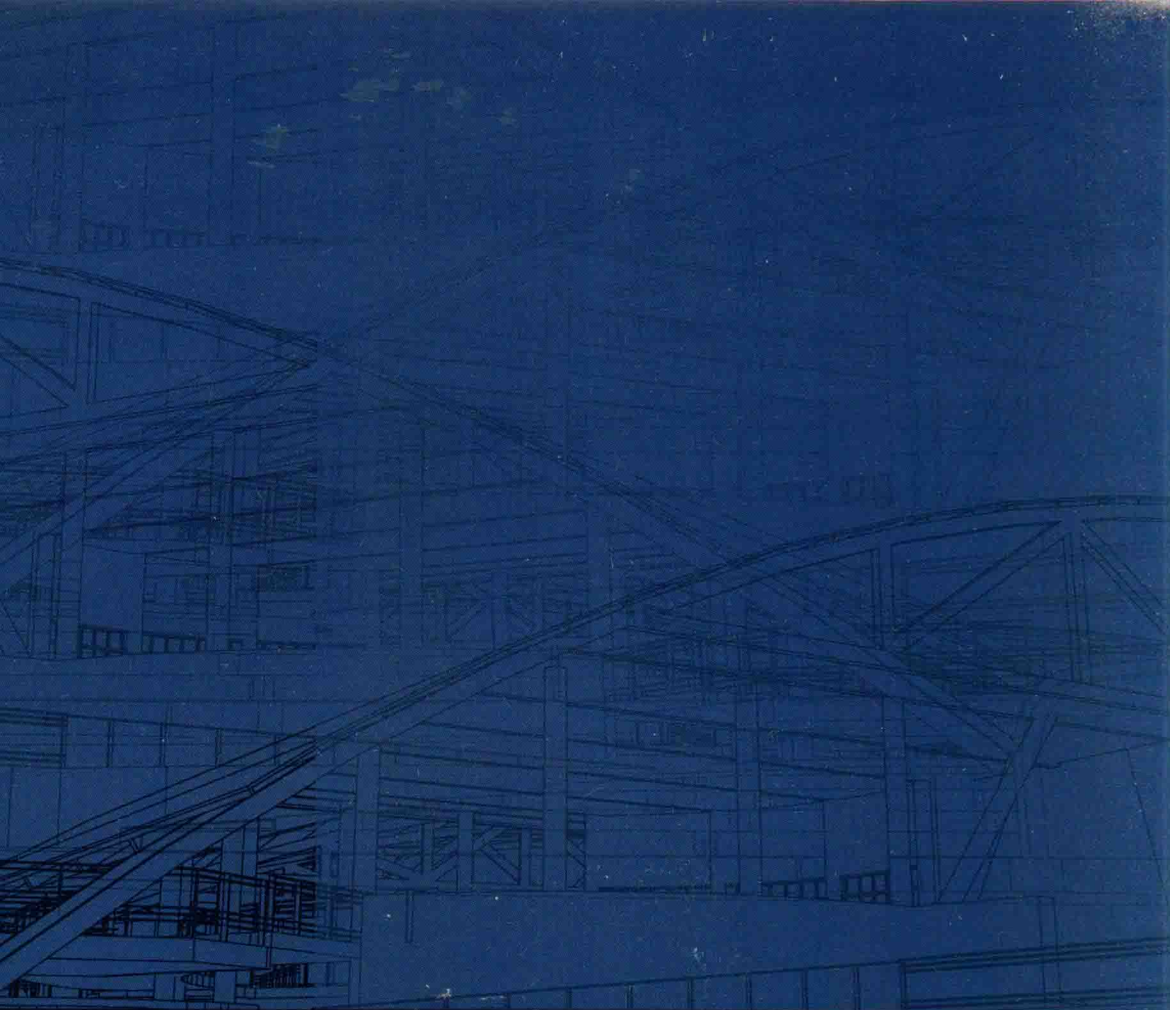

工程数学基础

蔡占川/编著

科学出版社

工程数学基础

蔡占川　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括：记数、坐标、函数、画图、空间、平均、逼近及分形. 全书共 8 章，每一章均包括概观、具体数学与数学实验三个部分. 第 1 章介绍记数法，包括位值制记数法的意义与价值、复数基、斐波那契数系等；第 2 章介绍坐标，包括齐次坐标、面积坐标、平行轴坐标系等；第 3 章介绍函数，包括函数的表达方式、函数的可视表达、函数图像变换等；第 4 章介绍画图，包括依表达式画图、按像素画图、不同投影下的地图等；第 5 章介绍空间，包括线性空间、内积空间、正交函数等；第 6 章介绍平均，包括加权平均、函数的平均、矩方法等；第 7 章介绍逼近，包括魏尔斯特拉斯逼近定理、样条函数、最小二乘法等；第 8 章介绍分形，包括茹利亚集与曼德布洛特集、分形插值、分形维数等.

本书可作为高等学校理工科(非数学类)专业研究生(包括硕士研究生和博士研究生)的教材；特别地，可作为信息科学及计算机应用专业研究生的教材；亦可作为理工科高年级本科生的参考书，同时，也可供信息科学领域和相关学科的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础/蔡占川编著. —北京：科学出版社，2018.3

ISBN 978-7-03-056863-2

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①蔡… Ⅲ. ①工程数学 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 048914 号

责任编辑：李静科／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 3 月第一次印刷 印张：18 1/4 插页：2
字数：365 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

读了蔡占川博士《工程数学基础》书稿, 印象深刻. 作为教材, 其可谓与众不同. 从教学目标的设定到章节内容的安排, 从经典材料的选取到现代成果的反映, 从讲述的口气到写作的方式, 多有别具匠心之处. 与流行的统编教材相比, 其特点至少体现在如下四方面.

(1) **通过专题讲座方式, 深入体会数学中的基本概念.** 例如, 开篇第 1 章, 阐述记数法. 通常教材不会再谈论连小学生都知道的题目, 但作者从十进制说到 "复数基" 记数技巧, 更引申到计算机编码, 令人耳目一新; 又如, 第 2 章, 强调坐标的重要意义之后, 介绍齐次坐标和面积坐标等, 对学生来说, 既开眼界又有用处.

(2) **强调理解数学思想, 引导学生学习数学家怎样思考问题.** 例如, 函数的概念在中学教材中早已出现, 本书再度强调, 联系到映射、集合、泛函, 以及与其密切相关的画图、信号处理等实际应用, 让对数学抽象理论敬而远之的学生知道: 恰因有抽象、"脱离实际" 的数学基础, 才产生有广泛可应用性的数学技术.

(3) **注重温故而知新, 从学生熟悉的内容开始, 适当加入新的内容.** 例如, 在回顾了傅里叶级数之后介绍非连续正交函数 ($U\&V$ 系统), 这是从沃尔什函数与哈尔函数发展来的有限区间上的预小波与多小波. 由于作者对 $U\&V$ 系统有较多研究成果, 有具体的切身体会, 阐述问题的来龙去脉, 会使学生既学到新的知识又了解研究过程, 帮助他们学习怎样发现问题、解决问题.

(4) **给出在计算机上实现的数学实验范例, 引导学生重视数学建模.** 一些看来平淡无奇的数学知识, 细究起来奥妙无穷. 书中提供了较多在计算机上完成的实验, 诸如二叉树与 H-分形、数字信息分存、曲面的最小二乘逼近等. 此外, 数学实验中多处援引探月工程中的实例, 作者以亲身参与相关重大项目的经验, 述说数学基础在解决实际问题中的作用.

纵观全书, 显而易见: 这本书不是对大学设置的数学课程内容做系统复习或补充, 而是通过若干专题的回顾, 力求加强对数学思想方法的认识.

谈到数学基础, 借此序言, 说点闲话. 数学教师, 都知道德国数学家爱德蒙 · 兰道 (Edmund Georg Hermann Landau, 1877—1938) 写的《分析基础》[①]. 这本老书, 说的是老故事: 从朱塞佩 · 佩亚诺 (Giuseppe Peano, 1858—1932) 的自然数公理出发, 建立整数、有理数、无理数和复数. 至今, 这本书仍被重视, 是微积分教学不

① Edmund Georg Hermann Landau. Grundlagen der Analysis. Leipzig: Akademischer Verlagsgesellschaft M. B. H., 1930. 刘绂堂, 译. 分析基础. 北京: 高等教育出版社, 1958.

可多得的补充教材. 这位在哥廷根当了 25 年数学系主任的兰道教授, 在写给学生的序言中说: “我只要求读者有逻辑思考与阅读语文的能力, 并不要求他事先懂得中学数学, 更不要求他懂得什么高等数学.” 还说, 这本书将要从 “什么是正整数 1, 2, ⋯ 开始”; 而 “定理 1, 定理 2, ⋯” 这样的词汇出现在书里, 只是标记, 比用 “淡蓝定理, 深蓝定理” 等的说法更便利引证⋯⋯. 换句话说, 正整数 1, 2, ⋯ 必须严格定义, 兰道教授的意思是学习数学要从这里开始. 像 “什么是正整数 1, 2, ⋯ ?” 这样的问题, 恰是认识数学最基本的出发点, 属于数学基础.

数学是具有高度抽象性的科学, 其特点是脱离具体的实践经验, 脱离具体的物质运动形式. 数学成果用严格逻辑结构形式表达出来, 就像上面说的《分析基础》的风格. 其实, 抽象、“脱离实际”, 正是数学的优点. 你看, 抽象的数学催生了计算机, 计算机使世界发生巨变, 应了那句话: 无用之用, 方为大用. 那么, 非数学专业的研究生, 要想成为工程领域的专家, 虽然不必严格按《分析基础》那样去修炼, 但也不宜因为过分聚焦 “中药铺” 式的实用内容, 而忽视对数学思想的领会.

非数学专业的数学基础教材中, 有很多优秀作品, 值得十分肯定. 眼下的这本《工程数学基础》新作, 有其特点, 不失为一家之言. 它以信息处理与计算机应用的工程技术专业为背景, 相信对其他工程专业的教学具有参考价值, 抑或将其置诸案头参考翻阅, 也会开卷有益.

齐东旭

2017 年 10 月 1 日

前　言

音乐能激发或抚慰人的情感, 绘画使人赏心悦目, 诗歌能动人心弦, 哲学使人聪慧, 科学可以改善生活, 而数学能做到所有这一切.

——(美国) Morris Kline

针对非数学专业的硕士研究生与博士研究生, 开设这门 “工程数学基础” 课程, 主要不是因为他们需要补充更多的数学知识. 事实上, 大学本科数学课所涉及的内容, 作为基础知识已经基本够用, 何况研究生应该具有很好的自学能力, 哪怕欠缺什么, 不过是花上几个月就补上了. 那么, 为什么开设这门课?

首先, 非数学专业 (工程领域) 的研究生, 虽然都知道数学重要, 但往往对数学心存畏惧, 尽量回避, 说明对数学的自信心不强. 其次, 能找到的工程数学基础书籍, 大多数像是本科数学课程的加细版本, 基本上是 (甚至逐章逐节地) 重复或加 “胖”. 或许这类教材基于这样的实际情况: 不少新入学的研究生, 把学过的数学忘得差不多了, 有必要温习并添加若干内容. 诚然, 有这样的书随时查一查会很方便, 但用作教材, 它往往使研究生缺乏兴趣, 觉得都学过, 提不起精神.

经验表明, 新入学的研究生, 忘掉本科学过的某些知识这件事并不可怕. 要紧的是当初就没明白过其中的内涵与真谛. 温习与补充些知识固然重要, 但知识重温与补充的目的, 要服务于对数学的理解与提高.

设想, 如果开一门这样的数学基础课程, 更侧重的是使研究生加深理解数学思想, 尽量学习数学家怎样思考问题. 那么这样的数学基础可让学生获得信心、避免教条、勇于走上创新之路, 无疑使这些未来的工程专家如虎添翼.

本书立足于如下的估计: ① 研究生对数学的再认识有迫切要求; ② 学过高等数学 (包括解析几何、线性代数、概率统计、数值分析), 并具备计算机的基本知识与操作技能; ③ 由于成长的时代环境影响, 现在的研究生思想活跃, 有较好的悟性.

在这样的前提下, 本书注重以下几点:

(1) 选择数学基本概念作为章节的标题, 以专题讲座方式出现. 不强调具体内容的系统全面, 力求围绕某一专题引申思维, 使学生感受概念的来龙去脉.

(2) 体会数学思想比学习具体数学公式更重要. 虽然作为数学课程, 必要的推导、证明是少不了的, 但那是为理解概念服务, 并非教材的重点.

(3) 力求所列章节内容适于讨论. 建议就某个内容师生互动, 教学相长, 在彼此

交流过程中共同体会数学思想与方法. 与此相应地, 阐述内容中多有夹叙夹议, 加些 “闲话”, 其作用是引起讨论的兴致.

(4) 本书命名为《工程数学基础》, 实际上主要涉及计算机应用相关领域. 本书会添加一些比较新颖的结合计算机的内容与例子, 尽量做到图文并茂. 作者限于自己专业及教学经验, 没能涉及更广泛的工程背景.

本课程建议必读如下参考书. 说 “必读”, 因为本书的宗旨与思路来源于此. 并不要求限时读完, 但建议反复体会.

首先要推荐《什么是数学》这本名著, 其副标题是 “对思想和方法的基本研究”. 领衔作者理查 · 柯朗 (Richard Courant, 1888—1972) 是二十世纪杰出的数学家. 这本书 “是为初学者也是为专家, 既是为学生也是为教师, 既是为哲学家也是为工程师而写的”. 它对整个数学中的基本概念与方法, 做了精深而生动的阐述. 有评论说 “这是一本非常完美的著作. …… 被数学家们视作科学的鲜血的一切基本思路与方法, 在《什么是数学》这本书中用最简单的例子使之清晰明了, 已经达到令人惊讶的程度.” 有来自其他数学大师、科学杂志甚至有影响的报纸评论也赞美这本书 “极为完美的著作” “太妙了! ” “一部艺术著作”……. 尽管有如此的评语, 我们还是要清醒: 数学本身是一个历史概念, 数学的内涵随着时代的变化而变化, 给数学下一个一劳永逸的定义 “什么是数学”, 这是不可能的. 要在数学不断发展的历史长河中逐渐深化我们的认识.

要推荐的另一名著是《数学: 它的内容, 方法和意义》, 该书共 20 章, 分三卷出版, 由亚历山大 · 丹尼洛维奇 · 亚历山大洛夫 (Aleksandr Danilovich Aleksandrov, 1912—1999) 牵头撰写, 大师荟萃, 以极其通俗的语言, 介绍了现代数学各个分支的内容、历史发展及其在自然科学与工程技术中的应用. 这部著作得到数学界的公认. 如果想比较具体了解某数学分支的梗概, 那么请你翻开这本书.

为了获得一种从文化大背景了解数学的视野, 推荐《古今数学思想》. 这部百万字的著作分为四册, 作者莫里斯 · 克莱因 (Morris Kline, 1908—1992), 被誉为应用数学家、数学史家、数学哲学家与应用物理学家, 是纽约大学柯朗数学研究所资深教授. 该书从 “数学是从哪里出现的” 谈起, 巴比伦、埃及、希腊 ……, 直到近代, 从中可以充分了解数学各个分支之间以及数学与其他自然科学 (尤其是力学与物理学) 的关系.《古今数学思想》这本巨著没有包括中国数学的历史, 似乎认为中国的数学对西方主流数学没有影响. 产生这种偏见也许是由于古代中国的封闭. 事实上, 诸如数学发展重要的启动性的标志 “位值制记数法” 及 “解方程” 等方面, 中国对数学的早期发展做出了杰出的贡献. 了解有关古代中国数学之光辉, 可读中国数学史的相关著作.《中国数学史大系》, 全书共计 10 卷, 400 余万字, 吴文俊院士主编, 北京师范大学出版社出版, 是一部全面论述中国传统数学历史发展的巨著.

这里还要介绍名著《具体数学: 计算机科学基础》(第二版) (图灵计算机科

学丛书, 张明尧、张凡译, 人民邮电出版社, 2013); 原作 *Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science*, 作者为 Ronald L. Graham, Donald E. Knuth 和 Oren Patashnik. Ronald L. Graham 曾任美国数学学会主席. Donald E. Knuth 更为大家所熟悉, 这位人称 "现代计算机科学的鼻祖" 的计算机界传奇人物, 在 1974 年, 年仅 36 岁时就获得了图灵奖. 他重视基础教学, 1996 年, 设立了以其名字命名的 Donald E. Knuth 奖, 授予那些为计算机科学基础做出杰出贡献的人. 《具体数学: 计算机科学基础》一书的内容与从事信息处理的专业关系密切.

保罗 · 哈尔莫斯 (Paul Halmos, 1916—2006) 的《我要作数学家》, 被列为必读参考书, 有两层含义. 其一, 哈尔莫斯做研究有这样的体会: "…… 我知道怎样做研究了. …… 对我来说例子无比重要. 我每学一个新概念, 就要寻找一些例子, 当然还有反例. 只要可能, 例子应该包括经典例子与极端例子. " 并且在他的这本书中解释道: "这种例子, 在前人的文章中, 在会议报告中, 在期刊个人谈话及彼此通信中 ……". 受哈尔莫斯见解的影响, 本书会把某些典型的例题不惜笔墨写入书中. 其二, 哈尔莫斯是数学教育家, 特别在数学论文写作方面有精辟的阐述, 包括怎样运用数学语言, 如何恰当使用数学符号等, 对研究生的写作有宝贵的指导作用.

本书的出版, 首先要感谢我的老师齐东旭教授. 齐老师于 2001 年首次在澳门科技大学资讯科技学院研究生中讲授 "高等工程数学基础" 课程, 本书参考了齐老师的教学提纲并在齐老师的关心和指导下完成. 衷心感谢齐老师的大力支持、帮助以及为本书作序.

感谢澳门科技大学第一任校长周礼杲教授, 以及副校长唐泽圣教授, 他们都来自清华大学, 是电子学专家和计算机图形学专家, 是他们倡议在澳门科技大学开设这门课程.

感谢澳门科技大学资讯科技学院和科研处给予的支持. 本书亦得到了澳门基金会项目、澳门科技大学基金项目及澳门科技发展基金项目 (048/2016/A2) 的资助.

感谢科学出版社赵彦超先生及李静科编辑提供的帮助.

本书参考了相关文献, 在此向有关作者一并表示感谢.

这里, 还要提及作者指导的博士研究生兰霆、叶奔、曹炜、陈娟娟、李爱菊、肖友清、黄秋颖和王耀民及硕士研究生袁茜茜、霍彦妏和王雨桐为本书提供了帮助, 一并表示感谢.

蔡占川

2017 年 9 月 10 日

目　　录

引: 写给学生

问题是数学的心脏.

——(美国) Paul Halmos

开课前, 请同学们做一道题. 这道题, 是一个游戏, 要在计算机上实现, 建议立即动手完成.

1970 年, 英国数学家约翰 · 何顿 · 康威 (John Horton Conway, 1937—) 设计的细胞自动机, 模拟细胞生死, 是关于生命繁衍的一个简单数学模型, 也叫作 "生命游戏"(不妨上网查一查). 假设平面上画好了方形网格, 每个小方块视为生命细胞, 若在小方块上涂色, 则认为这个细胞是活的; 不涂色, 则认为是死的. 除了边界之外, 内部任何一个细胞周围共有 8 个细胞. 生命游戏的规则是: ① 若一个细胞周围有 3 个细胞为生, 则该细胞为生. 若该细胞原先为死, 则转为生. 若原先为生, 则保持不变. ② 若一个细胞周围有 2 个细胞为生, 则该细胞的生死状态保持不变. ③ 在其他情况下, 该细胞为死, 即该细胞若原先为生, 则转为死, 若原先为死, 则保持不变.

设定网格中每个格子的初始状态后, 依据上述的游戏规则演绎生命的变化. 初始状态和迭代次数不同, 将会得到千变万化的优美图案. 无论你是否已经知悉这一游戏, 请对多种不同初始状态、不同的迭代次数、不同的网格规模, 显示图形, 并观察细胞生死演变过程.

上课之前做这道题, 就像运动员参赛前的热身. 从数学模型的建立, 到得出结果, 一边做一边思考. 思考些什么问题呢? 请自己总结!

图 1— 图 4 文后附彩图, 仅供参考.

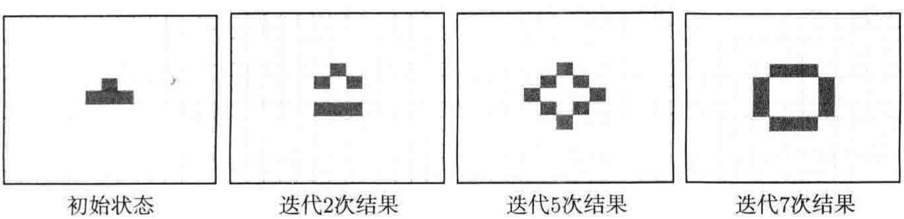

图 1 生命游戏示例 I (文后附彩图)

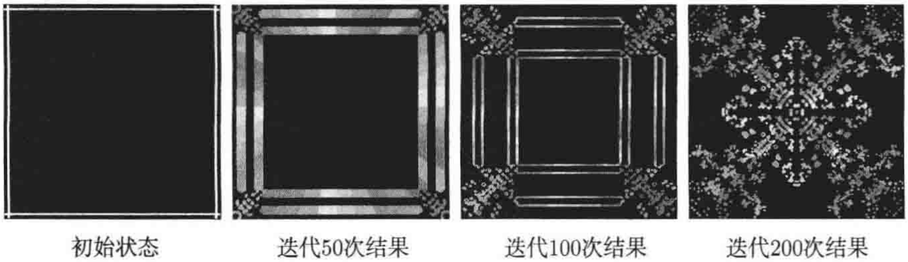

图 2　生命游戏示例 II (用计算机图形学相关算法着色) (文后附彩图)

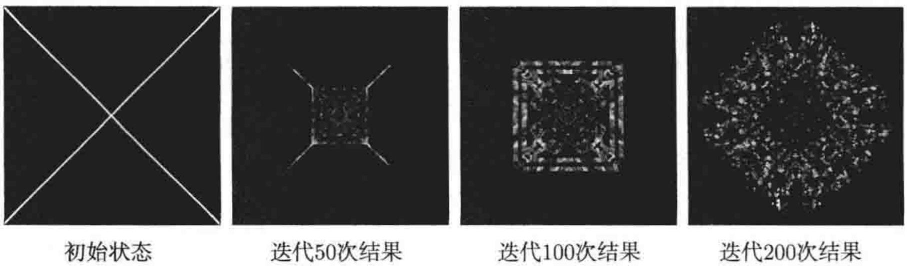

图 3　生命游戏示例 III (用计算机图形学相关算法着色) (文后附彩图)

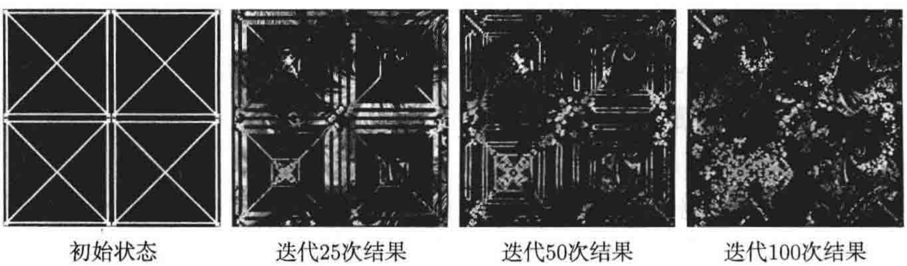

图 4　生命游戏示例 IV (用计算机图形学相关算法着色) (文后附彩图)

第 1 章　记　　数

位值制记数法是中华民族的创造, 是世界上独一无二的独特创造.

——(中国) 吴文俊

1.1　概　　观

记数采用进位制, 出现很早. 十进位的位值制记数法, 在数学发展的历史上起到基础性的重要作用. 吴文俊先生在《王者之路》①一书中指出: 数学机械化之出现于古代中国, 绝非偶然. 这里有一层通常不为人所察觉更不易为人理解的深刻原因——记数的位值制的发明.

世界各古代民族, 往往有着不同的进位制. 譬如古巴比伦用六十进位制, 古希腊与埃及用十进制, 中美洲的玛雅民族则用二十进位制. 然而, 所有这些古代民族的进位制, 都是不完全的. 真正意义重大的进位制是 "位值制" 的进位制. 而位值制记数法是中华民族的创造, 是世界上独一无二的独特创造.

所谓位值制, 说来平淡无奇, 它无非是说, 在用十个符号来表达十进制整数时, 每个符号依据它在表达式中的不同位置, 而有着不同的位值. 譬如, 写一个数 111, 这里面三个同样的 1, 由于它们的位置不同, 而自左至右, 分别代表着 100, 10 和 1 三种不同的位值.

这个平淡无奇的位值制, 看似简单, 却有意想不到的作用. 为了强调这 "意想不到", 特把吴文俊先生引用的一段评论加以重复如下:

从印度人 (吴文俊先生强调, 必须改成 "中国人") 那里, 我们学到了用十个字母来表示所有数的聪明办法. 这个聪明办法, 除了给每个符号一个绝对的值以外, 还赋予了一个位置的值, 这是一种既精致又重要的想法. 这种想法看起来如此简单, 而正因为如此简单, 我们往往并未能足够认识它的功绩. 但是, 正由于这一方法的无比简单, 以及这一方法对所有计算的无比方便, 所以我们的算术系统在所有有用的创造中成为第一流的. 至于创造这种方法是多么困难, 则只要看看下面的事实就不难理解. 这个事实是: 这一发明甚至逃过了阿基米德 (Archimedes of Syracuse, 公元前 287— 前 212) 与阿波罗尼奥斯 (Apollonius of Perga, 公元前 262— 前 190) 这样的天才, 而他们是古代两位最伟大的人物.

① 吴文俊. 王者之路——机器证明及其应用. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1999.

对位值制记数法, 吴文俊先生又说: "它的重要作用非但为一般人们所不了解, 甚至众多数学专家对它的重要性也熟视无睹. 而法国的数学家皮埃尔 - 西蒙 · 拉普拉斯 (Pierre-Simon marquis de Laplace, 1749—1827) 则独具慧眼, 提出位值制应在一切有用的发明中列于首位." 中华民族应以这一伟大的发明而自豪.

古代的中华民族, 就在位值制基础上, 产生了机械化的四则运算法则, 建立起数学大厦, 创立了富有特色的东方数学——机械化数学. 中华民族创造的位值制 (以及天元术等), 体现了古代东方数学的结构性特点. 在这样特点的基础上产生并发展的数学机械化理论, 使人类有希望逐渐实现前人的美梦. 回顾人类从迷蒙走向文明的历程, 一个具有标志性的事情就是对数的认识, 而且这个过程至今也不能认为达到完结. 在数的最初应用中, 数是充当识别标识. 在这个水平上只是将一个数与另一个数区分开来, 这些数并不进行算术运算 (就像人们怎么也不打算把伯恩斯坦的电话号码同伊丽莎白 · 泰勒的电话号码加起来——菲利普 ·J· 戴维斯 (Philip J. Davis) 语). 在稍高一点的水平上, 人们应用了正整数及其自然次序的概念, 但仍然无须对数做运算, 感兴趣的是一个数是否比另一个数大或小. 直到问 "多少" 的时候, 这才真正进入对数的全面认识阶段, 因为有了算术运算的需求. 随后, 数学中有了从简单到复杂的数系, 即正整数、负数、零、有理数、实数、复数 …… 而适应于各阶段的 "如何记数", 仍是一个基础性的问题. 想想看, 对于不能数出比自己手指头数目多的丛林人而言, 十一是个巨大的不可表达的大数, 即便到了公元前三世纪好像还没有系统的办法表示大数. 至于现代社会有了计算机, 在人们称之为进入 "大数据时代" 的背景下, 如何表示数, 包括如何表示 (存储、传输) 大数、如何表示 (存储、传输) 巨量的数, 这个 "如何记数" 的问题, 依然不能认为有了理想的解决办法.

最普通、最常见的事情, 往往因其简单、平淡, 不大会引起格外的关注. 又因其司空见惯, 不免认为这种事情理所当然, 久而久之, 人们不知不觉地认为, 世代先人延续下来的做事方式都是天经地义, 不会也不可以改变. 于是, 说一点不算题外的话: 对简单平淡、习以为常的事情, 多一些思考, 一旦有所心得, 或许不比惊涛骇浪的成功更逊色, 因为来自这种心得的发现或发明, 牵动的幅面会更广. 那么, 作为本书的开头, 就从最普通、最常见的记数法开始. 先归拢一下熟知的事实, 再讨论进一步的具体问题.

1.1.1 熟知的事实

在人们熟知的十进制记数法中, 只要采用 $0,1,2,\cdots,9$ 这十个数字符号, 就可把所有非负整数通过有限形式表示出来. 譬如, 2018 可写为

$$2018 = 2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 8\times10^0 \tag{1.1.1}$$

一般地说, 对任意非负整数 N, 可写为

$$N = n_p \times 10^p + n_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + n_1 \times 10^1 + n_0 \times 10^0 \tag{1.1.2}$$

其中 $n_p \in S = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, $p = 0, 1, 2, \cdots$. 通常情况 $n_p \neq 0$. 本章后面, 用 S 表示数字符号集合.

通常, 在十进制之下将非负整数记为

$$N = (N)_{10} = n_p n_{p-1} n_{p-2} \cdots n_1 n_0 \tag{1.1.3}$$

除了十进制, 大家还熟悉二进制. 类似地, 在二进制的情形有

$$N = (N)_2 = n_r \times 2^r + n_{r-1} \times 2^{r-1} + \cdots + n_1 \times 2^1 + n_0 \times 2^0 \tag{1.1.4}$$

或记为

$$N = (N)_2 = n_r n_{r-1} \cdots n_1 n_0 \tag{1.1.5}$$

其中 $n_r \in S = \{0, 1\}$, $r = 0, 1, 2, \cdots$. 当然, 这是全世界通用的简洁写法, 谁也不会把式 (1.1.3) 和式 (1.1.5) 右边的写法看成是连乘运算.

1.1.2　进位制系统的基

式 (1.1.2) 中的 10 和式 (1.1.4) 中的 2, 分别称为十进制和二进制系统的基. 一般地, 用字母 b 表示基, 若将任意非负整数 N 写成用 b 表达的一般形式

$$N = n_p \times b^p + n_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + n_1 \times b^1 + n_0 \times b^0 \tag{1.1.6}$$

则大于 1 的任意正整数均可作为表示非负整数的基.

实际上, 对任意非负整数 N, 总可找到 $r_0 \in S = \{0, 1, \cdots, b-1\}$ 及非负整数 N_1, 使

$$N = N_1 b + r_0 \tag{1.1.7}$$

具有这种性质的最小的数字符号集合 $S = \{0, 1, \cdots, b-1\}$ 称为模 b 的完全剩余类. 进一步, 存在非负整数 N_2 和 $r_1 \in S = \{0, 1, \cdots, b-1\}$, 使

$$N_1 = N_2 b + r_1 \tag{1.1.8}$$

如此进行下去, 经过有限步, 有 r_k 和 $r_{k-1} \in S = \{0, 1, \cdots, b-1\}$, 使

$$N_{k-1} = r_k b + r_{k-1} \tag{1.1.9}$$

依次回代得到

$$N = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \cdots + r_1 b + r_0 \tag{1.1.10}$$

或记为

$$N = (r_k r_{k-1} \cdots r_1 r_0)_b \tag{1.1.11}$$

有时简写为

$$N = r_k r_{k-1} \cdots r_1 r_0 \tag{1.1.12}$$