普通高等教育"十三五"规划教材

XIANXINGDAISHU

线性代数

（第二版）

太原理工大学数学学院 编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线 性 代 数

(第二版)

太原理工大学数学学院　编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以教育部高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划为编写依据，结合近年来国内外线性代数教材改革、发展的形势及取得的教学成果编写而成. 全书共6章，主要内容为行列式、n维向量、矩阵、线性方程组、矩阵对角化与二次型、线性空间与线性变换. 本书内容完整，叙述简明，习题题型多样化.

本书可作为大学本科非数学类各专业的线性代数教材，也可作为非数学类各专业教师、学生及相关工程技术人员线性代数知识方面的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/太原理工大学数学学院编. —2版. —北京：科学出版社，2018.2
普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-056451-1

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①太…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第019558号

责任编辑：王　静／责任校对：张凤琴
责任印制：师艳茹／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007年12月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2018年2月第　二　版　印张：12　1/4
2018年2月第十三次印刷　字数：247 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

由太原理工大学数学系编写的本科非数学类《线性代数》已经使用了十年. 本次再版, 编者广泛吸收了广大教师与学生的有益建议, 顺应当今线性代数课程的改革潮流, 本着利于学、便于教的教学原则, 对所有内容进行了重新梳理, 调整了部分内容的安排次序, 使得基本概念的表述更准确, 定理的证明更简洁. 同时强化了每节内容的练习题, 并增加了每章后的习题部分, 在题型多样化、题目数量与质量的把控上又迈进了一步, 相信这样的努力必定能给线性代数课程的教学带来益处.

本次再版, 全书内容由刘进生、张建文、王绪柱、魏毅强四位教授及太原理工大学线性代数课程负责人王东保老师等集体编写, 主编为刘进生.

由于作者水平所限, 书中不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正.

作　者

2017 年 10 月

第一版前言

众所周知，线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而实际上许多非线性问题，在一定条件下，也可以转化为线性问题．因此，线性代数的理论和方法已成为科学研究人员与技术工作者必不可少的数学知识．特别是随着计算机技术的高速发展与广泛应用，使许多科学技术问题可以通过离散化的数值计算得到定量分析．从而使得以处理离散变量为主的线性代数课程在大学教育中占有越来越重要的地位．

本书是在太原理工大学数学系编写出版的《线性代数》教材的基础上，经过多年使用后，由太原理工大学数学系的三位教授修改而成的，其中第 1、2 章由杨晋编写，第 3、4 章由刘进生编写，第 5、6 章由张建文编写．书中融入了近十年来线性代数教学改革的新成果与教学实践的经验与体会，吸收了许多教师及学生的有益建议．

鉴于线性代数具有较强的抽象性与逻辑性，为帮助读者理解、掌握其中的概念、定理及相互间的关系，从教与学的实际出发，书中对各部分内容作了详尽的说明，并配置了适量的例题与习题，书末给出了部分习题的参考答案．

由于作者水平有限，书中不妥与谬误之处在所难免，恳请读者批评指正．

作　者

2007 年 11 月

目　录

第 1 章 行 列 式

行列式是线性代数中最常用的基本工具之一. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法. 并给出行列式的一个重要应用, 即用行列式求解特殊的线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则. 为研究一般的线性方程组及解决线性代数的其他相关问题奠定基础.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

容易计算得到

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)\,x=b_2c_1-b_1c_2, \\ (a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1, \end{cases}$$

可以证明 (见 1.3 节) 当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时, 方程组 (1.1.1) 有唯一解

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{1.1.2}$$

但公式 (1.1.2) 不容易记忆, 也不便于推广. 如果对给定的四个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$, 记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.3}$$

并称它为一个二阶行列式, 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2,$$

那么公式 (1.1.2) 就可表示为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

这就是行列式这一概念的由来.

二阶行列式 (1.1.3) 左端记号中的二行二列的 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为该行列式的元素. 每个元素 a_{ij} 有两个下标 i 和 j. 第一个下标 i 表示该元素所在的行, 称为行指标; 第二个下标 j 表示该元素所在的列, 称为列指标. 我们将 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为该行列式的主对角线; 而 a_{12} 到 a_{21} 连线称为它的副对角线. 按照定义, 二阶行列式便是其主对角线上的两元素之积与副对角线上的两元素之积的差. 通常称为对角线法则. 一般地, 将行列式 (1.1.3) 记为 D 或 $|a_{ij}|$ 或 $|a_{ij}|_2$. 其右端的表示式称为行列式 D 的展开式, 也称为行列式 D 的值. 下文中在介绍三阶行列式以及一般的 n 阶行列式时, 我们仍沿用这些记号与术语.

1.1.2　三阶行列式

与二阶行列式一样, 考虑三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的求解问题, 就引出三阶行列式的概念.

给定 9 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$, 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.1.4}$$

三阶行列式 (1.1.4) 的右端也可以用对角线法则来记忆, 如图 1.1 所示.

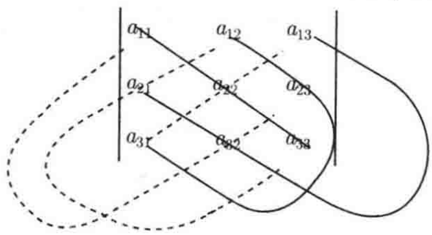

图 1.1

其中, 每一条实线上的 3 个数的乘积带正号, 每一条虚线上的 3 个数的乘积带负号, 所得六项乘积的代数和就是该三阶行列式的值. 例如

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8 \\ &= 45+84+96-105-72-48=0. \end{aligned}$$

仔细观察三阶行列式 (1.1.4), 利用求和记号 $\sum$, 它可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm\, a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{1.1.5}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 分别取

$$123, \quad 231, \quad 312, \quad 132, \quad 213, \quad 321, \tag{1.1.6}$$

并且只对这六种情形求和. 由于 (1.1.5) 中每一项乘积的行指标都是按 $1,2,3$ 的顺序排列的, 所以其所带的 $\pm$ 号是由列指标 $p_1p_2p_3$ 的排列顺序决定的. 如果我们能够根据 $p_1p_2p_3$ 的不同取法确定出乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 所带的正负号, 我们就能将三阶行列式的概念推广到四阶乃至更高阶的情形, 这需要有关全排列及其逆序数的概念.

1.1.3 全排列及其逆序数

定义 1.1.1 将自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照某种次序排成一列, 称为一个 n 级全排列, 简称为排列.

例如, 321 是一个 3 级全排列, 2413 是一个 4 级全排列.

利用排列组合的知识, 易知 n 级全排列的种数为 $n!$. 为下面讨论方便, 将自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个 n 级全排列记为 $p_1p_2\cdots p_n$. 在所有的 n 级全排列中, 有一个排列是 $12\cdots n$, 它的特点是小数一定是排在大数的前面. 我们称其为标准排列或者自然排列. 而在其他的任意一个 n 级全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中, 总要出现小数排在大数后面的情形. 为此, 我们给出全排列的逆序数概念.

定义 1.1.2 对于 n 级全排列 $p_1p_2\cdots p_n$, 若其中两个数 p_i 与 p_j 满足条件 $i<j$ 且 $p_i>p_j$, 则称数 p_i 与 p_j 构成排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的一个逆序. 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的所有逆序的总数, 叫做此排列的逆序数, 记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 并且当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶 (奇) 数时, 就称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶 (奇) 排列.

下面给出全排列逆序数的求法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级全排列, 对于其中任意一个数 p_i 来说, 排在它前面比它小的每一个数, 与 p_i 都不构成逆序; 而排在它前面比它大的每一个数, 与 p_i 都构成一个逆序. 于是, 若记全排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n$ 中排在 p_i 前面且比 p_i 大的数共有 t_i 个, 那么按照定义 1.1.2 就有

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

同时显然有 $t_1=0$; $t_k=0$, 如果 $p_k=n$.

例 1.1.1 求 5 级全排列 43152 的逆序数, 并指出它的奇偶性.

解 在 5 级全排列 43152 中, 除去首位数 4 及最大数 5 之外,

3 前面比 3 大的数有 4, 即 $t_2=1$;

1 前面比 1 大的数有 4、3, 即 $t_3 = 2$;

2 前面比 2 大的数有 4、3、5, 即 $t_5 = 3$.

因此排列 43152 的逆序数为 $\tau(43152) = 1 + 2 + 3 = 6$, 所以它是一个偶排列.□

显然, $\tau(12\cdots n) = 0$, 所以 $12\cdots n$ 是偶排列; 而

$$\tau(n(n-1)\cdots 321) = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

它的奇偶性与 n 有关. 一般地

$$0 \leqslant \tau(p_1p_2\cdots p_n) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

可以证明, 在所有 $n(\geqslant 2)$ 级全排列中, 奇排列和偶排列的个数相等, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

下面对排列中元素之间的位置关系作分析, 引入对换概念.

定义 1.1.3　在一个排列中, 将某两个数的位置对调, 而其他数的位置不变, 就得到一个新的排列, 对于排列所施行的这样一个变换叫做一个对换.

例如, 排列 3124, 经过数 3 和 4 的对换, 变成新排列 4123. 易知 3124 为偶排列, 而 4123 为奇排列. 一般地, 我们有如下定理.

定理 1.1.1　对换改变排列的奇偶性.

即经过一次对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

由定理 1.1.1 知, 经过奇数次对换后, 排列改变其奇偶性; 经过偶数次对换后, 排列不改变其奇偶性. 因为标准排列是偶排列, 于是有如下推论.

推论 1.1.1　奇排列对换成标准排列的对换次数是奇数, 偶排列对换成标准排列的对换次数是偶数.

1.1.4　n 阶行列式的定义

利用全排列及其逆序数的概念, 对于三阶行列式, 结合 (1.1.4)—(1.1.6) 式, 我们有下列事实:

列指标排列	逆序数	奇偶性	对应乘积及所带 ± 号
123	$\tau(123) = 0$	偶排列	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
231	$\tau(231) = 2$	偶排列	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
312	$\tau(312) = 2$	偶排列	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
132	$\tau(132) = 1$	奇排列	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
213	$\tau(213) = 1$	奇排列	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
321	$\tau(321) = 3$	奇排列	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

即对于三阶行列式, 当三级全排列 $p_1p_2p_3$ 为偶排列时, 乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 带正号; 而当 $p_1p_2p_3$ 为奇排列时, 乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 带负号. 所以三阶行列式 (1.1.4) 可以写作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{1.1.7}$$

其中和号 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1, 2, 3 这三个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 的种数进行求和. 根据三阶行列式这一定义方式, 我们给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.1.4 给定 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.1.8}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级全排列, 而 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 级全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的种数求和.

由定义 1.1.4 可知, n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 是 $n!$ 项乘积的代数和. 每一项是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积并赋予正号 "+" 或者负号 "−", 并且乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 所带的正负号由 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 确定.

当 $n=2,3$ 时, 用定义 1.1.4 所得到的二阶与三阶行列式, 显然与前面给出的定义是一致的. 当 $n=1$ 时, 按定义一阶行列式就是 $|a_{11}|=a_{11}$. 这在记号上要注意与数 a_{11} 的绝对值区别开来. 下面看几个特殊行列式的例子.

例 1.1.2 证明:

(1) 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(3) 左三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1};$$

(4) 右三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

证明 对于行列式 D 的展开式中的任意一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 当 n 个元素 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 中至少有一个为 0 时, 该项为 0, 故只需计算那些可能不为 0 的项即可. 我们证明结论 (1), 其余结论的证明留给读者作为练习.

在 D 的第 1 列元素中, 除了 a_{11} 外, 其他元素均为 0, 因此只能取 $p_1=1$; 在第 2 列元素中, 除了 a_{12} 和 a_{22} 这两个元素外, 其他元素均为 0, 因此 p_2 可以取 1 或 2, 而前面已取 $p_1=1$, 所以只能取 $p_2=2$, 依次类推, 可得 $p_3=3,\cdots,p_{n-1}=n-1$, $p_n=n$, 这样 D 的展开式中可能不为零的项就只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 故得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ □

例 1.1.2 的特殊情形就是下面的对角行列式和次对角行列式, 它们在实际中也经常用到:

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

在行列式的定义式 (1.1.8) 中, 注意到数的乘法满足交换律, 所以我们可以任意交换乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的次序, 因此利用全排列逆序数的知识可以证明 (1.1.8) 也可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}. \tag{1.1.9}$$

或者更一般地有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \\ &= (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是给定的某个 n 级全排列. 同时也有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \\ &= (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 也是给定的某个 n 级全排列.

练 习 题 1.1

1. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. (1) 证明对任意实数 a,b,c, 方程 $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix}=0$ 的根都是实数;

(2) 证明复系数的二次三项式 $ax^2+2bx+c$ 是完全平方当且仅当 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=0$;

(3) 证明分式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 与 x 无关当且仅当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$.

3. 求出方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & x \\ 1 & 8 & x^2 \end{vmatrix}=0$ 的全部根.

4. 分别求下面全排列的逆序数, 并说明其奇偶性.

(1) 4312;

(2) 316542;

(3) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

5. 已知 n 级全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 k, 求 n 级全排列 $p_np_{n-1}\cdots p_1$ 的逆序数. 如果 k 是偶数, 试讨论全排列 $p_np_{n-1}\cdots p_1$ 的奇偶性.

6. 写出由排列 315462 到排列 123456 所作的一种对换.

7. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}$ 的所有项, 并指出每一项所带的正、负号.

8. 利用行列式的定义分别证明:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

9. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}$.

10. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 12 & -5 & 0 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的计算

根据行列式的定义, 要计算一个 n 阶行列式, 需求出 $n!$ 项的代数和, 而每一项又要计算 n 个元素的乘积, 显然当 $n \geqslant 4$ 时, 这样的计算量是很大的, 我们不可能得到像计算二阶、三阶行列式那种便于记忆的公式. 因此有必要讨论行列式的计算方法. 其基本想法主要有两种, 一是利用行列式的性质将它化为例 1.1.2 给出的三角行列式; 二是逐步降低行列式的阶数. 我们分别介绍如下.

1.2.1 行列式的性质

给定行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式. 它是将 D 的各行换成同序号的列 (即行、列互换) 后所得到的行列式. 显然 D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证明 记 $D = |a_{ij}|$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}} = |b_{ij}|$, 则对于 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 有 $b_{ij} = a_{ji}$. 于是由 (1.1.9) 即得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D. \end{aligned}$$ □

由性质 1.2.1 知, 行列式中 "行" 与 "列" 具有同等的地位, 所以行列式的性质凡是对行成立的, 对列也同样成立, 反之亦然, 故下面的讨论中只对其中一种情形说明即可.

性质 1.2.2 互换行列式其中的某两行 (列), 所得行列式与原行列式仅差一个符号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 设 $D_1 = |b_{ij}|$ 是由行列式 $D = |a_{ij}|$ 交换 $i, j(i < j)$ 两行得到的, 那么对于 $p = 1, 2, \cdots, n$ 有 $b_{ip} = a_{jp}, b_{jp} = a_{ip}$, $b_{kp} = a_{kp}(k \neq i, j)$. 于是有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= -\sum_{p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D, \end{aligned}$$

其中负号的出现是由于一次对换改变排列奇偶性的缘故. □

推论 1.2.1 如果行列式中有两行 (列) 完全相同, 那么行列式等于零.

证明 交换行列式 D 中相同的两行, 由性质 1.2.2 有 $D = -D$, 于是 $D = 0$.□

性质 1.2.3 将行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以数 k, 等于用数 k 乘此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$