孙凤琪 著

时滞奇异摄动不确定系统的稳定性分析与控制

科学出版社

时滞奇异摄动不确定系统的稳定性分析与控制

孙凤琪　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

控制系统要解决的一个基本问题是稳定性问题。时滞、摄动和不确定性的广泛存在，常常会使一个系统失稳失衡。因此，时滞奇异摄动不确定系统的鲁棒稳定性分析和设计问题，是控制理论研究的重要内容。本书针对现有系统研究的单一性和方法的局限性，对这类系统进行了综合性研究；构造一类新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，推导出一系列新的稳定性判据和控制器设计方法，并在 Lurie 系统以及滤波问题中进行推广和深入研究。

本书可供系统工程、信息与计算科学等相关工程应用专业的研究生、高年级本科生使用，也可为相关领域的科研人员提供理论参考。

图书在版编目(CIP)数据

时滞奇异摄动不确定系统的稳定性分析与控制/孙凤琪著. —北京：科学出版社，2018. 8

ISBN 978-7-03-058527-1

Ⅰ.①时… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①控制系统 Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 186626 号

责任编辑：裴 育 纪四稳 / 责任校对：张小霞
责任印制：张 伟 / 封面设计：蓝 正

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 8 月第一次印刷 印张：12
字数：242 000

定价：80.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

控制理论是集数学、计算机科学以及工程学于一体的交叉学科。20 世纪 50 年代，由钱学森撰写的《工程控制论》出版，开创了我国工程控制领域研究的先河，如今，许多控制理论的优秀研究成果已经居于世界领先地位，被广泛应用于实际生产中。其中，奇异摄动系统控制理论能够更加精准地对客观实际建模，被广泛投入工业实践，已跻身于现代高科技领域，具有高端的理论价值，获得了很好的社会效益，受到业内外普遍重视。

目前，侧重于时滞系统鲁棒稳定性的研究已经取得许多有意义的成果，但在理论上，时滞奇异摄动不确定综合控制系统的稳定性分析与镇定问题，还需要跟进与补充。

时域法中，如何选择适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，是用状态空间法进行系统分析与设计的关键。本书在研究总结现有理论成果的基础上，提出新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，借助 Lyapunov 稳定性理论、线性矩阵不等式技术和矩阵分析理论等，研究这类综合系统的稳定性分析和控制问题。

全书共 7 章，第 1 章是理论综述，介绍时滞奇异摄动系统的理论背景和研究现状，对稳定性分析和控制进行概述，对已有的研究方法和研究结果作归纳总结，提出存在的不足与改进方向。第 2～5 章分别针对时不变时滞奇异摄动系统、时变时滞奇异摄动系统、时滞奇异摄动不确定系统进行稳定性分析与控制；构造出一种新的依赖奇异摄动参数的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，提出基于线性矩阵不等式的稳定性分析方法、控制器设计方法和稳定界的估计方法，得到时滞相关、时滞无关的稳定性判据，以增大系统稳定界；在保性能控制中，设计一种新的二次 Lyapunov-Krasovskii 性能指标，得到闭环系统性能指标最小上界。第 6 章是理论推广与应用，列举两种系统，并运用本书理论进行深入研究。本书方法的优势在于：直接分析系统，不做任何模型变换，不依赖于系统分解和降阶技术，能够应用于标准、非标准情形。通过数值算例，与已有结果比较，证明本书方法具有很好的可行性和较小的保守性。第 7 章是总结与展望，指出针对本书的时滞奇异摄动不确定系统，鲁棒控制理论研究中需进一步探讨和解决的问题，并提出时滞奇异摄动系统的未来发展方向。

本书由吉林师范大学孙凤琪教授撰写，是继《凤琪散文集》之后，作者又一部个人专著。学术尚浅，成品犹欢；“萃时域之经典，著摄控之华章”。

在书稿整理与撰写期间，得到了韩国汉阳大学刘亦格博士的专业策划与指点；

在前期理论学习期间，得到了中国矿业大学杨春雨教授、东北大学张庆灵教授和井元伟教授，以及燕山大学马越超教授等的指导和帮助。在此向各位老师表示诚挚的谢意。

由于作者学术水平有限，书中难免存在不妥之处，诚请广大读者批评指正。

作　者

2018 年 3 月于吉林师范大学

目　录

第 1 章　时滞奇异摄动系统理论与应用综述

1.1 时滞系统

1.1.1 时滞系统概述

系统的变化趋势不仅依赖于系统当前的状态，也依赖于过去某一时刻的状态，这类系统称为时滞系统[1-5]。具体地说，时滞系统是指作用于系统上的输入信号或控制信号与在其作用下系统所产生的输出信号之间存在着时间延迟的一类控制系统[6-8]。时滞是传输时间和计算次数的直接反映，时滞产生的原因有很多，如系统变量测量、物质及信号的传递、复杂的在线分析仪、长管道进料或皮带传输以及缓慢化学反应过程等。这些因素的存在，使得时滞现象普遍存在于电子、机械、金属、化工、生命科学以及经济管理等各种实际系统之中，它是造成系统不稳定的重要原因，而且常常是导致实际控制系统品质恶化甚至不稳定的主要因素。

时滞控制(有文献称为时滞重复控制)最初是由以中野道雄为首的日本学者，利用时滞环节的记忆功能而提出的重复控制方案[8]，是一种基于时滞正反馈的控制方法。从外部表现形式来看，反映的是系统跟踪周期信号的能力。

在工业生产过程中，具有时滞特性的控制对象是非常普遍的。对象的纯滞后时间对控制系统的控制性能极为不利，不仅使系统的稳定性降低、过渡过程的特性变坏，而且往往可以使系统的性能指标下降，而且，纯滞后占整个动态过程的时间越长，控制的难度越大[9]。虽然有些情况下人们往往忽略时滞对系统性能的影响，但在通常情况下，时滞对系统的影响非常显著，这时就要充分考虑时滞对系统的影响。

时滞系统的控制问题，一直是困扰自动控制领域的一大理论难题。运动方程存在唯一性及零解的稳定性理论，之后逐渐产生 Smith 预估控制、Dahlin 算法、自适应控制、预测控制、鲁棒控制、变结构控制、智能控制及各种复合控制策略等。

从理论分析的角度来看，在连续域中，时滞系统属于无穷维系统，特征方程是一个超越方程，有无穷多个特征根；而在离散域中，时滞系统的维数随时滞的增加呈几何规律增长，这给系统的稳定性分析和控制器设计带来很大困难。对时滞系统的研究，不论从数学理论上还是在工程实际中，都是非常困难的。文献[10]～[12]所研究的系统都含有时滞项，直至目前，该领域的理论研究中仍存在许多尚未

完全解决的问题。

在不同情况下，时滞项对不同系统的影响不尽相同，有的情况下因系统的时间滞后量相对于系统的时间常数较小，对系统影响不大，在系统的设计与模型中可以将时滞略去，从而简化该控制系统的模型，以无滞后系统来代替实际的有滞后系统。但在有的情况下，时滞项会对系统产生重大的影响。例如，在化工过程的锅炉温度控制中，一个控制信号输入后，许久不见输出信号响应，这就需要考虑实际系统中的大滞后对工程系统的影响；在过程控制中，例如，输油管道中的滞后，其滞后量是时间的函数，会因季节不同，而使之成为时间的陡升曲线函数，在这种情况下，就要考虑时变滞后、无穷滞后和相关滞后对控制系统的影响；尤其在航天领域，对航天飞机或宇宙飞船的控制信号，一秒钟的时间滞后也会对航天飞机或宇宙飞船的控制大系统产生很大的影响，可能会造成不可估量的损失甚至灾难。因此，对时滞系统的研究具有广泛的应用背景和实际的理论价值。

滞后系统的基本理论主要包括稳定、镇定、鲁棒控制、保性能控制、预测控制、次优控制和最优控制等。

稳定性是控制系统的重要结构特征，也是系统能够正常运行的首要条件。镇定是通过反馈控制律的选取，使闭环系统稳定。目前，时滞系统的稳定性和镇定的研究方法主要可归结为时域法和频域法，国际上，关于时滞系统的研究成果多集中在时滞无关鲁棒镇定与鲁棒控制等方面[13-19]。

在实际系统中，出现的时滞项一般都是有界的，无穷时滞通常不会出现，时滞无关的鲁棒控制结果一般都比较保守。与时滞无关镇定相比，时滞相关镇定的研究结果较少，这是因为时滞相关镇定及鲁棒控制更精确的结果较难得到。由于镇定控制的初衷是保证闭环系统的稳定性，一般不考虑系统的动态性能，影响了它的使用效果。时滞系统的变结构控制因容易实现及其滑动模态对外部扰动有很强的自适应性等优点，近年来越来越受到人们的重视。目前，国际上见到的相关论著较少，国内学者做了一些有益的工作，得到的结果多数是时滞无关控制。时滞无关变结构控制因条件较保守，应用上受到了很大的局限性。在时滞系统的控制结构研究中，工程上常利用预估器将闭环系统的时滞部分移至环外[20-22]，从而，控制律可按无时滞系统的方法设计。然而，Smith 预估器对系统模型的精度要求较高，且一般只适用于低阶系统，并且系统模型的不精确性还可能导致系统的不稳定性。时滞系统的保性能控制由于考虑了系统的性能指标，近年来受到了人们的重视[23-29]。保性能控制的控制目标是保证性能函数收敛，这一控制效果一般优于镇定控制，但没有考虑性能的最优化问题。

最优控制是指在一定的具体条件下，选取一个控制，使系统的某些性能指标具有最优值。最优控制是现代控制理论的核心，时滞系统的最优控制一直是人们关注的热点问题之一[30,31]，但求时滞系统的精确解几乎是不可能的。更可行的方案

是用近似方法求解，即得到时滞系统的次优控制。时滞系统基于二次型性能指标的最优控制问题，通常导致一既含时滞项又含超前项的两点边值问题，求解该问题的解析解非常困难。因此，人们通过研究其数值解法，如逐次逼近法、摄动法[32-34]等，进而研究系统的次优控制律[35-37]。文献[37]给出了利用 Taylor 级数逼近线性时滞系统最优控制律的近似方法。另外，模糊控制等智能控制方法[38]也是研究时滞系统最优控制问题的有效工具之一。

1.1.2　时滞系统稳定性

稳定性是时滞控制理论中的重要问题，很多专家学者对此进行了深入研究。时滞项的存在致使时滞连续系统特征方程在本质上是超越方程而不再是代数方程，这便导致时滞系统比非时滞系统更难以整定，对其稳定性的分析也变得困难。在时滞系统稳定性分析中常用到的稳定性概念主要有 Lyapunov 意义下的稳定性、指数稳定性、α 稳定性、一致稳定性、渐近稳定性、大范围渐近稳定性、D 稳定性和鲁棒稳定性等。当考虑不确定性因素时，人们最关心的是系统的鲁棒稳定性问题，本节主要研究 Lyapunov 意义下的鲁棒稳定性。

稳定性分析方法[39-41]有无限维系统理论方法、代数系统理论方法和微分方程理论方法[42-44]。目前，研究时滞系统主要应用微分方程理论方法。

时滞系统稳定性判据主要有两类：一类是以研究系统传递函数为主的频域法；另一类是以研究系统状态方程为主的时域法，即状态空间法。频域法是最早的稳定性研究方法，它通过超越特征方程根的分布即传递函数的根的特性分析或复 Lyapunov 矩阵函数方程的解来判定稳定性，只适用于定常时滞系统，频域法难以处理含有不确定项以及参数时变的时滞系统；时域法是目前时滞系统稳定性分析和综合的主要方法，Lyapunov-Krasovskii 泛函方法（简称 L-K 方法）创立于 20 世纪 50 年代末，是目前应用最广泛的方法，但没有一般方法来构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函。因此，得到的只是一些存在条件，不能获得一般解。后来，利用 MATLAB 工具箱来求解 Riccati 方程或线性矩阵不等式（LMI），利用它们的解来构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函，使其在线性系统的稳定性分析中起着非常重要的作用，本书就是侧重这一点进行深入研究的。

近年来，Lyapunov-Krasovskii 泛函方法占据了时滞系统鲁棒性分析综合的主要部分。利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函结合 LMI 工具对时滞系统进行稳定性分析，得到的结果便于进行控制器的设计和综合，因此成为控制理论和控制工程领域研究的热点问题，得到一大批优秀成果。在这类成果中，两类充分条件备受关注。

(1) 条件独立于时滞大小，称为时滞无关（time-delay independent）条件[45-49]，此时的 Lyapunov-Krasovskii 泛函一般取为如下形式：

$$V_1(t,x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s$$

其中，$P=P^{\mathrm{T}}>0$、$Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ 为待定对称正定矩阵。

对 $V_1(t,x_t)$ 沿着系统求导并令其小于零，即得系统稳定的时滞无关矩阵不等式条件为

$$\begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P+Q & PA_d \\ * & -Q \end{bmatrix}<0$$

其中，A、A_d 是所给系统的系数矩阵，它对于矩阵变量 P、Q 是线性的，利用 MATLAB 的 LMI 工具箱进行求解，若有解，则根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论可知，系统对任意的 $t\geqslant 0$ 渐近稳定。

时滞无关条件对于小时滞系统具有较强的保守性。

(2) 与时滞大小信息有关的稳定性条件，称为时滞相关(time-delay dependent)条件，最大允许时滞上界就成为衡量时滞相关条件保守性的主要指标。自 20 世纪 90 年代开始，研究时滞相关稳定性的主要方法，是在时滞无关 Lyapunov-Krasovskii 泛函中加入二次型双积分项：

$$\begin{aligned} V(t,x_t)&=\left(x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \\ &=V_1(t,x_t)+V_2(t,x_t) \end{aligned}$$

其中，$V_2(t,x_t)$ 对时间的导数为

$$\dot{V}_2(t,x_t)=hx^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)-\int_{-h}^{0}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s$$

国际上针对时滞相关问题采用的研究方法主要是确定模型变换方法，确定模型变换方法主要是将一个具有离散时滞的系统通过牛顿-莱布尼茨公式，将其转变成一个具有分布时滞的新系统，具体有四类[35,49]。

国内外学者致力于时滞控制系统的时滞相关条件研究，减小结果的保守性是其主要努力方向，且主要采用三种方法，即交叉项界定方法、模型变换方法以及 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取。目前所得到的稳定性结果都是基于一个或多个技术的结合，Fridman 提出的描述模型变换方法结合 Moon 不等式方法[43,50]，可以得到具有较小保守性的条件。最近也出现了一些创新性的思想和方法，如韩清龙和张先明的积分不等式法、何勇的自由权矩阵法，以及新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函的选取方法等[51-53]。近年来，在稳定性分析、鲁棒控制、可靠控制、保性能控制，以及混沌控制中的时滞相关问题已引起了许多学者的关注和广泛研究，成为控制领域热点问题。本书主要侧重新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函的选取方法，以此来研究系统的稳定性。

1. 时滞控制器设计发展概况

时滞系统的特征方程有无穷多个极点，控制的难度很大。对时滞系统的控制

最早可追溯到 20 世纪 30 年代的 PID 控制。不过,控制界一般认为 $\tau/(\tau+T)$ 接近于 1 时,PID 控制便无能为力。所以,Smith 预估器被认为是时滞系统控制的第一种方法。此算法采用补偿原理,将过程的滞后环节从系统特征方程中消除,使系统经过滞后时间以后的输出响应能够任意调整。状态预估控制和过程模型控制都是借用 Smith 预估器的思想实现理想的抗干扰性能。后来,这一方法成为建立在有限 Laplace 变换基础上的有限谱配置。继 Smith 预估器之后的又一种时滞系统控制器设计方法是 Dahlin 算法。它是基于最小拍设计思想,将一阶惯性加纯滞后过程或二阶惯性加纯滞后过程设计成闭环系统传递函数为一阶惯性加纯滞后的形式。预测控制吸收了 PID 控制和最优控制的长处,克服了二者的缺点,在时滞系统的控制方面得到了广泛的应用。PID 控制、Smith 预估控制和 Dahlin 算法控制在对时滞过程的控制方面各有千秋,张卫东[54]找到了其内在联系,指出借用内模原理和 H_2/H_∞ 设计思想,PID 控制、Smith 预估控制、Dahlin 算法控制,甚至包括预测控制中的模型算法控制在传递函数意义上是一致的,它们都等价于实际 PID 控制器[46,47]。

近几年来,时滞系统的理论面临着一个转折点。上述方法仅考虑了对标称对象的控制,没有充分考虑不可避免的建模误差。在实际运用中,当扰动存在时,有时会导致不稳定。因此,从实践的角度考虑,对时滞系统的控制需要考虑鲁棒稳定性和低灵敏度问题。人们的目标开始转向鲁棒镇定控制和混合灵敏度问题,转向不确定系统保成本控制、鲁棒可靠控制、容错控制、无源控制、耗散控制以及基于鲁棒性能指标的 PID 参数自整定等问题[55,56]。

2. 保性能控制

保性能控制(guaranteed cost control)也称为保成本控制或保代价控制[57-60],是人们在寻找实现全局目标函数优化问题的有效方法时产生的,其基本思想由 Chang 和 Peng 首次提出。对于不确定系统,利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函建立一个具有上界的二次成本函数,然后依此来设计反馈控制律(保成本控制律),使得闭环系统鲁棒稳定且其成本函数不超过预先确定的上界(称为保成本值)。保性能控制问题的主要思想就是对具有参数不确定性的系统,设计一个控制律,不仅使得闭环系统稳定,而且使得闭环系统的性能指标不超过某个确定的上界。最初,保性能控制是基于以下状态方程描述的不确定系统提出的:

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)u(t),\quad x(0)=x_0$$

其中,$x(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量;$u(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入;A、B 是具有适当维数的已知常数矩阵;ΔA 和 ΔB 是适当维数的不确定性矩阵函数,表示系统模型中的参数不确定性。假设所考虑的参数不确定性是参数有界的,且具有以下形式:

$$[\Delta A\quad \Delta B]=DF(t)[E_1\quad E_2]$$

其中,D、E_1 和 E_2 是适当维数的常数矩阵,它们反映了不确定性的结构信息;$F(t)\in\mathbf{R}^{i\times j}$是一个未知矩阵,它可以是时变的,且满足如下范数有界形式:

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$$

对于上述系统,定义二次型性能指标:

$$J=\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\mathrm{d}t$$

其中,Q 和 R 是给定的对称正定权矩阵。

对于该系统和性能指标,如果存在一个控制律 $u^*(t)$ 和一个 J^*,使得对所有允许的不确定性,闭环系统是渐近稳定的,且闭环性能指标值满足 $J\leqslant J^*$,则 J^* 称为不确定系统的一个性能上界,$u^*(t)$ 称为不确定系统的一个保性能控制律。

近年来,随着不确定系统鲁棒二次整定研究的极大进展,保性能控制再次受到关注。Peterson 和 McFarlane 等[37,57]研究了不确定线性系统关于积分二次型成本函数的优化保成本控制问题,获得全局目标函数 J 的次优性。基于线性系统的保成本分析思想,Esfahani 和 Peterson、俞立等[60-63]采用 LMI 方法,对不确定线性状态时滞系统的状态反馈/输出反馈保成本控制进行了具有指导意义的探讨。然而,这些文献中,要么求解方法存在缺陷,要么所做的模型假设或初始条件假设很难满足[64,65]。因此,如何减弱条件,考虑控制时滞和关联时滞等将是不确定性时滞系统保成本控制研究中需要解决的问题。时滞系统分类如表 1.1 所示。

表 1.1 时滞系统分类

系统名称	主要特征
集中参数时滞系统	用普通的时滞微分(或差分)方程来描述
分布参数时滞系统	用偏微分方程来描述
确定性时滞系统	数学模型的各项系数是确定的
不确定性时滞系统	数学模型的各(部分)项系数可表示为确定量和不确定有界量之和的形式
随机时滞系统	数学模型的各(部分)项系数是随机的
连续时滞系统	用时滞微分方程来描述
离散时滞系统	用时滞差分方程来描述
混合时滞系统	用时滞微分、差分方程来描述
线性时滞系统	用线性时滞微分(或差分)方程来描述
非线性时滞系统	不能用线性时滞微分(或差分)方程来描述
时不变时滞系统	用常系数时滞微分(或差分)方程来描述
时变时滞系统	用变系数时滞微分(或差分)方程来描述

注:本书研究的是用时滞微分方程描述的连续线性时滞系统。

1.1.3　今后需要进一步解决的问题

(1) 目前有关时滞系统稳定性的分析结果有很多[66-68]，但是进行控制器设计时，只在个别情况下才会得到线性矩阵不等式，多数情况下得到的是多项式矩阵不等式(PMI)或双线性矩阵不等式(BMI)。如何将多项式矩阵不等式转化为线性矩阵不等式，或者在无法转化成线性矩阵不等式时，如何对其利用优化方法进行求解，是今后继续努力的方向，目前发展起来的多项式优化理论有望为这一问题提供系统化方法[69-72]。

(2) 如何得到计算复杂性低，同时保守性较小的稳定性准则是未来的努力方向。其中 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取，尤其是参数依赖的 Lyapunov-Krasovskii 泛函的选取，将对结果的保守性产生积极影响[73]，而利用二次分离原理进行稳定性分析，也为减小结果的保守性提供了思路，这方面还有大量的工作有待进行。

(3) 基于线性矩阵不等式的稳定性准则在保守性方面难以比较，至少看起来不直观。原因是线性矩阵不等式在矩阵维数、变量及变量个数方面有所不同。常用的比较是基于数值算例，理论分析较少，文献[74]～[76]在这方面做了很好的探索。进一步寻求系统化方法进行相关分析很有意义。

(4) 近年来有关时滞的讨论多数集中在线性系统，有关非线性时滞系统的讨论则较少(当然也有例外[77])，而实际系统往往是非线性的，这也是进一步努力的方向之一。

(5) 目前，时滞系统的无记忆不依赖于时滞大小的各种 H_∞ 控制器的设计已基本解决，包括状态反馈控制器设计、动态输出反馈控制器设计、基于状态观测器的动态反馈控制器设计等。其处理问题的方法已从 Riccati 方法过渡到先进的线性矩阵不等式方法。同时，不依赖于时滞的不确定系统的 H_∞ 控制方法在时滞较小时存在的保守性，以及无记忆反馈控制对于时滞较大的系统显得无能为力，因此对于时滞不确定系统，利用 LMI 技术和有记忆控制研究时滞相关型鲁棒 H_∞ 控制器的设计问题是一个具有挑战性的课题。

最简单的包含滞后的一阶线性定常系统，其特征方程是超越方程，有无穷多个特征根，所以其解空间是无穷维的。含滞后的非线性控制系统、时变系统或高阶系统则具有更加复杂的动态响应行为。因此，虽然自 18 世纪在弦振动中提出了滞后系统的概念，到今天在滞后系统的研究中发表了大量的论文，出版了多本著作，但对于滞后系统的研究方兴未艾，预计在今后很长一段时间内，滞后系统仍是科研工作者感兴趣的研究课题之一。

1.2 奇异摄动系统

1.2.1 奇异摄动系统概述

在工业生产过程和其他制造行业中，许多系统往往包含一个以上的时标，这类系统统称为奇异摄动系统。在航行、电力等许多领域的建模与控制中经常遇到一类双时标系统，奇异摄动系统就是控制领域中一类典型的动态双时标系统[78-82]。

1964 年，钱伟长教授提出了建立广义变分原理的系统性方法，奠定了中国近代力学和应用数学奇异摄动理论的基础。随着近代数学、物理学、天文学研究的快速发展，在自动控制、量子力学、气体力学、天体运动学等相关领域的研究中抽象出了一类特殊的微分方程数学模型，即最高阶导数前带有小参数的微分方程，对这类方程求解，利用经典的幂级数解法，构造其解的一致有效的渐近展开式是非常困难的，这类问题统称为摄动问题。

摄动问题分为正则摄动问题和奇异摄动问题两类形式。通常通过抑制小参数来达到降低系统维数的系统为奇异摄动系统。换句话说，一个由含有小参数 ε 的微分方程描述的问题，如果这个微分方程的阶数当 $\varepsilon=0$ 时要比 $\varepsilon\neq 0$ 时低，那么称此问题为奇异摄动问题。反之，则是正则摄动问题。

为解决这类问题，数学家和物理学家开创了伸缩坐标法、匹配渐近展开法、多重尺度法等一系列方法和技巧，并形成了应用数学的一门新的学科：摄动方法(perturbation method)。

摄动方法是处理摄动问题的控制方法，是把系统视为理想模型，视参数或结构为微小扰动的结果来研究其运动过程的数学方法。这种方法最早应用于天体力学，用来计算小天体对大天体运动的影响，后来广泛应用于物理学和力学的理论研究中[83,84]。

奇异摄动方法是研究奇异摄动理论的主要方法，早在 1904 年由 Prandtl 在流体动力学系统的边界层现象中提出并且研究。后来，Levinson 和 Tikhonov 等又做了大量工作[82-88]，直到 Vasil'eva[89] 和 Wasow[90] 将奇异摄动问题的求解在理论上最终归结为微分方程分析问题，这些工作都为系统控制领域中的奇异摄动系统模型的建立和进一步研究打下了坚实的基础。

这类系统通常是以高阶动态方程的形式出现的，一些小参数的出现通常会导致这些系统具有逐渐增加的阶数。而这些含有小参数的附加方程会使系统的数学模型有较宽的时间跨度，可能跨越一个甚至多个数量级，这个大的时间跨度通常会导致数学模型是“刚性”的。

对这类系统通常的处理方式是针对具体关心的时间尺度，完全忽略更为高频

特性的快动态，仅以主导极点所表征的低频和中频动态来近似逼近原系统。这类方法控制精度要求不高，系统运行环境较为理想，高频动态不被激发时具有较好的效果，因此直到今日一直被沿用。然而，随着控制精度要求和系统的复杂性日益提高，高频的快动态一般不能做简单的忽略处理。

在这个背景之下，许多传统的控制领域，如电力系统已经开始考虑以快慢动态兼顾的各类网络结构保留模型，这些模型的形式是典型多时标系统模型。因此，如何恰当地处理这一类较为精确的模型已经成为一个较为迫切的实际问题。这些模型之中，奇异摄动系统可以成为一类典型的多时标系统模型[91,92]。

奇异摄动法分析和设计的主要目的就是减小模型中快变量和慢变量的相互关系，降低系统维数，严格限制作为快慢变量比率的摄动小参数，使快变量相对于慢变量的动态响应趋于零。当参数比较小时，在各自的时域内求其近似的响应特性。

维数“灾难”连同“刚性”，使得对这类系统的分析和控制显得尤为困难，而奇异摄动和时标方法能够很好地降低系统维数和缓解刚性，因此是研究上述系统的主要手段。

中国力学工作者对摄动方法的发展有开创性贡献。钱伟长在 1948 年求解圆板大挠度问题时，提出现在称为合成展开法的方法；郭永怀在 1953 年把由庞加莱和莱特希尔发展起来的方法推广应用于边界层效应的黏性流问题；钱学森 1956 年又深入阐述了这个方法的重要性，并将其称为 PLK（Poincaré-Lighthill-Kuo）方法[93-95]。

对于研究摄动问题的奇异摄动系统，又分为连续和离散两种情形。而连续、离散奇异摄动系统又可分为线性的和非线性的，还有不确定线性的等。这些理论相互交错在一起，构成错综复杂的理论脉络，形成庞大的摄动理论控制体系，在当今时代，具有极其广泛的理论空间和应用价值。

1. 连续奇异摄动系统

连续奇异摄动系统（continuous systems）[96-102] 的系统模型一般表现形式如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_{11}(t)x(t)+A_{12}(t)z(t)+B_1(t)u(t)\\ \varepsilon\dot{z}(t)=A_{21}(t)x(t)+A_{22}(t)z(t)+B_2(t)u(t)\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，摄动参数 $\varepsilon\ll 1$，如果式(1.1)中各系统矩阵是时不变定常矩阵，则式(1.1)就为线性连续时不变奇异摄动系统，否则称为时变奇异摄动系统。

2. 离散奇异摄动系统

离散系统与连续系统不同，离散奇异摄动系统（discrete systems）由于采样速率的不同，往往存在多种表达形式[103-106]，常见的有以下几种差分方程形式：

$$
\begin{cases} x(k+1)=A_{11}x(k)+A_{12}z(k) \\ z(k+1)=A_{21}x(k)+A_{22}z(k) \end{cases}
\begin{cases} x(k+1)=A_{11}x(k)+(1-A_{12})z(k) \\ z(k+1)=A_{21}x(k)+A_{22}z(k) \end{cases}
\begin{cases} x(k+1)=(1+A_{11})x(k)+A_{12}z(k) \\ z(k+1)=A_{21}x(k)+A_{22}z(k) \end{cases}
\tag{1.2}
$$

目前，许多连续系统的分析方法已推广到离散情形。

1.2.2 奇异摄动系统的应用背景

近年来，时滞奇异摄动系统的分析与设计问题越来越受到人们的重视。例如，文献[107]～[113]分别讨论了时滞奇异摄动系统的可控性问题和镇定问题[114-116]，Fridman 讨论了时滞对奇异摄动系统稳定性的影响[117,118]。关于无时滞奇异摄动系统二次型最优控制的研究已有大量的研究成果[119-125]。对于时滞奇异摄动系统的优化控制问题，Glizer 等[118]给出了含小时滞的线性奇异摄动系统的 H_∞ 算法；针对奇异摄动系统组合控制律和减振控制律的近似设计方法受文献[35]中 Taylor 级数法的启发，文献[126]和[127]将更一般的正交级数方法引入时滞奇异摄动系统组合控制的近似研究，采用正交多项式方法研究时滞奇异摄动系统的组合控制律设计问题。

随着大规模的智能化生产日新月异和社会机械自动化水平的不断进步，奇异摄动系统的应用正迅速普及推广，现已逐步渗透到科研和生产生活的各个领域，如复杂系统分析、机器人控制、航天工程、过程控制、制造业和电力系统领域等。除此之外，以下几个方面也是正在广泛应用的最新范畴[128-130]：

(1) 奇异摄动方法在缓速系统中的应用；

(2) 奇异摄动方法在输电线非线性振动问题中的应用；

(3) 奇异摄动型卡尔曼滤波算法及其在互联电力系统负荷频率控制中的应用；

(4) 污水处理过程的奇异摄动模型仿真研究；

(5) 奇异摄动建模及其在飞机着陆控制中的应用。

目前，摄动系统还广泛应用于传热、力学以及网络摄像机的设计等许多实际问题中。

1.2.3 稳定性与镇定控制

1. 线性

对线性时不变奇异摄动系统，经典的稳定性分析结果由 Klimushev 于 20 世纪