大学数学教学与改革丛书

概率论与数理统计

徐循 刘磊 主编

科学出版社

大学数学教学与改革丛书

概率论与数理统计

徐 循 刘 磊 主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书根据高等院校“概率论与数理统计课程教学”的基本要求，并结合21世纪工科类概率论与数理统计课程教学内容和课程体系改革发展要求编写而成.

全书共7章，包括概率论的基本概念、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计初步、数学软件简介等内容. 具有结构严谨，叙述直观清晰，内容通俗易懂、结合实际等特点.

本书可作为高等院校工科、理科和经济管理类专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐循，刘磊主编.—北京：科学出版社，2018.8
（大学数学教学与改革丛书）
ISBN 978-7-03-058267-6

I. ①概… II. ①徐… ②刘… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第159026号

责任编辑：邵 娜 闫 陶 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：彭 超 / 封面设计：彬 峰

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2018年8月第 一 版 印张：13 1/4
2018年8月第一次印刷 字数：311 000
定价：45.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

随着社会的进步、经济的发展、计算机技术的广泛应用, 数学在其中的作用变得越来越突出, 科学技术研究中所用到的数学方法越来越高深, 数学化已成为当今社会发展中各个研究领域中的重要趋势.

近年来我国高等院校积极开展高等教育的教学改革, 尤其是大学数学的教学内容和教学方法的改革, 这大大提高了大学数学的适用性.

本书是根据当前科学技术发展形势的需要, 结合我们多年来对概率论与数理统计课程教学内容和教学方法改革与创新的成果编写而成的, 其主要特点是注重数学与工程技术的有机结合, 其中的许多例题和习题本身就是来自于实际的应用. 同时对数学中的纯理论性的内容, 如概念、定理、方法的介绍, 注意结合学生的实际, 尽量采用学生易于理解、容易接受的方式, 进行深入浅出的讲解, 从而最大限度地降低学生学习的难度.

本书由徐循、刘磊任主编, 王红、朱长青、朱玲、刘清国任副主编, 参加编写的人员有徐循、刘磊、王红、朱长青、朱玲、杨策平、刘清国等, 最后由徐循、王红统稿定稿.

由于编者水平有限, 不妥之处在所难免, 恳请广大读者提出批评、建议, 以便再版时予以修订.

编 者

2018 年 4 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科, 它与其他学科有着紧密的联系, 并在社会经济各个领域具有广泛的应用. 本章重点介绍概率论中的基本概念, 如随机事件、样本空间、概率等, 它们是学习概率论与数理统计的基础, 并在社会经济、金融、工程技术各个领域具有广泛的应用.

应用实例一: 考试成绩问题

作为一名大学生, 在大学学习阶段会有各种各样的考试, 每次考试是否通过或者取得好的成绩影响到能否顺利毕业. 要想顺利通过每门功课的考试或取得好的考试成绩, 必须要努力学习.

然而, 有些同学并不以为然, 平时不努力学习但仍想侥幸通过考试. 他们认为考试是一件谁也说不准的事情, 有些同学通过了某些考试甚至取得好成绩, 但这些同学平时并没有努力学习, 那么这种情况出现的可能性(即概率)究竟有多大? 下面将该问题简化, 给出以下具体问题.

根据以往"概率论与数理统计"这门课程的考试结果分析, 努力学习的学生有 90% 的可能考试及格, 不努力学习的学生有 90% 的可能考试不及格. 据调查, 学生中有 90% 的人是努力学习的. 试问: 考试及格的学生中有多大可能是不努力学习的?

应用实例二: 信誉度问题

"狼来了""周幽王烽火戏诸侯"等诸多信誉度丧失的故事无不说明良好的信誉对个人、公司或企业乃至一个国家的重要性. 下面来考察如果一家公司或企业多次不讲信誉会有怎样的结果:

经过大量的调查统计, 得知现有一家公司的可信度为0.8, 不可信度为0.2, 问该公司多次失信后其可信度变为多少?

请同学们带着上述两个问题学习本章内容, 希望大家能认真思考, 用本章所学知识进行定量分析, 并找到该问题的答案.

(应用实例一、二的解答见本章末)

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机现象及其统计规律性

在自然界和社会生活中, 存在着两类不同的现象: 必然现象和随机现象, 它们是从其结果能否准确预知的角度来区分的. **必然现象**是在一定条件下, 必然发生(或必然不发生), 并能准确预知其结果的现象. 例如, 在标准大气压下, 水在 100℃沸腾; 在地面上竖直上抛的石子一定下落等.

随机现象是指在相同条件下重复进行时事先无法预知其结果的现象. 例如, 在相同

条件下抛掷同一枚硬币, 可能出现标明硬币价值的“数字面”(记为“正面”)朝上, 也可能另一面(记为“反面”)朝上, 而每次在抛掷这枚硬币之前, 都无法预知会出现“正面朝上”还是“反面朝上”的结果; 记录一天内来某医院就诊的人数, 可能是任意非负整数, 但事先无法预知其确切数字; 某人买彩票, 可能中奖, 也可能不中奖, 但买之前无法预知是否中奖等.

随机现象的结果虽然无法预测, 但并不是完全无规律可循. 例如, 多次重复抛掷一枚硬币得到“正面朝上”的结果大致有 50%, 1 天内到某医院就诊的人数按照一定规律分布等. 可见, 虽然随机现象在个别试验或观察中会出现不确定的结果, 但在大量重复试验或观察中, 其结果具有某种规律性, 这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

概率论与数理统计的研究对象是随机现象的统计规律性.

1.1.2 随机试验与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性, 需要对客观事物进行观察或试验. 下面是一些观察或试验的例子.

E_1: 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

E_2: 抛掷一枚骰子两次, 观察出现的点数.

E_3: 抛掷一枚骰子两次, 观察出现的点数之和.

E_4: 记录某火车站售票处一天内售出的车票数.

E_5: 在一批日光灯管中任意抽取一只, 测试它的寿命.

仔细分析, 可以发现上述观察或试验具有以下三个共同的特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地, 将具有以上三个特点的观察或试验称为**随机试验**, 记为 E, 本书以后提到的试验都是指随机试验.

将随机试验所有可能结果构成的集合称为 E 的**样本空间**, 记为 S. 样本空间的元素, 即随机试验 E 的每个可能结果, 称为**样本点**, 记为 ω.

例如, 上面的 5 个随机试验 $E_i\ (i=1,2,\cdots,5)$ 的样本空间分别为

$$S_1=\{1,2,3,4,5,6\};$$

$$S_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\};$$

$$S_3=\{2,3,\cdots,12\};$$

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$, 这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n;

$$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}.$$

需要注意的是, 样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如, 在随机试验 E_2 和

E_3中同是将一枚骰子抛掷两次，但由于试验的目的不一样，其对应样本空间S_2和S_3也不一样.

1.1.3 随机事件

在实际进行随机试验时，人们常常关心满足某些条件的那些样本点构成的集合. 例如，在观测日光灯管寿命的随机试验E_5中，自然希望灯管寿命越长越好，比如寿命是否大于1000 h即是否有$t \geqslant 1000$，满足这一条件的样本点构成样本空间S_5的一个子集$A=\{t \mid t \geqslant 1000\}$，称$A$为随机试验$E_5$的一个事件.

一般地，将随机试验E的样本空间S的子集称为E的**随机事件**，简称**事件**. 常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，则称这一**事件发生**.

特别地，由一个样本点构成的单点集，称为**基本事件**，例如试验E_1有 6 个基本事件$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$；试验E_3有11个基本事件$\{2\},\cdots,\{12\}$.

样本空间S包含所有的样本点，它是S自身的子集，在每次试验中是必然发生的，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也是S的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件与不可能事件虽无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

例如，在E_1中“出现的点数是奇数”的事件为$A_1=\{1,3,5\}$.

在E_2中“第一次出现的点数是1”的事件为$A_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)\}$.

在E_5中“灯泡的寿命小于1000小时”的事件为$A_3=\{t \mid 0 \leqslant t < 1000\}$.

1.1.4 事件的关系与运算

在同一样本空间中，往往存在许多随机事件. 数学上一个基本的思想方法是通过对较简单事件的分析，去了解较复杂的事件. 因此，需要研究随机试验的各个事件之间的关系和运算.

由于样本空间、随机事件都是集合，因此，随机事件之间的关系和运算同集合之间的关系和运算是一致的. 下面根据“事件发生”的含义，给出这些关系和运算在概率论中的提法.

设随机试验E的样本空间为S，而$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是S的子集.

1）事件的包含

若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为$B \supset A$或者$A \subset B$. 它表明事件A的样本点都属于事件B.

2）事件的相等

若$A \subset B$且$B \subset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$，它表明事件A的样本点与事件B的样本点完全相同.

3）事件的和(并)

将表示“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的和(并)，记为 $A\cup B$. 它是由属于 A 或 B 的样本点构成的集合.

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)；称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和(并).

4）事件的积(交)

将表示“事件 A 与事件 B 同时发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的积(交)，记为 $A\cap B$ 或 AB. 它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)；称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积(交).

5）事件的差

将表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 它是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合.

6）互不相容(或互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥)，它表明事件 A 与事件 B 没有相同的样本点.

7）对立事件(或逆事件)

若 $A\cup B=S$, $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或互为逆事件). 它表明对每次试验而言，事件 A, B 必有一个发生，且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$.

上述事件的各种关系和运算可用维恩图(图 1-1)直观地表示.

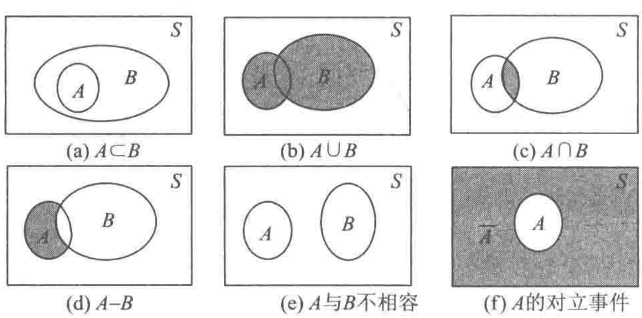

图 1-1

事件运算经常用到下述运算定律. 设 A,B,C 为事件，有

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

对偶律(德摩根公式): $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1 设有甲、乙、丙三人参加某项测试, 记 A 为事件“甲参加该项测试合格”, B 为事件“乙参加该项测试合格”, C 为事件“丙参加该项测试合格”. 试用 A,B,C 的运算关系表示以下各事件:

(1) 三人中只有甲合格;

(2) 三人中仅有一人合格;

(3) 三人中至少有一人合格;

(4) 三人都合格.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$;

(2) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(3) $A\cup B\cup C$ 或者 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(4) ABC.

1.2 概率的概念和性质

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 人们常常关注某些事件发生的可能性究竟有多大, 希望找到一个合适的数, 来度量事件在一次试验中发生的可能性大小. 本节先由频率引出度量事件发生的可能性大小的概率的统计定义, 然后给出概率的公理化定义, 最后探讨概率的性质.

1.2.1 概率的统计定义

统计定义是以大量重复试验为前提的, 为此, 首先引入频率及其稳定性的概念.

定义1 在相同条件下重复做 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**, 并记为 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义 1 易知频率具有下列基本性质:

(1) 对任意事件 A, 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的事件, 则

$$f_n\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)=f_n\left(A_1\right)+f_n\left(A_2\right)+\cdots+f_n\left(A_n\right).$$

例 1 考察抛硬币试验, 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 6 遍. 得到数据如表 1-1 所示(其中 n_A 表示“硬币正面朝上”(设为事件 A)发生的频数, $f_n(A)$ 表示 A 发生的频率).

表 1-1 抛硬币试验数据表

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492

由表 1-1 中数据可以看出，虽然对于同样的试验次数 n，$f_n(A)$ 不尽相同，但当试验次数较大时，频率 $f_n(A)$ 在 0.5 附近摆动，且随着 n 的增加，它逐步稳定在 0.5 这个数值上.

大量试验证实，当试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性. 如果让试验重复大量次数，得到频率 $f_n(A)$ 的稳定值，以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

定义 2（概率的统计定义） 在相同条件下进行大量重复试验，如果随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某一常数 p，则称常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

由统计定义求得的概率称为统计概率.

例如，在例 1 抛硬币试验中，事件 A（“硬币正面朝上”）的统计概率即为频率的稳定值 0.5.

1.2.2 概率的公理化定义

鉴于得到统计概率需要进行大量的试验，同时，为理论研究的需要，从频率的稳定性和频率的性质得到启发，可以给出如下度量事件发生可能性大小的概率的公理化定义.

定义 3（概率的公理化定义） 设 S 是随机试验 E 一个样本空间，对于 E 上的每一事件 A 规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 同时满足下列三个公理条件:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: $P(S)=1$;

(3) 可列可加性: 对任意可列个两两不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)+\cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由大数定律（本书第 5 章内容）可知，当试验次数 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 因此，有理由将概率 $P(A)$ 用来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

1.2.3 概率的性质

由概率的公理化定义的三个公理条件, 可以推导出概率的一些重要性质.

性质 1 不可能事件的概率为0, 即 $P(\varnothing)=0$.

证明 因为$S=S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$, 由概率的公理化定义的条件(2)和(3), 有

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

因此, $P(\varnothing)=0$.

性质 2 (有限可加性) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的, 则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证明 因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$$

而 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\cdots$ 是可列个两两不相容事件, 由可列可加性和性质 1, 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3 对任意事件 A, 有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证明 因为 $A\cup\overline{A}=S$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$, 由性质 2 有

$$1=P(S)=P(A)+P(\overline{A}),$$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4 对任意事件 A, B, 有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地, 若 $A\supset B$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

证明 由于 $A=(A-B)\cup AB$, 而 $(A-B)\cap AB=\varnothing$, 故由性质 2, 知

$$P(A)=P(A-B)+P(AB),$$

即

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地, 若 $A\supset B$, 则 $AB=B$, 所以

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

推论 1 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

推论 2 对任意事件 A, 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 5 对任意事件 A, B, 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，而 A 与 $B-AB$ 不相容，故由性质 2 和性质 4, 知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5 得证.

性质5称为概率加法公式，它可以推广到有限多个事件的情形，例如，对于三个事件 A, B, C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对于n个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，概率加法公式为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 2 设 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{1}{3}$，分别在下列条件下求 $P(A\overline{B})$:

(1) $A\supset B$; (2) A 与 B 互不相容; (3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$.

解 由事件的关系与运算，知 $A\overline{B}=A-B$，结合性质 4, 可得

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

(1) 当 $A\supset B$ 时，有 $P(AB)=P(B)$，因此

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$

(2) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(AB)=0$，因此

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2};$$

(3) 若 $P(AB)=\dfrac{1}{8}$，因此

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

例 3 某企业与甲、乙两公司签订某商品的长期供货合同, 从以往情况看. 甲公司按时供货的概率为 0.9, 乙公司按时供货的概率为 0.75, 这两个公司都按时供货的概率为 0.7, 求至少有一家公司按时供货的概率.

解 以 A,B 分别表示事件"甲公司按时供货""乙公司按时供货". 由题意知, $P(A)=0.9$, $P(B)=0.75$, $P(AB)=0.70$, 则至少有一家公司按时供货的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.9+0.75-0.7=0.95.\end{aligned}$$

1.3 古典概型与几何概型

"概型"是指某种概率模型. 本节讨论两种常见的概率模型: 古典概型和几何概型.

1.3.1 古典概型

定义 1 如果一个随机试验有下列两个特点:

(1) 有限性, 试验的样本空间的元素只有有限个, 即样本点的数目有限;

(2) 等可能性, 试验中每个基本事件发生的可能性相同,

那么称这个随机试验为古典型随机试验, 其概率模型称为**古典概型**.

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象. 它的一些概念具有直观、容易理解的特点, 有着广泛的应用. 下面讨论古典概型的计算公式.

设样本空间 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$, 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同, 即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

又由于基本事件是两两不相容的, 于是

$$1=P(S)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\}),$$

所以

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 包含 k 个样本点数, $A=\left\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\right\}$ $(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n)$, 则有

$$P(A)=P\left(\left\{\omega_{i_1}\right\}\cup\left\{\omega_{i_2}\right\}\cup\cdots\cup\left\{\omega_{i_k}\right\}\right)=P\left(\left\{\omega_{i_1}\right\}\right)+P\left(\left\{\omega_{i_2}\right\}\right)+\cdots+P\left(\left\{\omega_{i_k}\right\}\right)=\frac{k}{n},$$

即

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的样本点数}k}{\text{样本空间}S\text{包含的样本点数}n}. \tag{1.1}$$

(1.1) 式即为古典概型中事件 A 的计算公式.

例 1 抛掷一枚骰子两次, 求出现的点数之和为 7 的概率.

解 以 A 表示"出现的点数之和为 7"事件. 考虑 1.1 节中随机试验 E_2 的样本空间 $S_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$, 样本空间包含的样本点数 $n=36$; 而 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, 事件 A 包含的样本点数 $k=6$.

样本空间 S_2 包含有限个元素, 且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同, 故由 (1.1) 式得所求概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

若本题考虑 1.1 节中随机试验 E_3 的样本空间 $S_3=\{2,3,\cdots,12\}$, 则由于各个基本事件的可能性不相同, 就不能利用 (1.1) 式来计算所求概率, 因而对本题来说, 考虑样本空间 S_2 才能顺利计算有关事件的概率.

当样本空间的元素较多时, 一般不再将 S 中的元素一一列出, 而只需分别求出样本空间 S 中和事件 A 中包含的样本点数, 再由 (1.1) 式计算事件 A 的概率.

例 2 某种产品共 30 件, 内含正品 23 件, 次品 7 件, 从中任取 5 件. 试求被取的 5 件中恰有 2 件是次品的概率.

解 以 A 表示事件"被取的 5 件中恰有 2 件是次品".

从 30 件产品中任取 5 件 (这里是指不放回抽样), 所有可能取法有 $\binom{30}{5}$ 种, 每一种取法为一个基本事件, 显然样本空间中仅包含有限个元素, $n=\binom{30}{5}$, 由对称性知每个基本事件发生的可能性相同, 因而可以用 (1.1) 式来计算事件的概率.

又因从 7 件次品中取 2 件, 所有可能取法有 $\binom{7}{2}$ 种, 从 23 件正品中取 3 件的所有可能取法有 $\binom{23}{3}$ 种, 由乘法原理知, 事件 A 包含的样本点数 $k=\binom{7}{2}\binom{23}{3}$. 所以所求概率

$$P(A)=\binom{7}{2}\binom{23}{3}\Big/\binom{30}{5}=0.2610.$$

本例的一般情形为: 某种产品共 N 件, 内含次品 M 件, "从中任取的 n 件产品中恰有 m ($m\leqslant M$) 件次品" (记为事件 A) 的概率为

$$P(A)=\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}\Big/\binom{N}{n}. \tag{1.2}$$