普通高等教育"十二五"规划教材
大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

高等数学

（上册）

主　编　王立冬　周文书

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

高等数学(上册)

主　编　王立冬　周文书

副主编　王金芝　刘　恒

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书由数学教师结合多年的教学实践经验编写而成. 本书编写过程中遵循教育教学的规律,对数学思想的讲解力求简单易懂,注重培养学生的思维方式和独立思考问题的能力. 每节后都配有相应的习题,习题的选配尽量典型多样,难度上层次分明,锻炼学生应用所学知识解决实际问题的能力及创新思维能力. 书中还对重要数学概念配备英文词汇,在相应章节后还对本章涉及的数学作了简要介绍,使学生能够了解微积分的起源,吸引学生的学习兴趣.

全书分上、下两册出版,本书为上册. 上册的主要内容包括:函数,函数的极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程等内容. 本书可供普通高等院校理工科类各专业学生使用,也可以供学生自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/王立冬,周文书主编. —北京:科学出版社,2014.8

普通高等教育"十二五"规划教材·大学高等数学类规划教材

ISBN 978-7-03-041629-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②周… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 185640 号

责任编辑:张中兴 / 责任校对:包志虹

责任印制:白 洋 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016 年 7 月第三次印刷 印张:19 1/4

字数:388 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“大学高等数学类规划教材”题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言。

徐利治

总　　序

21 世纪我国高等教育迎来了精英化教育向大众化教育转型的时代，我国高等教育的发展也开始呈现出多层次发展与多样性共存的特点，这正是现在科学技术与文化教育发展趋势的客观要求.

在新的发展形势之下，大连民族学院的数学教师们也一直在思考如何适应目前的教育形势，也一直在积极探寻教育改革的新方法，致力于为全校各个专业的学生们编写一套适应新形势的数学教材，经过十几年的努力，以丰富的教学经验做支持，学院的教师们几经修改编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计这三门课程的讲义，并且在课程建设上也取得了很好的成果，高等数学被评为省级精品课程，线性代数、概率论与数理统计被评为校级精品课程.

在讲义的基础上，经过改进和修订编写了这套大学高等数学类规划教材，这套教材不以精英教育为目标，为大众化教育提供了层次分明写作翔实的课程支持，其根本宗旨是要适应新的教育形势，满足高等院校大众化数学教育的基本要求，渗透数学素质教育的精神.

简要来说这套教材特点有以下三点：

(1) 尽可能地从教学实践经验和知识直观背景出发，提出数学问题，便于学生了解数学知识的本源和背景，体会数学思想之美.

(2) 在教材内容的安排与表述方式上，力求深入浅出，易教易学，简明使用，注重讲清楚数学的基本概念，适度的淡化理论证明，并适当反映出数学所蕴涵的文化素养给读者以数学美的熏陶.

(3) 在例题和习题的选取和安排上，本着理论联系实践的原则，多数选自生活实践和具体应用.

凡是具有生命力的教材，总是能不断地适应客观教学要求，听取读者的意见和建议进行更新和改进. 这套丛书自然也不例外，我为本书作序，诚挚希望本套教材的使用者和读者们提出相应的建议和意见，并及时与丛书主编进行沟通改进，争取出版一套适合当今大众化教育形势的精品教材.

徐利治

2009 年 8 月于大连

前　　言

高等数学是高等院校为非数学专业本科生开设的一门重要基础课程.根据不同专业的需要,该课程开设的内容和深度均有所不同.从内容和深度上看,理工类专业要求较高,其次是经济管理类专业,最后是其他文科类专业,但数学教育本质上是一种素质教育,学习数学的目的,不仅仅在于学到一些数学概念、公式和结论,更重要的是了解数学的思想方法和精神实质.在这些方面,理工类、经管类和其他文科类专业要求掌握的应该是一样的.本书是依据高等学校本科微积分课程教学基本要求专为理工类本科生编写的.在编写中我们努力体现下述特色:

1. 遵循理工类专业教育的教学规律,考虑理工类教育的特色,以“必需”、“够用”为主,加强素质培养.

2. 贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则.掌握概念要落实到使学生能用数学思想,强化应用要落实到使学生能运用所学的数学方法解决实际问题.

3. 在教学内容上注意对学生抽象概括能力,逻辑推理能力,将复杂问题归纳为简单规则和步骤的能力的培养.

4. 力求将数学思维方法与数学学习相结合,使学生能够认识、理解、运用数学思想方法,提高数学学习效果,增强学生的思维品质.

5. 对例题的选配力求典型多样,难度上层次分明,注意解题方法的总结.

6. 为了配合双语教学,给出了一些重要词汇的英语翻译.

参加编写本书的有王立冬、张友、齐淑华、王书臣、王金芝、余军、刘红梅、楚振艳、董莹、刘强、刘恒、丁淑妍、刘力军、牛大田、李阳、周晓阳、曲程远、刘延涛、葛仁东、孙雪莲、张誉铎等.

由于水平有限,书中的错误在所难免,敬请批评指正.

编　者

2014年6月

目　录

第1章 函数

Function

微积分研究的主要对象是函数. 因此,在介绍微积分之前,有必要先介绍函数的概念和有关知识. 函数的传统定义是从运动变化的观点出发,而近代定义是从集合、映射的观点出发. 这样,就不难得知函数实质是从一个非空数集到另一个非空数集的特殊映射.

1.1 函数的概念

为了准确而深刻地理解函数概念,集合知识是不可缺少的. 本章将简要地介绍集合的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数概念.

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性. 集合论的基础是由德国数学家康托尔(Cantor,1845～1918)在19世纪70年代奠定的,经过一大批杰出的数学家半个世纪的努力,到20世纪20年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位. 可以说,当今数学各个分支几乎所有的结果都构筑在严格的集合论理论上. 所以,学习高等数学,应从集合入手.

集合(set)这一概念描述如下:一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的**元素**(element). 通常用大写字母 A,B,C 等表示集合,用小写字母 a,b,c 等表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记作 $x\in E$(读作:x 属于 E);

y 不是集合 E 的元素这件事记作 $y\notin E$(读作:y 不属于 E).

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素,那么我们就说 E 是 F 的**子集合**,简称为**子集**,记作

$$E \subset F \text{（读作 } E \text{ 包含于 } F\text{），}$$

或者

$$F \supset E \text{（读作 } F \text{ 包含 } E\text{）.}$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素(即 $E \subset F$ 并且 $F \subset E$)，那么我们说集合 E 与集合 F **相等**，记作

$$E=F.$$

为了方便起见，我们引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\varnothing$. 我们还约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即

$$\varnothing \subset E.$$

2. 集合的表示方法

我们常用下面的方法来表示集合. 一种是列举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内. 例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质，即将具有性质 $p(x)$ 的元素 x 所组成的集合 A，记作

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}.$$

例如，正整数集 $\mathbf{N}$ 也可表示成

$$\mathbf{N}=\{n \mid n=1,2,3,\cdots\};$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

又如

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1, x, y \text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面单位圆周上点的集合.

全体自然数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是最常遇到的集合，我们约定分别用粗体字母 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbf{N}$　表示全体自然数的集合；

$\mathbf{Z}$　表示全体整数的集合；

$\mathbf{Q}$　表示全体有理数的集合；

$\mathbf{R}$　表示全体实数的集合；

$\mathbf{C}$　表示全体复数的集合.

我们还把非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$，显然有

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

和

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{R}_+.$$

3. 区间

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集——区间(interval). 为了书写简练,将各种区间的符号、名称、定义列表,如表1-1所示($a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$).

表1-1 区间

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开半闭区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开半闭区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

4. 邻域(neighborhood)

设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$. 数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 表示为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域的半径 δ 时,常把它表示为 $U(a)$,简称 a 的邻域.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表示为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它表示为 $\mathring{U}(a)$,简称 a 的**去心邻域**.

1.1.2 函数的概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着,这是物质世界的一个普遍规律. 17 世纪初,数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的二百多年里,这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置.

例1 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着:对于任意的 $r\in[0,\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率,是常数.

例 2 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如表 1-2 所示，对数集 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V，已知 T 与 V 的对应关系用表 1-2 来表示.

表 1-2 实测数据

温度/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
体积/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述两个实例，分属于不同的学科，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，它们有一个共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数. 于是有如下的函数概念.

定义 1 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f，对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$，按照对应关系 f，存在(记为 $\exists$)唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，则称 f 是定义在 A 上的函数(function)，表示为

$$f:A\to\mathbf{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表示为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable). 数集 A 称为函数 f 的定义域(domain)，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**(range).

根据函数定义不难看到，上述几例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明.

(1) 用符号"$f:A\to\mathbf{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确. 在本书中，为方便起见，我们约定，将"f 是定义在数集 A 上的函数"，用符号"$y=f(x),x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为"$y=f(x)$"，有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y=f(x)$有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\mid f(x)\in\mathbf{R}\}$. 例如，函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$有意义的实数 x 的集合，即闭区间

$$[-1,1]=\{x\mid \sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}.$$

具有具体实际意义的函数的定义域要受实际意义的约束. 例如，上述例 1，半径为 r 的球的体积 $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数，从抽象的角度来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数，因此它的定义域是区间$[0,\infty)$.

(3) 函数定义指出：$\forall x\in A$，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，这样的对

应就是所谓的单值对应. 反之,一个 $y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$,使 $y=f(x)$. 例如函数 $y=\sin x$. $\forall x\in\mathbf{R}$,对应唯一一个 $y=\sin x\in\mathbf{R}$,反之,对 $y=1$, 都有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R},k\in\mathbf{N}$,按照对应关系 $y=\sin x$,x 都对应 1. 即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in\mathbf{N}.$$

(4) 在函数 $y=f(x)$的定义中,要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的,这种函数也称为**单值函数**. 如果取消唯一这个要求,即对应于 x 值,可以有两个以上确定的 y 值与之对应,那么函数 $y=f(x)$称为**多值函数**. 例如,函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$是多(双)值函数.

为了讨论方便,我们总设法避免函数的多值性. 在一定条件下,多值函数可以分裂为若干**单值支**. 例如,双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$就可以分成两个单值支:一支是不小于零的 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$,另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 我们知道方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周,这同时也就是双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$的图形. 两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周. 所以只要把各个分支弄清楚,由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌. 今后如果没有特别声明,我们所讨论的都限于单值函数.

再看几个函数的例子.

例 3　$\forall x\in\mathbf{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然, $\forall x\in\mathbf{R}$,都对应唯一一个 y. 这是一个函数(图 1-1)表示为 $y=[x]$,即 $[2.5]=2$, $[3]=3$, $[0]=0$, $[-\pi]=-4$.

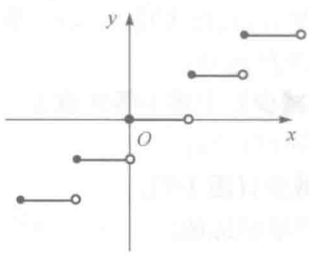


图 1-1

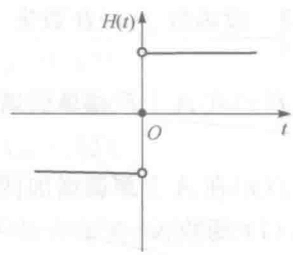


图 1-2

例 4　有一些函数具有"分段"的表达式,例如

(1) 符号函数 $H(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\text{(图 1-2)}\\ 1, & t>0;\end{cases}$

(2) $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$(图 1-3)　　(3) $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\text{(图 1-4)}\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

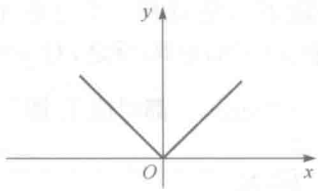


图 1-3

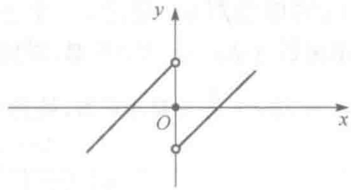


图 1-4

1.1.3 具有某种特征的函数

1. 有界性

定义 2 设函数 $f(x)$在数集 A 有定义,若函数值的集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

有界,即$\exists M>0,\forall x\in A$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 A **有界**,否则称 $f(x)$在 A **无界**. 函数 $f(x)$的有界性如图 1-5 所示.

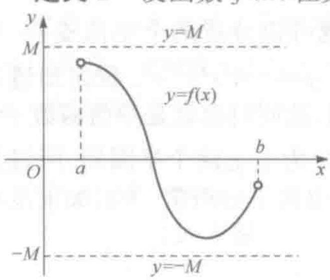


图 1-5

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,2)$上是无界的,在$[1,\infty)$ 上是有界的.

2. 单调性

定义 3 设函数 $f(x)$在数集 A 有定义,若$\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1)<f(x_2)\ \ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A 上**严格单调增加(严格单调减少)**. 上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ \ (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A 上**单调增加(图 1-6)(单调减少)(图 1-7)**.

例如,(1) 函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格增加的.

(2) 函数 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0)$内是严格减少的,在$[0,+\infty)$内是严格增加的. 因此,在$(-\infty,+\infty)$内,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若$\forall x\in A$,有$-x\in A$,且

$$f(-x)=-f(x)\ \ (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$是**奇函数(偶函数)**.

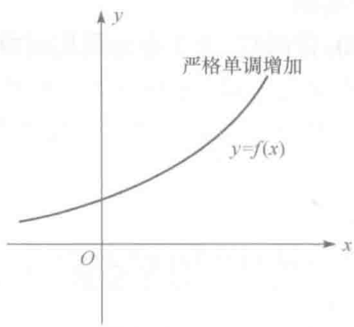


图 1-6

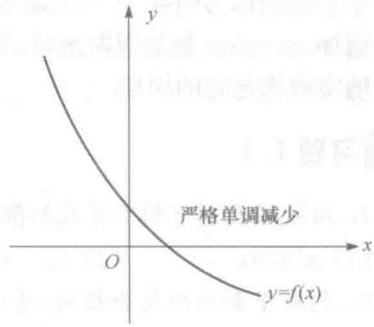


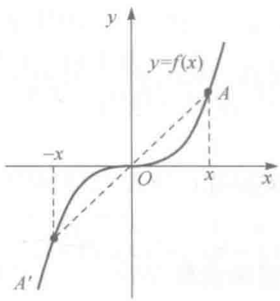
图 1-7

如果点(x_0,y_0)在奇函数$y=f(x)$的图像上，即$y_0=f(x_0)$，则

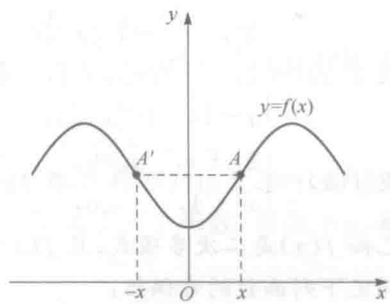
$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即$(-x_0,-y_0)$也在奇函数$y=f(x)$的图像上. 于是奇函数的图像关于原点对称.

同理可知，偶函数的图像关于y轴对称，奇偶函数图像示例如图 1-8 所示.



(a) 奇函数



(b) 偶函数

图 1-8

例如，函数$y=x^4-2x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$等皆为偶函数；函数$y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^3$，$y=x^2\sin x$皆为奇函数.

4. 周期性

定义 5 设函数$f(x)$定义在数集A，若$\exists\, l>0$，$\forall\, x\in A$，有$x\pm l\in A$，且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数$f(x)$是**周期函数**，l称为函数$f(x)$的一个周期(period).

若l是函数$f(x)$的周期，则$2l$也是它的周期. 不难用归纳法证明，若l是函数$f(x)$的周期，则$nl(n\in\mathbf{N})$也是它的周期. 若函数$f(x)$有最小的正周期，通常将这

个最小正周期称为函数 $f(x)$ 的**基本周期**,简称为**周期**.

例如,$y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π. 再如,常函数 $y=1$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期.

习题 1.1

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $x^2\leqslant 9$;　　(2) $|x-1|>1$;　　(3) $(x-1)(x+2)<0$.

2. 判断下面函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sin\sqrt{4-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\arccos\ln\dfrac{x}{10}$;　　(4) $y=\tan(x+1)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $f(3),f(2),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(x-1)+f(x+1)$.

6. 已知 $f(x)$ 是二次多项式,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,求 $f(x)$.

7. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$;　　(2) $f(x)=(x^2+x)\sin x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0,\\ e^x-1, & x>0;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

8. 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,试证:$f[f(x)]$ 为奇函数,$g[f(x)]$ 为偶函数.

9. 证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

10. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

11. 证明下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2$, $(-1,0)$;　　(2) $y=\sin x$, $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;　　(3) $y=\dfrac{x}{1+x}$,

$(-1,+\infty)$.

12. 1998 年在上海乘大众出租车的第一个 5km(包括以内)路程要付费 14.40 元,之后的每 1km(包括 1km 以内)需要付费 1.40 元,试把付费金额 C 元表达成距离 $x$km 的函数,其中 $0<x<10$.

1.2 初等函数

1.2.1 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓"中间变量"传递的方法能产生新的函数. 例如,函数

$$z=\ln y \quad 与 \quad y=x-1,$$

由"中间变量" y 的传递生成新函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里,z 是 y 的函数,y 又是 x 的函数,于是通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数. 为使函数 $z=\ln y$ 有意义,必须要求 $y>0$;为使 $y=x-1>0$,必须要求 $x>1$. 于是对函数 $z=\ln(x-1)$ 来说,必须要求 $x>1$.

定义 1 设函数 $z=f(y)$ 定义在数集 B,函数 $y=\varphi(x)$ 定义在数集 A,G 是 A 中使 $y=\varphi(x)\in B$ 的 x 的非空子集,即

$$G=\{x \mid x\in A,\varphi(x)\in B\}\neq\varnothing$$

$\forall x\in G$,按照对应关系 φ,对应唯一一个 $y\in B$,再按照对应关系 f,对应唯一一个 z,即 $\forall x\in G$ 对应唯一一个 z,于是在 G 上定义了一个函数,表为 $f\circ\varphi$,称为函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的**复合函数**,即

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)], \quad x\in G,$$

y 称为中间变量. 今后经常将函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的复合函数表示为

$$z=f[\varphi(x)], \quad x\in G.$$

例如,函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. 为使其生成复合函数,必须要求

$$y=(x-1)(2-x)\geqslant 0,$$

即

$$1\leqslant x\leqslant 2,$$

于是,$\forall x\in[1,2]$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

以上是两个函数生成的复合函数. 不难将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如,三个函数

$$u=\sqrt{z}, \quad z=\ln y, \quad y=2x+3,$$