普通高等教育“十三五”规划教材

GAILULUN YU SHULITONGJI

概率论与数理统计

主编 明杰秀 周雪 刘雪

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计

主编　明杰秀　周　雪　刘　雪

同济大学 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按照教育部高等院校工科、理科及经管类专业"概率论与数理统计"课程的教学大纲，根据当前大多数高等院校的学生基础，吸收国内外同类教材的优点，结合多年的教学经验编写而成. 本书通俗易懂，简明扼要，同时又不失完整，全面系统地讲解了概率论与数理统计的基础知识. 全书共 8 章，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计以及假设检验. 每章分为若干小节，每节配有习题，书末附有习题的参考答案.

本书理论体系完整，举例丰富，难度适宜，同时在讲解过程中注重与实际应用背景相结合，强调应用能力的培养，在每章节最后配有以 Excel 为分析工具进行概率论与数理统计的操作应用. 本书可供普通高等院校工科类、理科及经管类专业作为概率论与数理统计课程教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 明杰秀，周雪，刘雪主编. -- 上海：同济大学出版社，2017.7

ISBN 978-7-5608-7142-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①明… ②周…③刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 156310 号

普通高等教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计

主编 明杰秀 周 雪 刘 雪

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 江苏句容排印厂

开　本 787 mm×1092 mm 1/16

印　张 22.75

字　数 455 000

印　数 3 101—6 200

版　次 2017 年 7 月第 1 版 2018 年 1 月第 2 次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-7142-4

定　价 39.00 元

前 言

“概率论与数理统计”是普通高等院校工科类、理科及经管类专业的一门十分重要的公共基础课程，该门课程是研究随机现象的一门数学课程，在各个领域中都有很强的应用性，是培养具有良好数学素质及应用型人才方面必不可少的一门数学课程. 本书按照高等院校工科、理科及经管类专业的“概率论与数理统计”的教学大纲，结合当前大多数高等院校的学生基础，吸收国内外同类教材的优点基础上，并深入结合编者多年的教学经验编写而成.

全书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解了概率论与数理统计的基础知识，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计以及假设检验共8章内容. 每章分为若干小节，每节配有习题，书末附有习题的参考答案.

本书的理论体系完整，举例丰富，难度适宜，同时在讲解过程中注重与实际应用背景相结合，强调应用能力的培养，在每章节最后配有以 Excel 为分析工具进行概率论与数理统计的操作应用.

从编写思想的确立到教学内容的挑选，我们始终遵循以下宗旨：让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握概率论与数理统计的基本方法，让学生体会到概率论与数理统计的本质及其价值. 力求此教材具有以下特点：

第一，理论性. 尽量保证理论体系的完整性，内容上做精心安排，以突出概率论与数理统计的基本思想和方法.

第二，应用性. 结合每一章节内容，选择合适的生活中的案例或是专业相关的事例，以 Excel 为分析计算工具，加深对概率统计的思想方法的认识，统计的分析与结论，重在应用.

第三，趣味性. 例题和习题多采用与工科类、理科及经管类专业相关的案例，以

提高学生学习概率论与数理统计的兴趣，增强学习者的主动思维和动手能力.

第四，通俗性.语言上尽量简明扼要，通俗易懂，重点突出概率论与数理统计的思想与方法.

本书由明杰秀、周雪、刘雪共同编写，具体分工如下：第1、2章由刘雪、明杰秀编写，第6、7章由周雪、明杰秀编写，其余章节由明杰秀独立编写.全书经过编者的充分讨论，最后由明杰秀负责统稿、校改.

本书的出版得到了各方面的支持和帮助.在本书的编写过程中，得到了编者单位武汉东湖学院高等数学教研室的宝贵意见和提议，同时得到了武汉东湖学院的领导、教务处以及同济大学出版社的大力支持和热情帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中如有错误和不足之处，敬请各位同行和广大读者不吝赐教，并批评指正.

编　者

2017年6月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

◇ **统计应用** ◇

这样的飞机敢坐吗?

问题 1:如果要求一个打火机的可靠性达到 90%,而它是由 10 个零件组成的,那么,每个零件的可靠性应该达到多少?

问题 2:如果要求一台笔记本电脑的可靠性达到 90%,而它是由 1 000 个零部件组成的,那么,每个零件的可靠性应该达到多少?一架波音机 737 客机上有 300 多万个零部件,如果用可靠性 99.99%的零部件去组装它,这样的飞机您敢坐吗?

上面的问题可以根据本章要讲授的概率论中独立事件的乘法原则来计算,即 $A_1A_2\cdots A_{10}=90\%$.

问题 1 相当于问 $?^{10}=0.90$,取对数计算结果为 $0.99^{10}=0.904\ 4$,即只有每个零件部件的可靠性达到 99.99%时,由它们组装的打火机的可靠性才能达到 90%.

问题 2 与问题 1 类似,即相当于问 $?^{1\ 000}=0.90$,计算结果为 $0.999\ 9^{1\ 000}=0.904\ 8$,即只有每个零件的可靠性达到 99.99%时,由这 1 000 个零部件组装的电脑的可靠性才能达到 90%.

我们可以把 99.99%的可靠性(或合格率)理解为万分之一的次品率. 对于目前我国众多的生产制造企业而言,对万分之一的次品率会感到非常乐观. 我们就用我们引以为自豪的具有 99.99%的可靠性的零部件去组装波音 737 飞机,这种飞机整体质量的可靠性不言而喻.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学. 在自然界和人类社会生

活中普遍存在两类现象:一类是在一定条件下必然出现的现象,称为**确定性现象.** 例如,在一个标准大气压下,水加热到 100℃,必然沸腾;向上抛一块石头必然下落;同性电荷相互排斥,异性电荷相互吸引,等等. 另一类是在一定条件下我们事先无法预知其结果的现象,称为**随机现象.** 人们在实践活动中,常常会遇到随机现象,例如,射击项目中,可能击中靶心,也可能击不中,每一次射击的结果是随机的;明天的天气可能是晴天,也可能是阴雨天;某车间生产的产品可能是合格品,也可能是次品,等等.

1.1.2 随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知,初看似乎毫无规律,然而人们发现同一随机现象大量重复出现时,其每种可能的结果出现的频率具有稳定性,从而表明随机现象也有其固定的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的规律性称为随机现象的**统计规律性.** 概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科. 历史上,研究随机现象统计规律性最著名的试验是抛硬币试验. 表 1-1 为历史上抛硬币试验的记录.

表 1-1　　历史上抛硬币试验的记录

试验者	试验次数 n	正面次数 m	正面频率 m/n
德・摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

试验表明:虽然事先无法准确预知每次抛掷硬币将出现正面还是反面,但大量重复实验时发现,出现正面和出现反面的次数大致相等,即大致各占总试验次数的 1/2,并且随着试验次数的增加,这一比例稳定趋于 1/2 . 这说明,虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性,但是通过长期观察或者大量的重复试验可以看出,实验结果是有规律可循的,这种规律是随机试验结果自身所具有的特征.

对随机现象的观测或实验称为试验. 例如,掷一枚骰子,观察其出现的点数;抛一枚硬币 3 次,观察出现正面的次数;某个十字路口 1 min 内通过的车辆数等均为试验. 上述试验具有以下特征:

(1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 可观察性:试验的所有可能结果是事前已知且结果不止一个;

(3) 不确定性:在每次试验中,究竟是哪一种结果是事先无法确定的.

我们把这样的试验称为**随机试验**，简称为**试验**，通常用字母 E 表示. 本书中以后提到的都是随机试验.

1.1.3 样本空间

随机试验 E 的每一个可能的结果称为 E 的一个**样本点**，一般用 ω 表示. E 的所有样本点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots$ 所组成的集合称为 E 的**样本空间**，通常用 Ω 表示. 则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}.$$

例 1.1 设试验为任意抛掷一枚硬币，则有样本点 ω_1 表示“正面朝上”，ω_2 表示“反面朝上”，则样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

例 1.2 设试验为从装有三个白球(1, 2, 3 号)与两个黑球(4, 5 号)的袋中任取两球.

(1) 如果观察取出的两个球的颜色，则有样本点 ω_{00} 表示“取出两个白球”，ω_{11} 表示“取出两个黑球”，ω_{01} 表示“取出一个白球和一个黑球”，则样本空间为

$$\Omega_1 = \{\omega_{00}, \omega_{11}, \omega_{01}\}.$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码，则有样本点 ω_{ij} 表示“取出第 i 号与第 j 号球”$(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$，于是样本空间由 $\mathrm{C}_5^2 = 10$ 个样本点构成，即

$$\Omega_2 = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}\}.$$

例 1.3 设试验为记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数，则有样本点 ω_i 表示“该时刻等待的人数为 i 个”$(i = 0, 1, 2, \cdots)$，则样本空间由可数无穷多个样本点构成，即 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

例 1.4 设试验为测量车床加工的零件的直径，则有样本点 ω_x 表示“测得零件直径为 x mm”$(a \leqslant x \leqslant b)$，则样本空间由不可数无穷多个样本点构成

$$\Omega = \{\omega_x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

1.1.4 随机事件的概念

随机现象的结果称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A, B, C 等表示. 由前面关于样本点的定义知，随机事件也可以视为随机试验中某些样本点构成的集合. 例如在例 1.2 中，若用 A 表示“取出的两个球均为白球”这一事件，对于样本空间 Ω_1 来说，$A = \{\omega_{00}\}$ 是相应样本空间 Ω_1 的一个子集；对于样本空间 Ω_2 来说，$A = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ 为 Ω_2 的一个子集.

由此可见,随机事件具有以下特点:

(1) 任一事件是相应样本空间的一个子集;

(2) 事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现;

(3) 事件可用集合表示也可用语言表示,甚至还可用随机变量表示,今后会讲到.

另外,我们应该还要注意到两个特殊的事件,一个是任一样本空间 Ω 的最大子集 (Ω) 称为**必然事件**,仍然用 Ω 表示,必然事件是每次试验一定要发生的事件. 例如,掷一枚骰子时,"出现点数不超过 6"就是一必然事件. 样本空间 Ω 的最小子集 ($\varnothing$) 称为**不可能事件**,仍然用 $\varnothing$ 表示,不可能事件就是每次试验一定不会发生的事件. 例如,掷一枚骰子时,"出现 7 点"就是一个不可能事件. 应该指出,试验的任一样本点也是随机事件,今后我们把试验的样本点称为**基本事件**. 基本事件是样本空间的仅由单个样本点构成的子集.

注 必然事件与不可能事件原不是随机事件,但为讨论问题需要,人们将其看成是随机事件的两种极端形式,且在概率论中起着重要的作用.

1.1.5 随机事件的关系与运算

下面讨论事件间的关系及事件的运算,先讨论两个事件 A 与 B 之间的关系.

1. 事件间的关系

(1) 包含 事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A (事件 A 包含于事件 B),记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,如图 1-1 所示.

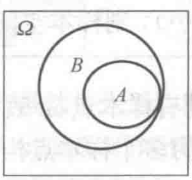

图 1-1

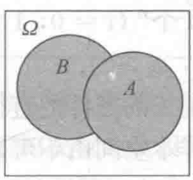

图 1-2

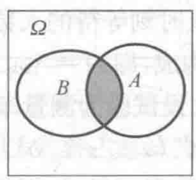

图 1-3

(2) 相等 若事件 A 与事件 B 中任一事件发生必然导致另一事件的发生,则称事件 A 与事件 B **相等**,记作 $A = B$. 即 A 与 B 为同一事件.

(3) 互不相容 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B **互不相容**(互斥). 例如,掷一枚骰子,$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$,则 A 与 B 互不相容.

2. 事件间的运算

(1) 并事件(和事件) 若事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,则这一事件称

为事件 A 与事件 B 的**并(或和)事件**,记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 即 $A\cup B=\{A$ 与 B 至少有一个发生$\}$, 如图 1-2 阴影所示. 例如,掷一枚骰子 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,3,6\}$, 则 $A\cup B=\{1,3,5,6\}$.

(2) 交事件(积事件)　若事件 A 与事件 B 同时发生,这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交(或积)事件**,记为 $A\cap B$ 或 AB, 如图 1-3 阴影所示. 例如,掷一枚骰子 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,3,6\}$, 则 $A\cap B=\{1,3\}$. 事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件,譬如有一列事件 $A_1, A_2, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为**有限并**;$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为**可列并**;$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为**有限交**;$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为**可列交**.

(3) 差事件　若事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**,记作 $A-B$, 如图 1-4(a)(b)阴影所示. 例如,掷一枚骰子 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,3,6\}$, 则 $A-B=\{5\}$.

特别地,必然事件 Ω 对任一事件 A 的差 $\Omega-A$ 称为事件 A 的**对立事件**,记为 $\bar{A}$, 即事件 A 不发生,如图 1-5 阴影所示. 事件 A 与事件 B 互为对立事件的充要条件是 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$, 这也是判断两事件成为对立事件的准则. 可见,对立事件一定是互不相容事件,但互不相容事件未必是对立事件.

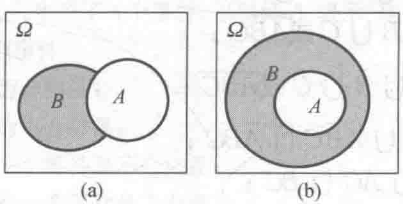

图 1-4

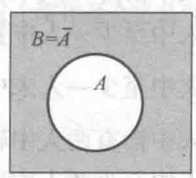

图 1-5

例 1.5　设事件 A, B, C 是同一样本空间中的三个事件,则

(1) 事件 A, B, C 同时发生,可以表示为 $ABC(A\cap B\cap C)$;

(2) 事件 A, B, C 中至少有一个发生,可以表示为 $A\cup B\cup C$;

(3) 事件 A 发生而 B, C 都不发生,可以表示为

$$A\bar{B}\bar{C}\quad 或\quad A-B-C\quad 或\quad A-(B\cup C);$$

(4) 事件 A, B, C 中恰好发生一个,可以表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;

(5) 事件 A, B, C 中恰好发生两个,可以表示为 $\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$;

(6) 事件 A, B, C 中没有一个发生,可以表示为 $\overline{A\cup B\cup C}$.

3. 事件的运算性质

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.