{ik}$ 所在的行与列的序数. 从数表(6)组成所有可能的这样的乘积,使得这些乘积恰好含有每行和每列的一个元素,这些乘积具有下面的形式:

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{7}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列. 为了要得到所有可能的形式(7)的乘积,我们需要取第二个指标的所有可能的排列. 从初等代数得知,这样的排列的总数等于整数 $n$ 的阶乘:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n=n!$$

每个这样的排列,与基本排列

$$1,2,3,\cdots,n$$

来比较,就有一些逆序.

所有那些乘积(7),如果由它们的第二指标所成的排列含有偶数个逆序,则不加任何改变,而所有那些乘积(7),如果由它们的第二指标所成的排列含有奇数个逆序,则加上一个负号. 这样得到的所有乘积的和就叫作对应于表(6)的 $n$ 阶行列式. 这个和显然含有 $n!$ 项. 我们不难将这个定义用公式表出来. 为此

须引进一些符号. 令 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列. 用符号

$$[p_1, p_2, \cdots, p_n]$$

来记这个排列所含的逆序的个数.

于是,以上所给的对应于表(6) 的行列式的定义可写成下面的公式,我们把表(6) 用两根竖线夹起来作为行列式的记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{8}$$

等式右端要对第二个指标的所有可能的排列取和,也就是对所有可能的排列$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 取和. 如果我们只谈表的本身,而不是讲由它构成的行列式,就把这表写在两双竖线之间.

须注意到,在式(3) 中的每个乘积中我们是把它的因子按这样的次序安排的,使得第一个指标恒组成基本排列 1,2,3,因此所有我们的考虑都只涉及由第二个指标所形成的排列. 与此相反,我们也可以把每个乘积中的因子重新安排,使得第二个指标都按上升的次序;此时,式(3) 可换写成下面的形式:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \tag{9}$$

这里第一个指标取所有可能的排列 $p, q, r$,而且容易验证,式(9) 各项的符号法则可用与前面完全同样的说法表述出来,只不过就第一个指标来说罢了. 这就引导我们与和(8) 同时来考虑下面这个类似的和

$$\sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \tag{10}$$

显然,这个和是由与(8) 同样的那些项所组成的. 以后我们会看到,它的项的符号法则也是与在和(8) 中相同的. 那就是说,与 $n=3$ 的情形一样,和(10) 与和(8) 是全相同的.

最后,再回到 $n=2$ 的情形,此时表取形式

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

并且公式(8) 给予一个与此表对应的二阶行列式的表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{11}$$

由上面直接可知,为要阐明行列式的性质,必须对排列的性质有较深的认识. 我们立即转向这个问题.

## 2. 排列

假设有任意的 $n$ 个元素,把它们按一定的次序排列起来,我们把这叫作由

这 $n$ 个元素形成的一个排列. 首先我们来证明,这样的不同的排列恰有 $n!$ 个. 当 $n=2$ 时,这是显然的,因为两个元素可以形成两个不同的排列. 当 $n=3$ 时,这只要数一下排列(5) 的个数即可直接推知,那里的数 1,2,3 就是元素. 不难知道,(5) 已给出了由三个元素而成的所有可能的排列. 现在用归纳法来证明我们的论断对于任何的正整数 $n$ 总是对的. 假定我们的论断对某一个 $n$ 成立,由此来证明它对于 $n+1$ 个元素也成立. 就是说,假定 $n$ 个元素产生 $n!$ 个排列,让我们来考虑任何的 $n+1$ 个元素产生的排列,把这 $n+1$ 个元素记作:

$$C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$$

首先注意第一个元素为 $C_1$ 的那些排列. 为了要得到所有可能的这样的排列,应当把 $C_1$ 放在第一个位置,然后写下其余 $n$ 个元素的所有可能的排列. 按照假定,这样的排列的个数是 $n!$. 因此,由 $C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$ 形成的以元素 $C_1$ 为首的排列总数是 $n!$. 完全一样,由 $C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$ 形成的以元素 $C_2$ 为首的排列总数也是 $n!$. 总的说来,$C_1,C_2,\cdots,C_{n+1}$ 的不同排列总数等于

$$n!\,(n+1)=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)=(n+1)!$$

这样,就证明了以上的论断.

当然,我们可以把从 1 开始的一些整数取作元素,以后我们就这样来做. 在一个排列中对调两个元素的位置,这样一个动作就叫作一个对换. 显然可直接看出,由某一个排列经过一些对换可以得到任何一个其他的排列. 例如,取四个元素的两个排列

$$1,3,4,2;\quad 2,4,1,3$$

由这里第一个排列经下列一串对换就得到第二个排列:

$$1,3,4,2\rightarrow 2,3,4,1\rightarrow 2,4,3,1\rightarrow 2,4,1,3$$

为了把第一个排列变成第二个排列,这里我们用了三个对换. 如果我们换个方式来施行对换,也可能由其他的方法利用对换把第一个排列变成第二个排列,换句话说,就是把一个排列变成第二个排列所需要的对换的个数并不是一个确定的数. 显然可以用不同数目的对换把一个排列变成另一个排列. 但是对我们重要的是可以证明,对于两个给定的排列. 这些不同的数目或者全是偶数或者全是奇数. 这也就是说这些数目总是有同一的奇偶性,为了说明这一点,我们引进在前一个小节用过的逆序的概念. 试看由 $n$ 个元素 $1,2,\cdots,n$ 形成的排列. 按照递升的次序排列起来的排列

$$1,2,\cdots,n \tag{12}$$

叫作基本排列. 如果一个排列中的两个元素的相互次序是与它们在基本排列(12) 中的相互次序相反就是说大的在小的左边,这就叫作该排列中的一个逆序. 凡逆序的数目为偶数的排列叫作第一类排列,而逆序数目为奇数的排列叫作第二类排列. 下面这个定理对以下的论述来讲是基本的.

由一个对换而引起的逆序数目的改变是一个奇数.

取定某一个排列

$$a,b,\cdots,k,\cdots,p,\cdots,s \tag{13}$$

并且假设,我们把 $k$ 与 $p$ 的对换施于这个排列,就是说对调这两个元素相互的位置.经过这样的对换之后,元素 $k$ 与 $p$ 对于在 $k$ 之左或在 $p$ 之右的元素的相互位置保持不变.只有这排列中介于 $k$ 与 $p$ 之间的那些元素与 $k,p$ 的相互位置有所改变,当然 $k$ 与 $p$ 的彼此相互位置也有所改变.我们来计算逆序改变的总数.假设在排列(13)中 $k$ 与 $p$ 之间总共有 $m$ 个元素,并且设这些中间元素与 $k$ 比较得到 $\alpha$ 个顺序与 $\beta$ 个逆序,又设它们与 $p$ 比较得到 $\alpha_1$ 个顺序与 $\beta_1$ 个逆序,显然有

$$\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=m \tag{14}$$

施行对换的结果,顺序变成逆序而且逆序变成顺序.更确切地说,如果元素 $k$ 与某一个中间元素在对换前它是顺序,则在对换后就变成逆序,而且反过来也对,对于元素 $p$ 也是一样.因此,$k$ 与 $p$ 对于中间元素的逆序数目在施用对换之前总是 $\beta+\beta_1$,而在对换之后,总共是 $\alpha+\alpha_1$,就是说逆序数的改变是

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(\beta+\beta_1)$$

利用(14),这个数目可改写成

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(m-\alpha+m-\alpha_1)=2(\alpha+\alpha_1-m)$$

由此直接推出,这个数 $\gamma$ 是一个偶数.现在来看元素 $k$ 与 $p$ 的相互位置.如果在对换之前它们作成一个顺序,则在对换之后它们作成一个逆序,而且反过来也对,这就是说,这里的逆序数的改变等于1.因此,由于对换而引起的逆序改变的总数是一个奇数.

现在来叙述从这个定理所得到的一些推论.

**系Ⅰ** 如果写出全部 $n!$ 个排列,并且对于每一个排列施以两个固定元素的对换,例如1与3的对换.则全部第一类排列都变成第二类排列,反过来也是如此,总的说来,我们仍然得到 $n!$ 个排列的全体.由此直接推出,第一类与第二类排列的数目相等.

**系Ⅱ** 任何一个排列都可以由基本排列经过一些对换得到.从上面定理直接推出,凡由基本排列可用偶数个对换得到的那些排列作成第一类,而凡由基本排列可用奇数个对换得到的那些排列则作成第二类.

**系Ⅲ** 基本排列的选择完全可以任意.不用排列(12)而用其他任何一个排列作为基本排列都是可以的,在这种情况下,规定逆序时,自然就应当以该排列与这个基本排列比较,就是说,应当以元素在基本排列中的次序为根据.不难看出,如果我们取第一类中任何一个排列以代替排列(12)作为基本排列,则原来属于第一类的排列现在依然属于第一类,而原来属于第二类的现在依然属于

第二类.反之,如果我们取第二类中任何一个排列作为基本排列,则原来第二类的排列成为现在的第一类的排列,而第一类的排列成为第二类的排列.

例如,在元素 1,2,3 的六个排列中,我们可以取排列 2,1,3 作为基本排列,则下列排列是第一类排列:

$$2,1,3;\quad 1,3,2;\quad 3,2,1$$

其中的第二个排列有两个逆序;1 在 2 前与 3 在 2 前,而在基本排列中 2 在 1 前且 2 在 3 前.下列的排列是第二类排列:

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2$$

其中的第一个排列与基本排列 2,1,3 比较有一个逆序,即 1 在 2 前.

根据以上所讲的,我们可以把表达式(8) 中的符号法则叙述如下:如果一个乘积的因子的第二个指标所作成的排列属于第一类,则在这乘积之前冠以正号,如果属于第二类,则在它的前面冠以负号,这里是把排列 $1,2,\cdots,n$ 作为基本排列的.

现在我们来阐明行列式的一个基本性质.在给出行列式的那个表中将第一二两列对调.原来用 $a_{ik}$ 所说的数,调换后仍然用带有同一指标的同一文字来表示.于是,从表(6) 我们得到下面的表:

$$\begin{Vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{15}$$

根据由公式(8) 所规定的行列式的定义,我们可以求得对应于表(15) 的行列式.在这个表中的列的号码排列如下:$2,1,3,\cdots,n$,于是我们应当把这个排列看作基本排列.它是由原来的基本排列用一个对换而得到的.因此,它原来是属于第二类的.所以原来的第二类排列对于这个新的基本排列而言成了第一类的排列,而且反过来也是如此.因此,对应于表(15) 的行列式就是在公式(8) 中出现的那些项的一个和,但是,由于刚才谈到的第二指标所作成的排列的类的变更,这个新和的各项的符号与和(8) 中相当项的符号相反,就是说,当两列对调时,行列式的值改号.对一二两列对调的情形我们已经证明了这个性质.对于任意两列对调的情形,上述的证明也仍然适用,例如,下面的等式的成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

第二个行列式是由第一个经二三两列对调而得到的.

现在再说明行列式的一个性质.取定和(8) 中的某一项

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{16$_1$}$$

只要调换上面乘积中的因子，我们可以得到第二个指标的递升排列，这时第一个指标形成某个排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，上式就可以写成

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} \tag{$16_2$}$$

从($16_1$)到($16_2$)的过程可以借一些因子间的对换来完成. 每一个这样的对换不仅是第一个指标所成的排列的对换，同时也是第二个指标所成的排列的对换. 如果从($16_1$)过渡到($16_2$)所需要的对换的个数是偶数，则由此可以推得，排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第一类. 因为它既然可借偶数个对换变成基本排列 $1, 2, \cdots, n$，显然可知，它也可借偶数个对换从基本排列得到. 而且，此时排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第一类，因为它是借同样的偶数个对换可从基本排列得到的. 由同样的理由，如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第二类，则 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第二类. 由此推出

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} = (-1)^{[q_1, q_2, \cdots, q_n]}$$

因此我们有

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{[q_1, q_2, \cdots, q_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

总之，如果我们比较和(8)与和(10)的对应项，则可看出，这两个和恰好全相同，在和(10)中行所起的作用正如在和(8)中列所起的作用. 由我们的讨论直接推得，如果在表中所有的行用列代替而且所有的列用行代替，但不改变它们的次序，则此表的行列式的值不变.

例如，下列两个三阶行列式相等：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

### 3. 行列式的基本性质

Ⅰ. 首先叙述刚才证明过的性质——当用列替代行时，行列式的值不变. 以后凡对于列已经证明了的一切结果对于行也都适用，而且反过来也对.

Ⅱ. 在前一个小节中我们看出，两列互换只改变行列式的符号. 这对于行也是一样，就是说，两行(列)互换，行列式的值只改变它的符号.

Ⅲ. 如果行列式具有两相同的行，则当它们互换之后，一方面行列式没有什么改变，另一方面，根据Ⅱ，行列式改变符号，那就是说，如用 $\Delta$ 表行列式的值，遂有 $\Delta = -\Delta$，即 $\Delta = 0$. 总之，如果行列式有两行(或列)相同，则它的值等于零.

Ⅳ. 变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的没有常数项的一次多项式叫作这些变数的线性齐次函数，就是说它可以表成下面的形式：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

其中系数 $a_i$ 与 $x_n$ 无关. 这样的函数具有下面两个很明显的性质：

$$\varphi(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = k\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

后一个性质对于任意多组变数的和也成立. 现在回到公式(8)，我们看到，和式(8) 中每一项恰好含有每一行的一个元素作为它的因子. 由此得出，行列式是任何一行(或任何一列) 的元素的线性齐次函数.

因此，如果某一行(列) 的所有元素含有一个公共因子，则可把它提到行列式的记号之外.

对应于表(6) 的行列式的值常常记作如我们已经提到过的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者简记作

$$| a_{ik} | \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

上述的性质对于特殊情形可写成，例如，下面的形式

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由上述线性齐次函数的第二个性质得到下面的行列式的性质：如果某一行(列) 的元素是相同数目的诸项的和，则这行列式等于一些行列式的和，和中的每个行列式是将上面提到的那一行(列) 换成单独的一项而得到的. 例如

$$\begin{vmatrix} a & b & c + c' \\ d & e & f + f' \\ g & h & i + i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & i' \end{vmatrix}$$

我们还要再讲一个，由线性和齐次性得来的一个直接推论. 如果某一行(列) 的元素全等于零，则行列式等于零.

Ⅴ. 如果从表(6) 划去第 $i$ 行和第 $k$ 列，元素 $a_{ik}$ 恰在它们的交叉点上，则剩下($n-1$) 行与($n-1$) 列. 这($n-1$) 行和($n-1$) 列作成的($n-1$) 阶行列式叫作 $n$ 阶基本行列式的对应于元素 $a_{ik}$ 的子式. 用 $\Delta_{ik}$ 来表示这个子式作下面的乘积：

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik} \tag{17}$$

它叫作元素 $a_{ik}$ 的代数余子式. 现在来证明，这些代数余子式就是在上面所提到的性质中的线性齐次函数的系数，这就是说，对于任意第 $i$ 行下面的公式成立

$$\Delta = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \cdots + A_{in}a_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{18}$$

而且对于任意第 $k$ 列 —— 有公式：

$$\Delta = A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \cdots + A_{nk}a_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

其中 $\Delta$ 表行列式的值. 换句话说, 我们需要证明, 如果在和(8) 中我们归并含有某一固定元素 $a_{ik}$ 的所有项, 则这个元素的系数应该是由公式(17) 所定义的它的代数余子式 $A_{ik}$. 先用 $B_{ik}$ 表 $a_{ik}$ 的系数, 并且要首先提出, 这个系数是一些 $(n-1)$ 个元素的乘积的和, 其中第一个乘积已不再含有位于第 $i$ 行以及第 $k$ 列的元素.

首先看 $i=k=1$ 的情形, 在和(8) 中含有元素 $a_{11}$ 的所有的项的和可写成

$$a_{11} \sum_{(p_2,\cdots,p_n)} (-1)^{[1,p_2,\cdots,p_n]} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这里的和数是关于数 $2,3,\cdots,n$ 作所有可能的排列 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 所得到的项相加而成的. 在完全的排列 $1,p_2,\cdots,p_n$ 中第一个元素 1 对于其余的数而言总是处在顺序的位置. 所以对于逆序的个数我们得到等式

$$[1,p_2,\cdots,p_n] = [p_2,\cdots,p_n]$$

这里对于两种排列都是以升序的排列作为基本排列的. 如此我们得到 $a_{11}$ 的系数的表达式如下:

$$B_{11} = \sum_{(p_2,p_3,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_2,\cdots,p_n]} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这个和是与行列式的定义相符合的. 但是将它与原来的行列式比较缺了第一行和第一列. 由此看出

$$B_{11} = \Delta_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = A_{11}$$

就是说, 当 $i=k=1$ 时, 我们的论断已经证明了. 现在来看 $i$ 与 $k$ 为任意的情况. 将第 $i$ 行依次与它上面的行调换, 使得它最后被移到第一行的位置. 这需要作 $(i-1)$ 个行的调换. 用完全同样的方法, 再把第 $k$ 列移到第一列的位置. 经过这样的调换以后, 元素 $a_{ik}$ 移到左上角元素 $a_{11}$ 的位置. 第 $i$ 行变成第 1 行, 第 $k$ 列变成第 1 列, 而其余的行与列的次序不变. 由上面所得到的结果得知, 经过刚才的调换以后, $a_{ik}$ 的系数等于 $\Delta_{ik}$. 但是, 为了完成这样的调换, 必须应用 $(i-1)+(k-1)$ 次行与行以及列与列的调换. 而且每一个这样的调换使行列式添加一个 $(-1)$ 的因子. 因此, 总共添加了因子

$$(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k}$$

所以 $B_{ik}$ 的最后表达式是

$$B_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{(-1)^{i+k}} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik} = A_{ik}$$

至此证明完成. 如此, 我们证明了公式(18) 与(19). 如果我们在行列式 $\Delta$ 中用数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 依次代替第 $i$ 行的元素而不改变其余的行, 则在公式(18) 中因子 $A_{is}$ 不改变而新行列式的值为

$$\Delta' = A_{i1}c_1 + A_{i2}c_2 + \cdots + A_{in}c_n \tag{20}$$

特别是，如果我们令 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 依次等于另一行的元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$，而 $j \neq i$，则行列式 $\Delta'$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行相同. 因而它的值等于零：$\Delta' = 0$，就是说

$$A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \cdots + A_{in}a_{jn} = 0 \quad (i \neq j) \tag{$21_1$}$$

把同样的方法用于列，于是有

$$A_{1k}a_{1l} + A_{2k}a_{2l} + \cdots + A_{nk}a_{nl} = 0 \quad (k \neq l) \tag{$21_2$}$$

公式(19)及(21)说明了一个对于以后很重要的行列式的性质.

如果由某一行(列)的元素各乘以它们的代数余子式，然后把这些乘积加起来，则所得的和等于行列式的值. 如果由某一行(列)的元素各乘以另一行(列)的相当元素的代数余子式，然后把这些乘积加起来，则所得的和等于零.

Ⅵ. 我们把行列式 $\Delta$ 的第二行的元素乘以同一因子 $p$ 之后，把它加到第一行，此时行列式的第一行的元素变成

$$a_{1s} + pa_{2s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

由于性质 Ⅳ，新行列式等于两个行列式的和：一个是原来的，另一个是这样的一个行列式，它的第一行的元素是

$$pa_{2s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

而其余各行与原来行列式 $\Delta$ 的相当行相同. 把第一行的公共因子 $p$ 提出以后，于是第一行与第二行相同，因此，这个行列式的值为零，总的说来，就是如果将某一行(列)乘以一个公共因子，把这结果加到另一行(列)，则所得到的行列式的值仍与原来的行列式的值相等.

现在来讲一些以后要用到的记号. 与以前一样，假设给了一个正方形的表(6)，且令 $l$ 为不超过 $n$ 的正整数. 由表(6)中的带有号码 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 的 $l$ 行与带有号码 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 的 $l$ 列所组成的 $l$ 阶行列式用下面的记号来表示：

$$A\begin{pmatrix} p_1, p_2, \cdots, p_l \\ q_1, q_2, \cdots, q_l \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{p_1q_1} & a_{p_1q_2} & \cdots & a_{p_1q_l} \\ a_{p_2q_1} & a_{p_2q_2} & \cdots & a_{p_2q_l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p_lq_1} & a_{p_lq_2} & \cdots & a_{p_lq_l} \end{vmatrix} \tag{22}$$

在这里通常把任何一个数 $a$ 本身就叫作对应于这个数的一阶行列式，即 $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = a_{pq}$. 正整数 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 与 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 可以不必按照 $p_s$ 与 $q_s$ 的上升的次序安排. 如果这两个数列皆是按照上升次序排列的，则行列式(22)叫作行列式(8)的一个 $l$ 阶子式. 行列式(22)可以从行列式(8)去掉 $(n-l)$ 行与 $(n-l)$ 列而得到. 假设这些被去掉的行与列的号码按上升次序写出是：$r_1, r_2, \cdots, r_{n-l}$

与 $s_1, s_2, \cdots, s_{n-l}$. 则子式

$$A\begin{pmatrix} r_1, r_2, \cdots, r_{n-l} \\ s_1, s_2, \cdots, s_{n-l} \end{pmatrix}$$

叫作子式(22) 的余子式,而表达式

$$(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_l+q_1+q_2+\cdots+q_l} A\begin{pmatrix} r_1, r_2, \cdots, r_{n-l} \\ s_1, s_2, \cdots, s_{n-l} \end{pmatrix} \qquad (22_1)$$

叫作子式(22) 的代数余子式. 对于单独的元素 $a_{ik}$,这个代数余子式的定义与原来的定义(17) 一致.

代数余子式$(22_1)$ 记作

$$A'\begin{pmatrix} p_1, p_2, \cdots, p_l \\ q_1, q_2, \cdots, q_l \end{pmatrix}$$

它被给定的行列式(22) 完全决定,就是说,被给定的行的号码序列 $p_1$, $p_2, \cdots, p_l$ 以及列的号码序列 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 完全决定.

我们固定行的号码. 行列式 $\Delta$ 的值显然是这些行的元素的 $l$ 次齐次多项式,行列式 $\Delta$ 可表成下式,它是可以证明的(拉普拉斯定理):

$$\Delta = \sum_{q_1<q_2<\cdots<q_l} A\begin{pmatrix} p_1, p_2, \cdots, p_l \\ q_1, q_2, \cdots, q_l \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} p_1, p_2, \cdots, p_l \\ q_1, q_2, \cdots, q_l \end{pmatrix} \qquad (23)$$

这里的和数是对从数列 $1, 2, \cdots, n$ 取出的所有可能上升的数列 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 求和. 在和(23) 中项的总数等于从 $n$ 个元素中取 $l$ 个的组合总数:

$$\mathrm{C}_n^l = \frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{l!}$$

这是因为数 $q_s$ 在和(23) 中已被规定了按上升的次序排列,$q_s$ 的次序因此在计算和(23) 的项的总数时不起任何作用. 当 $l=1$ 时,$A\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = a_{p_1 q_1}$,公式(23) 即变成当 $i=p_1$ 时的公式(18). 公式(23) 可以说是将 $\Delta$ 按行展开. 如果我们将 $\Delta$ 按列展开,即可得到与(23) 类似的公式. 这是容易作出的,以后我们将不利用公式(23) 而且不打算证明它.

## 4. 行列式的计算

二阶行列式的计算是很简单的. 先写出表而且暂时画上实线与虚线如下:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

按照公式(11),则行列式的值等于实线上元素的乘积减去虚线上元素的乘积.

再看三阶行列式. 在公式(3) 中我们写出了三阶行列式的展开的形式. 不