



全国十大考研辅导机构“高端辅导”指定用书

考研数学 一本通

高等数学分册

Advanced
Mathematics

王博◎主编

一线名师授课底本
基础强化分层编写
公式结论推演归纳
经典例题举一反三

知识网络一目了然
考试要点全面剖析
常考题型归纳总结
精编练习巩固提高



 吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS



全国十大考研辅导机构“高端辅导”指定用书

Advanced
Mathematics

考研数学 一本通

高等数学分册

王博◎主编
毕生明 王顺◎副主编

 吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学一本通. 高等数学分册 / 王博主编. — 长春: 吉林大学出版社, 2018. 5

ISBN 978-7-5692-2182-4

I. ①考… II. ①王… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字 (2018) 第093197号

书 名 考研数学一本通. 高等数学分册

KAOYANSHUXUEYIBENTONG.GAODENGSHUXUEFENCE

作 者 王 博 主编

策划编辑 刘明明

责任编辑 邵宇彤

责任校对 赵洪波

装帧设计 中尚图

出版发行 吉林大学出版社

社 址 长春市人民大街4059号

邮政编码 130021

发行电话 0431-89580028/29/21

网 址 <http://www.jlup.com.cn>

电子邮箱 jdcbs@jlu.edu.cn

印 刷 北京盛彩捷印刷有限公司

开 本 787mm × 1092mm 1/16

印 张 30

字 数 675千字

版 次 2018年5月 第1版

印 次 2018年5月 第1次

书 号 ISBN 978-7-5692-2182-4

定 价 59.80元

版权所有 翻印必究

前言

为了帮助广大考研学子更好地复习、备考考研数学,作者对历年来的考研数学试题进行了研究,将其归纳、分类、整理。在此基础上,作者结合多年一线的教学辅导经验、按照最新《考试大纲》的要求编写了这套《考研数学一本通》系列图书。

为满足不同层次学生复习的需求,我们打破常规考研辅导书编写体系,定位于精品辅导教材,努力体现创新教学理念,提高考生的应试能力。本书特色如下:

1. 适应不同层次的考生,优化知识体系,体现因材施教、分层学习的特点

本书按考生复习备考的阶段将全书分为《基础篇》与《提高篇》两个部分。

《基础篇》供读者第一轮复习使用,尤其适合基础薄弱的同学打基础时使用。《基础篇》按照《考试大纲》要求并结合当前各高校的本科教学实际情况分若干小章节,每一讲分为知识网络图、考试要点剖析、基础过关题型、基础过关练习四个部分。

《提高篇》供读者第二轮复习使用。每一讲又分为重要概念、公式与结论,常考题型与典型例题,强化提高练习。

2. 注重基础,只有根深才能叶茂,高分才是硬道理

研究生入学考试数学每年仍侧重基本概念、基本理论、基本方法的考查,每年有相当一部分同学由于基础打得不够扎实,因此后续学习乏力,也有部分考生一味追求难题,结果本末倒置,折戟沙场。

知识网络图 可以帮助我们快速预览考试大纲所规定的考点。

考试要点剖析 对每部分考点进行详细阐释,并配有各类简单例题来帮助学生消化理解,为了学生更好地吸收知识和了解基本的解题方法,一般没有太多的综合性,易于学生上手。

重要概念、公式与结论 对考试中经常用到的定理与结论进行归纳、总结,尤其是一些间接得到的二级公式,考生若熟练掌握,考试时可以达到事半功倍的效果。

3. 题型全面,分析总结透彻,易于消化掌握

数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好《考试大纲》范围内的各类常考题型的解题思路、方法、技巧,就能以不变应万变,遇到类似题型,就能做到心中不慌。

基础过关题型 对基础阶段我们必须掌握的一些基础题型进行了归纳总结,此类题一般属于考研中难度中等偏下的一些题,但很能说明方法,综合性不强,一般不跨章节,计算量也不大,适合基础阶段理思路、做总结用。

强化提高题型 将考研中常考的题型,分门别类地进行整理,归纳出我们做题的“套路”,辅以大量例题,使用平实的语言呈现给读者,不搞华而不实的偏题、难题、怪题,力争最大程

度地接近真题,让读者真正掌握《考试大纲》规定的内容。

4. 科学合理地配置了适量习题,力争成为将知识转化为考试能力的重要桥梁

我们不提倡题海战术,做题的目的是提高成绩,而很多同学盲目做题,浪费了大量的时间和精力,我们希望大家有针对性地适量做题,关键是要总结到位,并做到熟能生巧,举一反三。

基础过关练习 学数学就必须做一定量的习题,基础阶段我们在每章节后都附了一定的练习题,用于读者衡量学习效果使用,看是否掌握了基本知识。

强化提高练习 针对常考题型、进行有针对性的训练,才能真正掌握,在实考中才会胸有成竹。否则只会形成对照答案会做,下次遇到相同题还不会的尴尬局面。

在成书过程中,作者参考了众多前辈的著作和教材,不一一列出,在此谨向有关专家和老师表示衷心感谢。

由于作者水平有限,书中一定还存在许多不足,敬请广大读者、同行、专家批评指正,书中的疑问,及部分习题解答欢迎通过新浪微博@老王考研数学进行交流,作者也会以不定期提供专题直播一直播(202024264)的形式为学生提供服务。

2018年4月

使用指导

为提升整个教学辅导的服务品质,增强学生备考的效果,现推出统一教学资料,与行业内各位师生共同分享,请认真阅读本指导

一、统一教学模式,科学规划复习

为避免不同教师授课安排不同,让学生无所适从,特统一教学资料、教学进度、教学内容、使学生听课更加系统、全面。力争达到不同老师“无缝对接”的高标准。

二、优化教学安排,课时进度统一

为方便学生听课、补课、特实行模块化教学、但不限制老师,授课老师仍可在编排的框架下进行适当的自由发挥。第一轮是复习的基础阶段,主要学习本书的《基础篇》,并对应做每章的基础习题,基础课程老师应注意控制讲课的难度和深度,关键问题要细化,必考知识点要反复重点强调,授课老师在基础阶段知识点与例题讲解的时间分配是“五五开”,应在暑假前完成该阶段学习。

第二轮是复习的强化阶段,主要学习本书的《强化篇》并对应做每章的强化突破题,强化课程老师应注意授课的技巧性与方法的实用性,难点问题要深入浅出地进行讲解,授课老师在强化阶段知识点与例题讲解的时间是“三七开”,力争在八月底完成。

总之,考研数学要想立竿见影,事半功倍,必须多方配合,授课老师、助教,班主任,学生要共同努力。具体安排如下:

基础复习阶段课时安排:(10天20次课,计80课时)

课次	对应章节	内容
第一次	第一讲 函数极限连续	函数
第二次	第一讲 函数极限连续	极限的概念性质与存在准则
第三次	第一讲 函数极限连续	极限的计算,无穷小
第四次	第一讲 函数极限连续	函数的连续与间断
第五次	第二讲 导数与微分	导数与微分的概念及计算
第六次	第三讲 中值定理与导数应用	微分中值定理
第七次	第三讲 中值定理与导数应用	洛必达法则,单调性、极值
第八次	第三讲 中值定理与导数应用	凹凸性、拐点、渐近线、曲率
第九次	第四讲 不定积分	不定积分及概念与计算
第十次	第四讲(2)第五讲 定积分	三类可积函数的积分 定积分概念与性质
第十一次	第五讲 定积分与反常积分	定积分、反常积分的计算,定积分几何应用
第十二次	第六讲 多元微分学	二元函数概念、偏导数与全微分的概念

课次	对应章节	内容
第十三次	第六讲 多元微分学	各类偏导数的计算,多元极值与最值
第十四次	第七讲 二重积分	二重积分的概念与计算
第十五次	第八讲 常微分方程	常微分方程的概念、解的性质与求解
第十六次	第九讲 无穷级数	常数项级数的概念与敛散性的判定
第十七次	第九讲 无穷级数	幂级数的概念、求和与展开
第十八次	第十讲 向量代数与空间几何	向量、直线、平面、曲面
第十九次	第十讲(2)第九讲(2)第十一讲	方向导数、梯度、傅里叶级数、三重积分
第二十次	第十一讲 多元积分	曲线、曲面积分

强化提高阶段安排(8天16次,64课时)

课次	对应章节	内容
第一次	第一讲 函数极限连续	函数概念、特性的判定,极限的概念
第二次	第一讲 函数极限连续	极限的性质、存在准则与计算
第三次	第一讲 函数极限连续	无穷小的比较,逆问题,连续与间断
第四次	第二讲 导数与微分	导数与微分的概念及计算
第五次	第三讲 一元函数积分学	不定积分
第六次	第三讲 一元函数积分学	定积分概念计算与反常积分
第七次	第四讲 一元函数微积分的应用	单调极值、凹凸拐点、面积、体积
第八次	第五讲 中值定理与证明题	各类等式与不等式证明
第九次	第六讲 多元微分学(1)	偏导数的概念与计算
第十次	第六讲(2)第七讲 二重积分(1)	多元极值 二重积分概念、性质与基本计算
第十一次	第七讲二重积分(2)第十一讲(1)	二重积分的特殊计算、综合题,三重积分
第十二次	第八讲 常微分方程(1)	各类常微分方程的求解
第十三次	第八讲(2)第九讲 无穷级数(1)	微分方程综合题,数项级数敛散性判定
第十四次	第九讲无穷级数(2)	幂级数的求和展开、傅里叶级数
第十五次	第十讲 向量代数与空间几何	向量,直线、平面
第十六次	第十一讲 多元积分学	曲线积分、曲面积分

三、课堂模式标准化,更贴近考生

课堂(三小时)	内容	说明	备注
前五分钟	温习上次课内容	为新内容做铺垫	温故知新
中间两个半小时	学习新内容	互动,把握节奏	表达方式
最后十分钟	本次重点总结	概括,浓缩精华	言简意赅
最后两分钟	布置作业	预告下次内容	注意衔接

四、关于复习建议

第一、要重视基础

基础复习阶段务必先吃透教材,搞清基本概念、搞透基本定理、搞熟基本方法,搞定基本公式,然后做有针对性的基础题的训练。有些同学,连最基本的概念都未搞清楚,就从所谓

的强化提高开始,做一些技巧性偏强的题,这样只会本末倒置。从作者十余年的辅导经验来看,那些平时喜欢问一些基本概念性的问题同学最终都比那些喜欢问超难问题的同学考得普遍要好。有相当多的基础题看似简单,但它们能帮助我们熟悉和掌握定义、定理和公式,如果把整个习题看成是高楼大厦,则这些基础题就是砖瓦,熟练掌握它们,就可随心所欲地构建高楼,就像搭积木一样。

第二、要重视计算

考研数学是一门非常重视基本运算能力考查的课程。考场上时间非常有限(3小时),3小时要处理23道题,如果计算能力不足,这门课是最有可能出现时间不够用的。考生只有熟练掌握各种基本运算,才有可能在考场上立于不败之地。为了达到这个效果,我们必须做大量计算题,本书每节精心编写了大量的习题,读者务必搞熟,搞懂,搞精。且不可一味追求难题,偏题,怪题。

第三、关于参考书——与其博览群书,不如精读一本

我们经常看到部分考生买了大量复习资料,尤其是受网络的影响“买、买、买”,但最终没有一本能够从头到尾坚持下来的,这样怎么可能会取得理想的成绩。适合自己的就是最好的。考研整体复习时间有限,找一本适合自己的参考书,踏踏实实地从头到尾去攻克它们,远比你广而不精,走马观花地去阅读大量的资料好!

切记:基础越差,要想拿高分,资料越少越好!

本书层次分明、基础强化分开编写,既适合补基础,也适合强化提高,系统钻研此书,吃透《基础篇》,搞精《强化篇》,一定都能取得好成绩!

第四、关于真题

真题是数学命题组专家们集体智慧的结晶,整体上质量普遍高于普通参考书。通过对历年真题,类型、特点、思路、方法进行系统的归纳总结,往往会取得事半功倍的效果。往届考生常说“你可以什么资料都没有,但一定不能没有真题”,可见真题的重要性。

强烈建议,真题务必要精,要熟,要做三遍!第一遍可以按照年份来做,尽量从后往前做,精做近15年即可,越近的年份价值越大。第二遍,按章节来做,总结到位,即看每一章节这些年主要出了哪些种题型,出了哪些题,每种题型的处理方式是什么?全部归纳总结出来,形成思维定势。第三遍,主要是查缺补漏。把第一、二遍不熟的重新再做一遍。

同时,郑重提醒各位考生:凡《考试大纲》规定的内容,不论是数学几,只要在真题中出现,也强烈建议考生去做,远远比你去做个30年真题来的更有效!

总之,数学根本不可怕,只要方法得当,练习充分,会提高很快。所以,各位同学在平时复习的时候一定要充满信心,被一些难题肆虐的时候,千万不要气馁,只要踏踏实实去复习,在经过一段时间的磨炼之后,你会越学越勇,最终登上理想的高峰。

但愿本书能为您的考研数学添砖加瓦!

王 博

目 录

前言	1
使用指导	1

基础篇

把中学遗忘的知识补回来	3
第一讲 函数 极限 连续	11
第二讲 导数与微分	40
第三讲 中值定理与导数的应用	54
第四讲 不定积分	80
第五讲 定积分及其应用	94
第六讲 多元函数微分学	115
第七讲 二重积分	134
第八讲 常微分方程	146
第九讲 无穷级数(仅数一、数三)	160
第十讲 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用(仅数一)	185
第十一讲 多元积分学(仅数一)	200

强化篇

第一讲 函数 极限与连续	223
第二讲 导数与微分	251
第三讲 一元函数积分学	263
第四讲 一元微积分的几何应用	292
第五讲 中值定理及证明题	306
第六讲 多元函数微分学	325
第七讲 二重积分	345
第八讲 常微分方程	361
第九讲 无穷级数(仅数一、数三)	377
第十讲 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用(仅数一)	405
第十一讲 多元积分学(仅数一)	415

把中学遗忘的知识补回来

§1 基本初等函数

基础篇

一、函数概念

1. 定义: 设 A, B 是非空数集,

2. 对应法则 $f: A \rightarrow B$, 记作 $y = f(x)$.

3. 构成: 两数集 A, B 及对应法则 f .

4. 性质: 在对应法则中, 一个 x 只能对应一个 y .

二、基本初等函数



1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 为偶函数.

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像关于 y 轴对称, $x > 0$ 时, 若 $a > 0$, 则函数 y 有最大值.

3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像关于 y 轴对称.

三、指数函数

1. 定义: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 为指数函数.

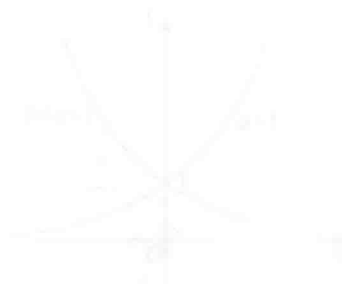
2. 性质: $a > 1$ 时, 函数 y 为增函数;

3. 性质: $0 < a < 1$ 时, 函数 y 为减函数.

4. 性质: $a > 1$ 时, 函数 y 为增函数.

5. 性质: $0 < a < 1$ 时, 函数 y 为减函数.

6. 性质: $a > 1$ 时, 函数 y 为增函数.



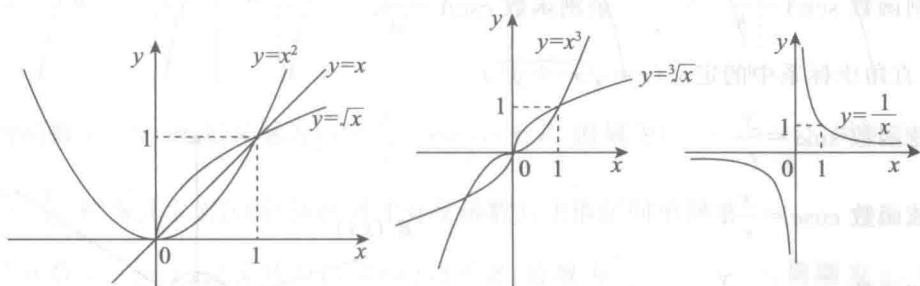
把中学遗忘的知识补回来

§ 1 基本初等函数

一、常数函数

1. $y=C$, C 为常数.
2. 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $\{C\}$.
3. 性质: 偶函数, 有界, 周期函数, 但没有最小正周期.
4. 图形: 在直角坐标系中, 平行于 x 轴的一条直线.

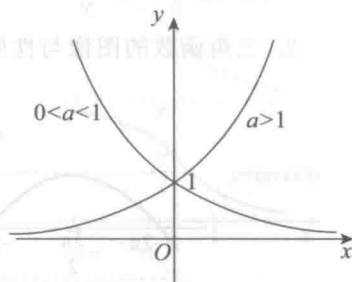
二、幂函数



1. $y=x^\alpha$, $\alpha \in R$, α 为参数.
2. 参数 α 的不同, 函数性质各不相同, $x>0$ 时, 不论 α 为何值时都有意义.
3. 图像经过 $(1,1)$ 点.

三、指数函数

1. $y=a^x$, ($a>0, a \neq 1$), a 为参数.
2. 当参数 $0<a<1$ 时, 函数单调减,
当参数 $a>1$ 时, 函数单调增.
3. 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, +\infty)$.
4. 图像经过 $(0,1)$ 点.
5. 特别注意 $y=e^x$, ($e=2.718$).



四、对数函数

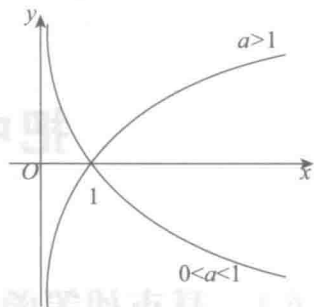
1. $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$), a 为参数.

2. 当参数 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减, 当参数 $a > 1$ 时, 函数单调增.

3. 定义域 $(0, +\infty)$, 值域 $(-\infty, +\infty)$.

4. 图像经过 $(1, 0)$ 点.

5. 特别注意: $y = \ln x$.



五、三角函数

1. 三角函数的定义

(1) 在直角三角形中 ABC

定义如下六个三角函数

正弦函数 $\sin A = \frac{a}{c}$

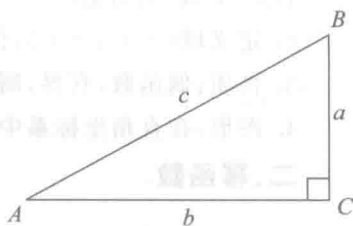
余弦函数 $\cos A = \frac{b}{c}$;

正切函数 $\tan A = \frac{a}{b}$

余切函数 $\cot A = \frac{b}{a}$;

正割函数 $\sec A = \frac{c}{b}$

余割函数 $\csc A = \frac{c}{a}$.



(2) 直角坐标系中的定义 ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

正弦函数 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

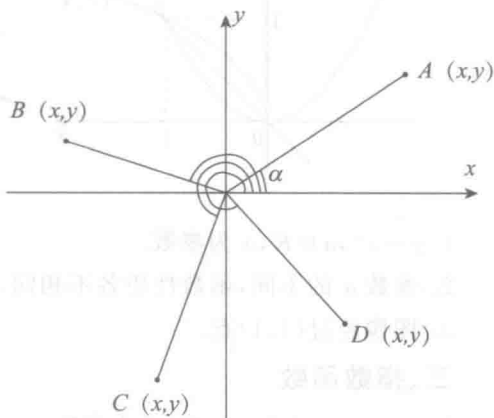
余弦函数 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;

正切函数 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

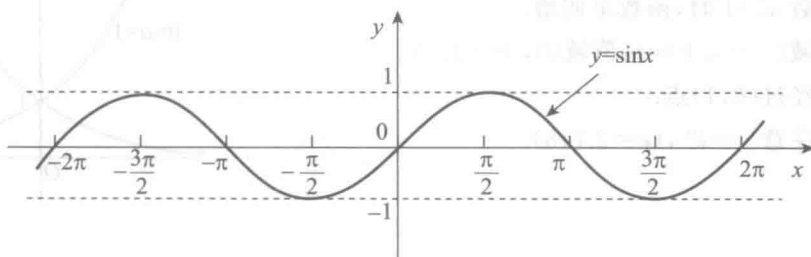
余切函数 $\cot \alpha = \frac{x}{y}$;

正割函数 $\sec \alpha = \frac{r}{x}$

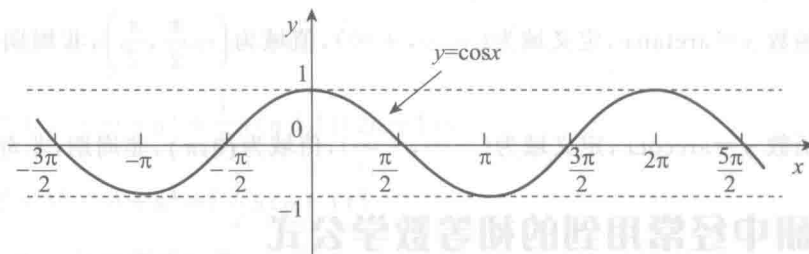
余割函数 $\csc \alpha = \frac{r}{y}$.



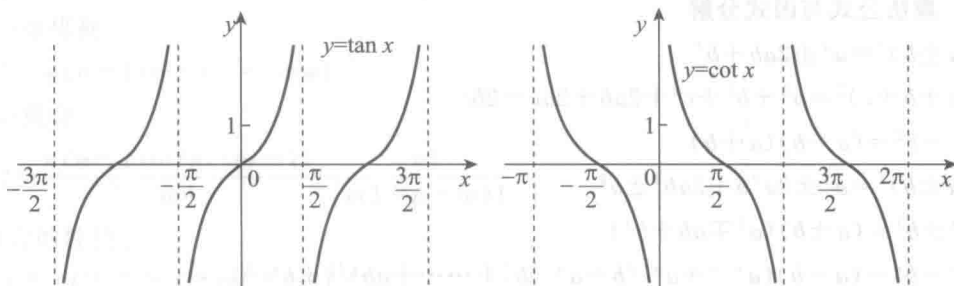
2. 三角函数的图像与性质



正弦函数 $y = \sin x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 周期为 2π , 奇函数, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 称为主值区间(该区间才有反函数), 主值区间单调增.



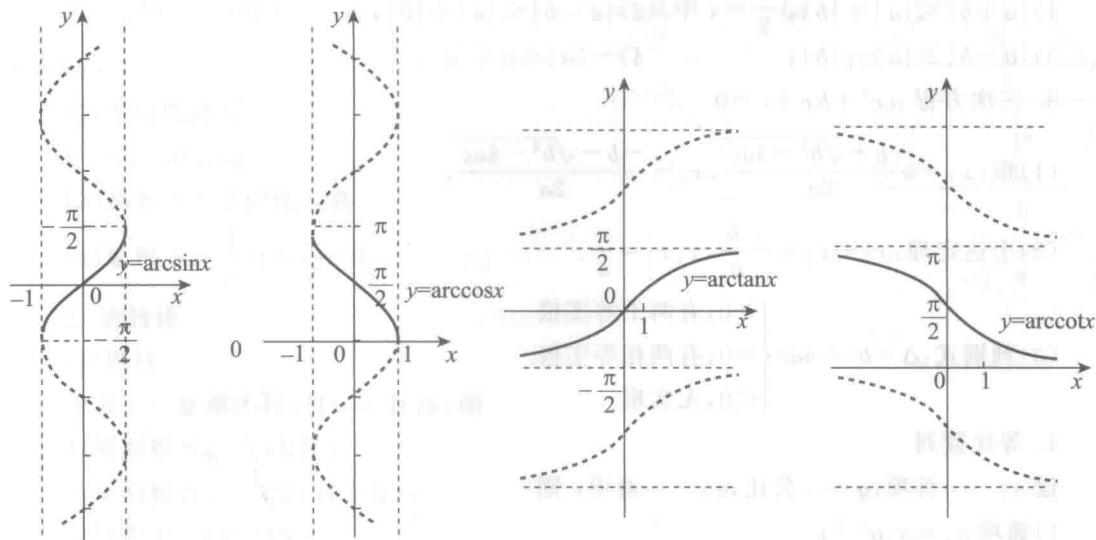
余弦函数 $y = \cos x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 周期为 2π , 偶函数, $[0, \pi]$ 称为主值区间(该区间才有反函数), 主值区间单调减.



正切函数 $y = \tan x$, 定义域为 $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π , 奇函数, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 称为主值区间(该区间才有反函数), 主值区间单调增.

余切函数 $y = \cot x$, 定义域为 $(x \neq k\pi), k \in \mathbb{Z}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 周期为 π , 奇函数, $(0, \pi)$ 称为主值区间(该区间才有反函数), 主值区间单调减.

六、反三角函数的图像与性质



反正弦函数 $y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 非周期, 奇函数, 单调增.

反余弦函数 $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 非周期, 非奇偶, 单调减.

反正切函数 $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 非周期, 奇函数, 单调增.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 非周期, 非奇偶, 单调减.

§ 2 考研中经常用到的初等数学公式

一、代数

1. 乘法公式与因式分解

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

2. 不等式

(1) 非负数的算数平均值不小于其几何平均值, 即

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

特例: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$

(2) 绝对值不等式

$$1) |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$2) |a - b| \leq |a| + |b|;$$

$$3) |a - b| \geq |a| - |b|;$$

$$4) -|a| \leq a \leq |a|.$$

3. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

$$(1) \text{根: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$(2) \text{韦达定理: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$(3) \text{判别式: } \Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, \text{ 有两不等实根} \\ = 0, \text{ 有两相等实根} \\ < 0, \text{ 无实根} \end{cases}$$

4. 等比数列

设 a_1 —— 首项, q —— 公比, a_n —— 通项, 则

$$1) \text{通项 } a_n = a_1 q^{n-1};$$

$$2) \text{前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

【注】常用的几种数列的和

$$1) 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1);$$

$$2) 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$3) 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

5. 排列、组合与二项式定理

(1) 排列

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

(2) 全排列

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(3) 组合

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质:

$$1) C_n^m = C_n^{n-m}; 2) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

(4) 二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

二、几何

1. 图形面积

(1) 任意三角形

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ 其中 } s = \frac{1}{2}(a$$

$+b+c).$

(2) 平行四边形

$$S = bh = ab\sin\phi.$$

(3) 梯形 $S = \text{中位线} \times \text{高}.$

$$(4) \text{扇形 } S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

2. 旋转体

(1) 圆柱

设 R —— 底圆半径, H —— 柱高, 则

$$1) \text{侧面积 } S_{\text{侧}} = 2\pi RH;$$

$$2) \text{全面积 } S_{\text{全}} = 2\pi R(H+R);$$

$$3) \text{体积 } V = \pi R^2 H.$$

