# 复杂环境下群体决策理论及应用

刘 芳　张卫国/著

科学出版社

# 复杂环境下群体决策理论及应用

刘　芳　张卫国　著

科　学　出　版　社
北　京

# 内 容 简 介

信息社会的快速发展给企业经营和政府事务的决策方式带来了深刻的变化，面对决策环境和决策群体的复杂性，不确定性群体决策模型和方法及其应用引起了人们极大的关注. 群体决策作为现代决策科学的一个重要组成部分，研究和涉及的内容十分广泛. 本书主要介绍了在复杂环境下决策者对备选方案进行两两比较后给出模糊偏好关系的群体决策模型和方法的最新研究成果. 主要内容包括模糊偏好关系的一致性理论及群体综合矩阵的一致性研究、混合区间数矩阵的群体决策模型、基于残缺区间数偏好关系的群体决策模型、三角模糊数偏好关系的群体决策模型、不确定性群体决策模型理论在虚拟企业伙伴选择和项目评估中的应用等. 阐述判断信息的给出、分析和集成的基本思想，通过理论分析、算法构建和应用分析，丰富和发展复杂环境下的决策理论与方法.

本书可作为高等院校管理科学、信息科学、运筹学和系统工程等相关专业高年级本科生、硕士研究生、博士研究生的教学和研讨用书，也可作为相关专业的高校教师、科研工作者、工程技术人员、企业管理人员和项目评估人员的学习及参考书.

**图书在版编目（CIP）数据**

复杂环境下群体决策理论及应用/刘芳，张卫国 著. —北京：科学出版社，2018.7

ISBN 978-7-03-057919-5

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①刘… ②张… Ⅲ. ①群体决策–研究 Ⅳ. ①C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 127853 号

责任编辑：陈会迎 / 责任校对：王晓茜

责任印制：吴兆东 / 封面设计：无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http：//www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2018 年 7 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：272 000

**定价：92.00 元**

# 前　言

日常生活中，人们往往面临着各种各样的决策，如餐后的水果是葡萄、梨还是苹果，一般来说，这些小问题借助经验或者家庭成员简单讨论就可以解决. 但如果购置一套房产或购买一辆小汽车，就没有那么简单了，人们往往会讨论房子的位置、价格、用途等方面，即使经过详尽的调查研究和讨论，家庭成员的意见也很难达成一致，尤其是当有老人和小孩参与讨论时. 另外，政府、企事业单位面临重要的外交、经营、投资等决策时，其复杂程度往往远远超出个人所能把握的范围，充满各种各样的不确定性. 因此，一个可行的决策方法能够给这些重要决策提供必要的参考和理论依据，能够帮助人们做出符合逻辑和理性的决策.

决策涉及信息的收集、分析、综合以及方案的选择，信息的准确度以及分析综合方法不同，都可能导致不同的决策方案. 对于不同的决策问题，没有一个放之四海而皆准的解决方法，不同的决策者对同样的决策问题可能给出不同的结果，但一个可行的理论框架能够为模拟这些复杂的决策问题提供支撑，为减少决策失误造成的重大损失做出重要的贡献. 美国运筹学家 Saaty 教授于 1980 年提出的层次分析法（AHP）为解决复杂问题提供了一个基本框架，其基本思想是首先把复杂问题分解成属性、子属性和备选方案等；然后对备选方案进行两两比较给出判断矩阵，通过分析得到备选方案的优先权重；最后得到方案的排序并择优. 层次分析法在得到众多研究者肯定的同时，也引起了众多学者的各种质疑，判断矩阵的一致性、备选方案的权重方法等是层次分析法研究的重要内容. 考虑到决策环境的复杂性和人类思维的局限性，决策者往往很难采用一个实数来准确表示方案的两两比较结果. 美国控制论专家 Zadeh 教授于 1965 年提出的模糊集合论为模糊信息的表示提供了理论基础，保加利亚学者 Atanassov 教授的直觉模糊集理论进一步拓展了模糊集合论，1982 年波兰科学院院士 Pawlak 教授提出的粗糙集理论为不确定性和不完全性信息的表示提供了理论框架. 这些理论工具均可以看成信息粒的一种具体表现形式. 近年来，基于信息粒概念的计算、分析和应用获得了众多学者的关注. 由此可见，虽然决策是一件非常困难的工作，尤其是面对一个复杂问题时，但人们一直在为科学决策不断努力.

本书以决策信息的表示、分析为基本出发点，结合层次分析法和模糊集合论，深入浅出地介绍判断矩阵的一致性、群体决策模型及其应用的研究成果，主要内容如下：

第 1 章首先介绍层次分析法、模糊集理论的基本思想、基本概念及存在的各种争议；其次介绍群体决策中信息的综合方法，复杂环境下群体决策研究的国内外进展.

第 2 章主要介绍偏好矩阵的一致性理论，从经典的实互反判断矩阵的一致性出发，提出判断信息一致性的公理化特征，指出模糊判断矩阵在本质上是不一致的，并提出区间数积型互反判断矩阵和区间数加型互反判断矩阵的近似一致性新概念.

第 3 章主要介绍群体综合矩阵的一致性分析初步研究成果，证明综合判断矩阵的满意一致性的一个重要结论，给出综合区间数互反、互补判断矩阵的满意一致性、近似一致性等的充分条件.

第 4 章主要介绍非协调区间信息的群体决策方法，给出区间互反判断矩阵的转化公式，并研究它们的性质，提出新的决策模型.

第 5 章主要介绍基于非完全区间数偏好信息的群体决策方法，提出残缺信息补全的数学规划模型，建立新的 IOWP 算法.

第 6 章主要介绍基于三角模糊数判断矩阵的群体决策方法，提出基于三角模糊数近似一致性的新概念，给出新的群体决策模型.

第 7 章主要研究虚拟企业伙伴选择的决策方法.

第 8 章主要研究科研项目评估的决策方法.

第 9 章是结论与展望，对本书获得的结论进行综述并提出值得进一步研究的科学问题.

值本书出版之际，衷心感谢西安交通大学管理学院席酉民教授及其团队给予的热情帮助，有关研究得到国家自然科学基金项目（71571054、71201037）、广西杰出青年科学基金项目（2016GXNSFFA380004）和广西高等学校高水平创新团队及卓越学者计划的支持，在此特向国家自然科学基金委员会、广西壮族自治区教育厅和广西壮族自治区科学技术厅表示衷心感谢. 本书还得到了广西大学各级领导的大力支持和研究生的协助，在此表示衷心的感谢.

本书有许多值得进一步思考、研究或不足之处，敬请读者不吝赐教.

作　者

2017 年 10 月

# 目　录

# 第1章 绪 论

## 1.1 引 言

决策是人类的一项重要活动，人类的历史，在一定意义上说就是一部求生存和求发展的决策历史. 决策是人们对事物的评价与选择，即人们为了达到某种目的或者完成某种任务而进行的有意识、有选择的行动过程. 决策分析是一门基于目标和决策者（desion maker，DM）偏好的设计，或者选择最佳目标的科学和艺术[1]. 其相关理论和方法建立在人类认识活动的基础上，反映了人们分析和处理事物的思辨过程. 在我国，决策古已有之，战略决策有如三国时期诸葛亮的“隆中对”，预言三分天下；明朝皇帝朱元璋采纳“广积粮、高筑墙、缓称王”的建议，创立了明王朝. 从古至今，在我国政治社会生活中的各种决策，往往是讨论、讨论再讨论，然后由家长或者领导做出决定. 在社会环境相对简单的工业社会以前，这样的决策方法往往显得很有效率. 然而，随着经济社会的发展所导致的复杂性不断增强，这种决策方法逐步显得盲目且失去可行性. 另外，不同国家的决策方法也有所不同，例如，一位日本高级公务员在谈到日本的决策过程时说：“在日本，每一个决定都要达到共识. 在日本政府中，很多决策最初由官员提出，他们的建议经过许多讨论，其中内阁只是最后一个. 即使内阁讨论中，如果有人不理解，讨论可以持续几个小时. 最后，首相说，这是共识. 他也不是很精确. 但是，执行可以与这种不精确的共识相一致，并且每一个人感觉到他对正在做的事有一定发言权. 其结果是，在日本，做出的决策是平庸的，但是执行是非常出色的.”[2] 因此，在日本的政府决策中是讨论、讨论再讨论，然后达到协调一致. 由此可知，决策是一件非常困难的活动，正如 Zeleny 在其专著 *Multiple Criteria Decision Making* 中说的[3]：“决策最终是最困难的（也是最有价值的）的活动，因为任何合理的、丰富的模型将返回多个标准，迫使我们不仅在可能的行动路线中选择，而且在评估此类行为的手段中选择.”正确决策面临诸多的困难，受各种预测和控制欲望的驱使，决策在经济社会生活中不以人的意志为转移，大量客观存在，需要人们积极面对和处理. 因此，给出一个恰当的决策方法显得非常重要. 在现实生活中，决策者往往面临着一个个复杂的系统，在这个复杂的系统中，各种因素如资源、需求、支出、目标及不同类型的人相互影响，为处理这样的复杂决策问题，Saaty 建立了层次分析法（analytic hierarchy process，AHP）[2]. 利用层次分析法，

需要决策者把复杂问题用一个层次结构模拟，再通过在一定标度系统下把各种重要的因素进行量化，根据权重确定方法给出目标的权重，最终形成对象的优先排序并做出决策. 层次分析法自提出以来，就受到了各国学者的广泛关注和应用[4]. 然而，由于经济社会环境和政治的不确定性，实际决策中能否恰当地对各种主要因素进行量化并给出对象的优先权重，Saaty 的层次分析法也受到一些学者的质疑和讨论[5]. 此外，考虑到有些问题不能像层次分析法那样进行层次化，这是因为高层次元素和低层次元素之间相互依赖和反馈，所以 Saaty 进一步提出了层次网络法[6]，这是层次分析法的一般化. 进一步，考虑到决策环境是随着时间的推移而不断变化的，Saaty 进一步提出了动态层次分析法和动态层次网络法，研究与时间有关的决策问题[7]. 随着信息技术和网络技术的发展，基于网络的决策理论和方法，以及决策支持系统的研究和开发，已经获得了众多研究者的关注，并将继续完善和发展[8].

"管理就是决策"突出了决策在现代管理中的核心地位，这是 1978 年诺贝尔经济学奖获得者、美国著名经济与管理学家西蒙（H. A. Simon）提出的. "千军易买，一将难求"也显示了决策的作用. 决策是人类的天职，一般人都擅长做决策，有些人会根据自己的喜好和目标做出认为更恰当的决策. 在一些极端情形如战争、紧急事件、自然灾害等需要短时间内必须做出决策的事情，人们的决策方法似乎变得非常简单，那就是不惜一切代价地去赢、去生存. 人们的目标趋向于利益最大化、时间最少化或者资源利用最大化等. 基于这些极端条件，第二次世界大战以来的运筹研究和管理科学主要研究国防战术问题，强调效率的工业化分析等. 直到现在，极端情形下的管理应急研究仍然显得非常重要. 在这些决策过程中，往往忽略了人的存在. 人作为决策的主体，有其自身的局限性，人类思维的模糊性和知识能力的不全面导致的不确定性，需要新的理论思考. 20 世纪 60 年代，美国加利福尼亚大学控制论专家扎德（Zadeh）教授分析了社会科学技术发展过程中所面临的一个十分突出的矛盾，即模糊性与精确性的对立，并且提出了模糊集理论[9]. 模糊集理论使数学的理论与应用研究范围从精确问题拓展到含有模糊现象的领域，是解决复杂大系统问题的有力工具之一. 到 1986 年世界上第一块基于模糊逻辑的人工智能芯片在著名的贝尔实验室研究出来，其间仅经历了短短的 20 年，这足以说明模糊集理论具有强大的生命力. 目前，模糊集理论成为处理人工智能的一个不可缺少的工具，是有效处理不确定性的决策方法之一. 模糊集理论的核心思想是，把取值为 0 和 1 的特征函数扩展到可在闭区间[0, 1]中取任何值的隶属函数. 基于模糊集的决策理论与方法已经获得了众多的研究成果[10-12]. 然而，一个现实问题——如何确定模糊集的隶属函数，成为一个亟待解决的公开问题，并且与概率论的区别和联系引起了人们广泛的兴趣[13]. 除此之外，由于人类固有的认知缺陷，对

某些事物的认知往往表现出一定程度的缺乏，于是在决策过程中表现出犹豫不决的情形，Zadeh 的模糊集理论被推广到考虑隶属度、非隶属度和犹豫度的直觉模糊集理论[14]. 此外，人们在做决策时，所面临处理的信息形式是多种多样的，如语言模糊信息等. 因此，基于不同信息表达的决策理论与方法同样引起了众多专家学者的关注[15]，基于处理各种不完备信息的粗糙集理论的决策方法也已经引起了众多学者的兴趣[16].

“三个臭皮匠顶个诸葛亮”，在实际决策过程中，单个决策者很难把握决策问题的各个方面，多个决策者同时参与决策的情况越来越常见. 在对某一类对象进行选择行为的决策判断过程中，由于个人经验、价值观和知识结构等诸多因素的差异，人们对选择对象的偏好往往存在一定程度的差别，所以需要通过某种机制以形成群体的最终决策结果. 群体决策就是在一定的决策准则下将群体各成员的偏好集结成单一的群体偏好的过程. 显然，群体决策可以兼顾多方面的利益，克服决策个体的知识经验、能力和信息等方面的不足，是人类社会活动的基本决策形式. 群体决策理论和方法主要涉及群体决策公理、群体行为理论、群体决策方法和群体决策支持系统开发等研究分支，在政治、经济、文化和军事等各个领域的管理活动中有很重要的应用，对金融决策、投资决策、管理决策、军事决策等实际决策问题均有重要的指导意义. 本书将以提出基于模糊偏好关系的一系列群体决策方法为研究目标，以虚拟企业的伙伴选择和科研项目评估为应用背景，以个体一致性和群体一致性研究为核心，研究区间数积型互反判断矩阵和区间数加型互反判断矩阵之间的转化关系，基于模糊偏好关系的一致性建立残缺信息估计的最优化模型等. 建立以公理化性质为基础的偏好信息一致性理论，研究成果将丰富和完善模糊层次分析法，丰富群体决策理论与方法，为决策者提供理论依据和应用实例.

## 1.2 层次分析法简介

层次分析法是美国运筹学家 Saaty 教授于 20 世纪 80 年代创立的[2]. 简单来说，层次分析法是一种基于相对度量的理论与方法. 相对度量意味着人们不关心事物的具体量是多少，而关心两两比较的比例是多少. 例如，为了比较两个苹果的重量，人们往往希望知道这两个苹果的重量具体是多少，这样自然就能够知道哪个苹果重，哪个苹果轻. 方便起见，不妨设两个苹果的重量用实数对（3, 4）表示. 而在相对度量意义下，实数对（3, 4）没有具体度量的意义，而表示第一个苹果的重量是第二个苹果的 3/4，或者第一个苹果的重量与第二个苹果的重量之比是 3∶4. 层次分析法是一种定性与定量相结合的多目标决策方法，其本质是把一个复杂决策问题分解成目标层、准则层、子准则层和备选方案层等层次结构，试图使人的

思维条理化、层次化，充分利用人的经验、知识和获得的信息，通过对备选方案的两两比较，在相对度量下对判断信息进行量化，构成判断矩阵，进而求出备选方案的优先权重，并对决策方案进行优劣排序.

层次分析法解决决策问题的主要步骤如下：

（1）建立问题的递阶层次结构；

（2）构造两两比较的判断矩阵；

（3）进行层次单排序，并对判断矩阵进行一致性检验；

（4）进行层次总排序，并对判断矩阵进行一致性检验.

一致性检验是层次分析法研究的重要内容之一，人们自然要问什么是判断矩阵的一致性呢？例如，要比较 $A$、$B$、$C$ 三个备选方案，在相对度量下专家给出的判断是 $A=2B$ 和 $B=3C$，若在比较 $A$ 和 $C$ 时给出 $A=6C$，则说明专家的判断是一致的，若给出的判断为 $A\neq 6C$，则表明专家的判断不一致. 因此，专家判断信息的一致性表征了专家判断逻辑的严格一致性. 从而，由判断信息构造的矩阵的一致性表示专家判断的逻辑一致性，是得到符合严格逻辑的决策结果的基础. 然而，在现实生活中，由于问题的复杂性，备选方案越多，专家不能给出完全一致判断矩阵的可能性越大. 因此，层次分析法允许判断矩阵在一定程度上偏离一致性判断矩阵.

下面首先给出互反判断矩阵及其一致性的定义. 假设专家针对决策方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中的备选方案进行两两比较，给出的判断信息 $a_{ij}$ 表示方案 $x_i$ 相对于 $x_j$ 的优先程度，且满足积型互反性 $a_{ij}\cdot a_{ji}=1$，则由这些判断信息构成一个实积型互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 进一步，Saaty 建议采用 1～9 标度进行判断，当 $a_{ij}=9$ 时，表示 $x_i$ 绝对优于 $x_j$；当 $a_{ij}=1$ 时，表示 $x_i$ 和 $x_j$ 具有相同的重要程度；当 $a_{ij}=1/9$ 时，表示 $x_i$ 绝对劣于 $x_j$. Saaty 关于一致性互反判断矩阵的定义如下[2].

**定义 1.1** 如果实积型互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$，$\forall i,j,k=1,2,\cdots,n$，则称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一致的.

从以上定义可以看出，如果实积型互反判断矩阵是一致的，则有关系 $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$，表明一致性条件下，判断信息可以通过间接计算得到. 当 $i=j$ 时，有 $a_{ik}\cdot a_{ki}=1$，因此有积型互反性成立. 反之，则不能由积型互反性推出一致性条件. 一致性是一种严格的传递性，表征了人们追求完美的心理需求. 但在实际的判断中，由于问题的复杂性和人类思维的局限性，往往给不出具有一致性的判断矩阵，Saaty 进一步提出了刻画一致性偏离程度的不一致性指标[2]，即

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{1.1}$$

其中，$\lambda_{\max}$ 和 $n$ 分别为矩阵 $A$ 的最大特征值和维数. 式（1.1）建立在严格的数学分析基础上，当判断矩阵 $A$ 一致时，其最大特征值为 $n$. 显然，$\lambda_{\max}$ 越靠近 $n$，CI 越接近零，表明给出的判断矩阵一致性程度越高. 另外，既然人们往往给出不一致性矩阵，自然要问这种不一致性的程度如何. 通过统计分析，人们给出的判断矩阵的不一致性程度采用一个平均的指标因子 RI 来刻画，如表 1.1 所示.

**表 1.1 随机产生的判断矩阵平均不一致性指标[2]**

| 矩阵维数 $n$ | RI | 矩阵维数 $n$ | RI |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 8 | 1.41 |
| 2 | 0 | 9 | 1.46 |
| 3 | 0.52 | 10 | 1.49 |
| 4 | 0.89 | 11 | 1.52 |
| 5 | 1.12 | 12 | 1.54 |
| 6 | 1.26 | 13 | 1.56 |
| 7 | 1.36 | 14 | 1.58 |

进一步，Saaty 引进一致性比率量化判断矩阵的不一致性程度，即

$$\mathrm{CR} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}} \tag{1.2}$$

当 $\mathrm{CR} \leqslant 0.1$ 时，该判断矩阵被认为是满意一致的；而当 $\mathrm{CR} > 0.1$ 时，判断矩阵是不满意一致的，有必要通过某种一致性修正方法对矩阵进行修改以达到满意一致性.

为方便起见，下面介绍文献[17]中积型互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的一致性修正方法. 首先给出下列定理.

**定理 1.1** 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正数积型互反判断矩阵，$\lambda_{\max}$ 是其最大特征值，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量. 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，其中

$$b_{ij} = a_{ij}^{\lambda}\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1-\lambda}, \quad i,j=1,2,\cdots,n;\ 0<\lambda<1 \tag{1.3}$$

又令 $\mu_{\max}$ 是矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的最大特征值，则有 $\mu_{\max} \leqslant \lambda_{\max}$，当且仅当矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 一致时等号成立.

定理 1.1 表明，选取适当的参数 $\lambda$ 可以构造新的矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 使得其一致性

比率 CR ≤ 0.1. 也可以选取某个参数 $\lambda$，通过如下迭代算法构造矩阵 $A^k=(a_{ij}^k)_{n\times n}$ 使得其是满意的：

$$a_{ij}^{k+1}=(a_{ij}^k)^{\lambda}\left(\frac{w_i^k}{w_j^k}\right)^{1-\lambda},\quad i,j=1,2,\cdots,n;\ 0<\lambda<1 \tag{1.4}$$

文献[17]已经证明以上迭代算法是收敛的.

采用层次分析法如何选择最优的备选方案呢？这就是层次分析法的另外一个重要问题：备选方案的优先权重及其求法. 什么是优先权重呢？通常情况下，决策过程中往往要求专家针对一组备选方案打分，分值越高说明备选方案越好. 换句话说，对于一组备选方案 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，若决策者给出的权重向量是 $w=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，其中 $w_i$ 为专家赋予备选方案 $x_i$ 的分值，当且仅当 $w_i>w_j$ 时，备选方案 $x_i$ 优于备选方案 $x_j$，记为 $x_i\succ x_j$. 如有 $w=\{0.1,0.4,0.3,0.2\}$，则得到备选方案的排序为 $x_2\succ x_3\succ x_4\succ x_1$. 基于层次分析法，专家对备选方案进行两两比较，给出的是积型互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，为了得到备选方案的排序，则需建立判断矩阵和备选方案优先权重之间的关系. 根据 Saaty 的理论[2]，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中每一个元素近似于优先权重的比值：

$$a_{ij}\approx\frac{w_i}{w_j},\quad \forall i,j=1,2,\cdots,n \tag{1.5}$$

因此，判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以改写为如下形式：

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

进一步，如何通过判断矩阵获得方案的优先权重呢？这是层次分析法必须回答的一个重要问题，直接影响决策方案的选择. 在经典的层次分析法中，权重的确定方法普遍采用的有特征值法、几何平均值法、线性规划模型等[2, 18, 19]. 当判断矩阵一致时，通过任何方法所获得的权重是相同的. 当矩阵满意一致时，通过不同的权重确定方法应当保证方案的排序不变. 从线性代数的角度来看，有

$$Aw^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}=nw^{\mathrm{T}} \tag{1.7}$$

这表明向量 $w^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A$ 关于 $n$ 的特征向量. 当 $A$ 是一致性判断矩阵时，$A$ 的最大特征值对应的特征向量即备选方案的优先权重；当 $A$ 不一致时，$A$ 的最大特征值

对应的特征向量近似于备选方案的优先权重，特征值法被 Saaty 认为是最为可行的权重确定方法. 其次，根据几何平均值法[18]，备选方案的权重计算如下：

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n}} \tag{1.8}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$. 当 $a_{ij}=w_i/w_j$，即判断矩阵 $A$ 一致时，根据几何平均值法即式（1.8）所得到的权重和特征值法得到的权重相同.

前面的介绍只是考虑决策者对备选方案的直接估计并给出判断矩阵的情形，并没有考虑影响决策的多种因素的情形. 在实际问题中，决策者可能面临多个判断准则，例如，要选择一个旅游地点，人们往往会考虑天气、风景、人文等各种因素，针对不同的备选旅游地点，决策者都会根据所考虑的几个方面做出判断并给出判断矩阵，然后对这些判断进行综合，最后得到备选旅游地点的优先权重并择优. 一般地，假设有 $m$ 个判断准则 $\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 和 $n$ 个备选方案 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，形成如图 1.1 所示的层次结构.

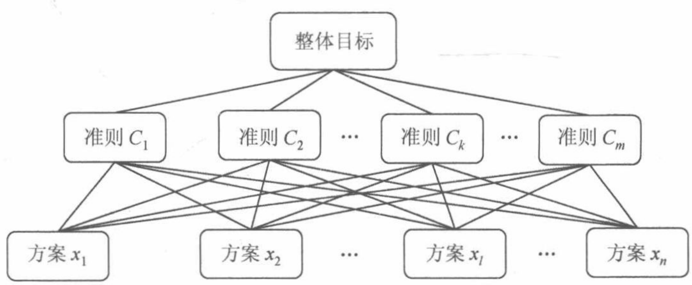


图 1.1 层次结构

准则之间以整体目标为判断依据构成一个矩阵 $A_c$，从中得到准则的权重向量：

$$w_c = \{w_1^c, w_2^c, \cdots, w_m^c\} \tag{1.9}$$

根据每一个判断准则 $C_k$，备选方案之间两两比较得到一族矩阵 $A_x^{(k)}$，获得一族权重向量：

$$w_x^{(k)} = \{w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \cdots, w_n^{(k)}\} \tag{1.10}$$

综合式（1.9）和式（1.10）权重得到备选方案 $x_i$ 的权重为

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} w_k^c w_i^k \tag{1.11}$$

最后根据式（1.11）对备选方案进行排序并择优.

层次分析法的研究与应用受到了人们的广泛关注，判断矩阵的一致性修正方法、不一致性指标、权重确定方法、标度的选择及其各种拓展研究均取得了丰富的成果. 也许正如莎士比亚说的“闪光的不都是金子”，层次分析法也遭受来自多个方面的质疑，如排序反转问题的争论，也就是说当增加或减少准则、备选方案时，即使给出的矩阵都是一致的，原有的或保留的备选方案的排序也会发生改变. 但层次分析法同样得到众多的应用和研究，生活仍将继续，新的方法和思想将永不枯竭. 本书将继续研究判断矩阵的一致性、不一致性指标以及基于模糊集合论的决策理论与方法的拓展.

## 1.3 模糊集理论基础

1965 年，美国控制论专家 Zadeh 教授发表了关于模糊集的开创性论文[9]，自此，模糊集理论及其在多属性决策理论中的应用研究获得了蓬勃发展[20, 21]. 模糊集的核心思想是把经典集合的特征函数进行推广，把取值为 0 和 1 的两个值，推广到一般性的区间[0, 1]上，并把特征函数改为隶属函数，表示一个元素隶属于模糊子集的程度. 把经典的“是”和“非”这个二元值变成一个具有某种程度的无限种取值的程度值. 设论域为$U$，$x$表示$U$中的任意一个元素，则$U$的一个模糊子集定义如下.

**定义 1.2** 设在论域$U$上给定映射$\mu$，使得

$$\mu\colon\ x\in U\to \mu(x)\in[0,1]$$

则称$\mu$为隶属函数，也称$\mu$为$U$上的一个模糊子集，简称模糊集.

进一步，把论域$U$上的全体模糊子集构成的集合称为$U$的模糊幂集，记为$\Re(U)$. 模糊集中最重要的两个基本定理是分解定理和扩展原理，它们是沟通普通集合与模糊集之间关系的桥梁. 任何模糊数学的问题都可以通过分解定理转化为普通集合论的问题来处理，而扩展原理则把普通集合论中的方法扩展到模糊集中. 因此，从概念上讲，模糊数学是精确数学的推广和发展. 但从方法论上，模糊数学又是使用了传统的普通集合论的方法. 模糊集与普通集合的关系通过定义下列$\alpha$截集来实现.

**定义 1.3** 设模糊集$\mu\in\Re(U)$，对于任意$\alpha\in[0,1]$，定义$\mu$上的$\alpha$截集为

$$\mu_\alpha=\{x\mid \mu(x)\geqslant\alpha\}$$

$\alpha$称为置信水平或者置信度.

显然，$\mu$上的$\alpha$截集$\mu_\alpha$是一个普通集合，它的元素由所有隶属度大于或等于$\alpha$的元素组成. 为了引进分解定理，首先定义模糊集和数乘法运算.

**定义 1.4** 设模糊集$\mu\in\Re(U)$，对于任意$\lambda\in[0,1]$，规定$\lambda\mu\in U$，其隶属函数满足：

$$(\lambda\mu)(x) = \max\{\lambda, \mu(x)\}$$

并称 $\lambda\mu$ 为数 $\lambda$ 与模糊集的乘积.

由以上定义可知，$\lambda\mu$ 为一模糊子集，进而得到以下分解定理和扩展原理.

**定理 1.2（分解定理）**　设模糊集 $\mu \in \Re(U)$，则

$$\mu = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\mu_\alpha$$

分解定理表明模糊集可由经典集合表示，这反映了模糊集和经典集合的密切关系.

**定理 1.3（扩展原理）**　设映射 $f: U \to V$，称映射

$$f: \Re(U) \to \Re(V)$$
$$\mu \to f(\mu)$$

为从映射 $f$ 扩展的模糊变换，其隶属函数为

$$f(\mu)(v) = \bigvee_{f(u)=v} \mu(u)$$

称映射

$$f^{-1}: \Re(V) \to \Re(U)$$
$$B \to f^{-1}(B)$$

为从映射 $f$ 扩展的反向模糊变换，其隶属函数为

$$f^{-1}(B)(u) = B(f(u))$$

并称 $f(\mu)$ 为 $\mu$ 的像，称 $f^{-1}(B)$ 为 $B$ 的原像.

当论域为实数集 $\mathbb{R}$ 时，有如下模糊数的定义.

**定义 1.5**　模糊数 $\mu$ 是实数域上的一个规范化凸模糊集，满足以下两个条件：

（1）存在 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\mu(x_0) = 1$；

（2）隶属函数 $\mu$ 是一个分段连续函数，且

$$\mu: \mathbb{R} \to [0,1]$$

一般地，一个模糊数表示为

$$\mu(x) = \begin{cases} L_0(x), & l \leqslant x \leqslant m \\ R_0(x), & m \leqslant x \leqslant r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中，$L_0(x)$ 为单调递增且右连续函数；$R_0(x)$ 为单调递减且左连续函数. 特别地，区间数和三角模糊数的隶属函数分别表示为

$$P(x) = \begin{cases} 1, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Q(x)=\begin{cases}\dfrac{x-l}{m-l}, & l\leqslant x\leqslant m\\ \dfrac{u-x}{u-m}, & m\leqslant x\leqslant u\\ 0, & 其他\end{cases}$$

简单起见，区间数通常记为 $P=[a,b]$，三角模糊数通常记为 $Q=[l,m,u]$.

两个区间数 $P_1=[a_1,b_1]$、$P_2=[a_2,b_2]$ 在 $a_1,a_2>0$ 时的四则运算法则如下[22].

（1）加法运算：

$$P_1+P_2=[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2]$$

（2）减法运算：

$$P_1-P_2=[a_1,b_1]-[a_2,b_2]=[a_1-b_2,b_1-a_2]$$

（3）乘法运算：

$$P_1\times P_2=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]=[a_1\times a_2,b_1\times b_2]$$

（4）除法运算：

$$P_1/P_2=[a_1,b_1]/[a_2,b_2]=[a_1/b_2,b_1/a_2]$$

其次，三角模糊数的四则运算比较复杂，往往不是一个简单的模糊数[23]，若 $Q_1=(l_1,m_1,u_1)$ 和 $Q_2=(l_2,m_2,u_2)$ 是两个三角模糊数，其四则运算定义如下.

（1）加法运算：

$$\mu_{Q_1+Q_2}(z)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\min(\mu_{Q_1}(x),\mu_{Q_2}(z-x))$$

（2）减法运算：

$$\mu_{Q_1-Q_2}(z)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\min(\mu_{Q_1}(x),\mu_{Q_2}(z+x))$$

（3）乘法运算：

$$\mu_{Q_1\times Q_2}(z)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\min(\mu_{Q_1}(x),\mu_{Q_2}(z/x))$$

（4）除法运算：

$$\mu_{Q_1/Q_2}(z)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\min(\mu_{Q_1}(x),\mu_{Q_2}(z\times x))$$

以上乘法运算和除法运算给出的结果是比较复杂的多项式，为了简单计算，各种简化方法及其误差已经有了一些研究[24, 25]，如 Dubois 和 Prade[24]给出如下乘法简化公式：

$$Q_1\times Q_2=(l_1,m_1,u_1)\times(l_2,m_2,u_2)=(l_1l_2,l_1m_2+l_2m_1,l_1u_2+l_2u_1)$$

也可以简化为与区间数运算相类似的情形[26]，则它们有如下运算法则.

（1）加法运算：

$$Q_1+Q_2=(l_1,m_1,u_1)+(l_2,m_2,u_2)=(l_1+l_2,m_1+m_2,u_1+u_2)$$