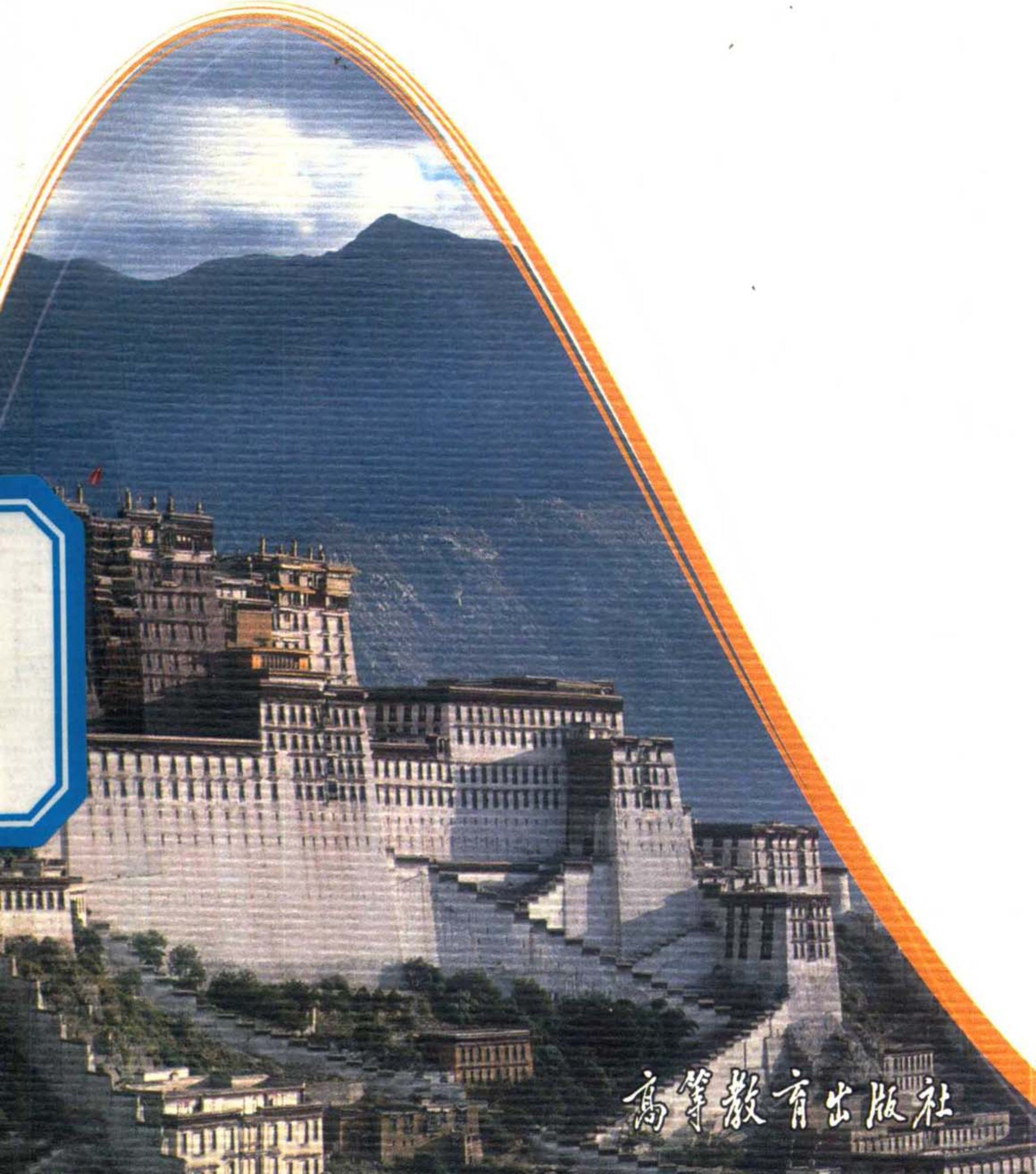
33

数学文化小丛书

李大潜 主编

神奇的伽马函数

靳志辉



高等教育出版社

书

李大潜 主编

神奇的伽马函数

Shenqi de Gama Hanshu

靳志辉

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

神奇的伽马函数 / 靳志辉编．-- 北京 ：高等教育出版社，2018. 3
（数学文化小丛书 / 李大潜主编．第四辑）
ISBN 978-7-04-049461-7

Ⅰ．①神… Ⅱ．①靳… Ⅲ．①阶乘计数 - 普及读物
Ⅳ．① O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 033360 号

项目策划 李艳馥 李 蕊

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 于丽娜　　封面设计 张 楠
版式设计 马 云　　插图绘制 邓 超　　责任校对 张 薇
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 960mm 1/32		http://www.hepmall.cn
印　　张	2.25		
字　　数	38 千字	版　　次	2018 年 3 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2018 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	9.00 元

物 料 号　49461-00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔, 抓住主要的线索和本质的内容, 由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长, 并相对独立, 以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则, 有的专题单独成册, 有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书, 走近数学、品味数学和理解数学, 充分感受数学文化的魅力和作用, 进一步打开视野、启迪心智, 在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目　录

引　言

数学爱好者们聚集在网络论坛上的一大乐事就是对各类和数学相关的事物评头论足、论资排辈. 如果要评选历史上最伟大的数学家, 数学“粉丝”们将围绕高斯、黎曼、牛顿、欧拉、阿基米德等一流数学人物展开口水战; 如果要讨论最奇妙的数学常数, e, π, $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 肯定成为三大最具实力的竞争对手; 如果要推举最美丽的数学公式, 欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 与自然数平方倒数的级数求和 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ 绝对是榜上有名. 那如果有人追问最神奇的数学函数是什么? 答案自然又会变得极具争议, 而我相信如下这个长相有点奇特的伽马函数:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

极有资格成为一个热门候选.

伽马函数是用积分形式定义的**超越函数**, 对于习惯了初等函数的我们, 伽马函数的长相着实让人觉得有点高深莫测, 一副讳莫如深、拒人于千里之

外的样子. 然而如果我们只在自然数集合 $\mathbf{N}$ 上来考察伽马函数, 却发现伽马函数摇身一变, 成为了异常简洁的模样

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

阶乘! 那是每个高中生都很熟悉的数学概念, 伽马函数一下变得如此的亲切、平易近人了. 实际上, 基于高等数学中的分部积分方法, 很容易证明伽马函数具有如下的递归性质:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

由此可以快速推导出 (1) 式. 所以伽马函数也称**阶乘函数**. 由于伽马函数在整个实数轴上都有定义, 于是可以看做是阶乘概念在实数集上的延拓.

如果我们继续多学习一些数学知识, 就会惊奇地发现这个具有神秘气质的伽马函数真是才华横溢. 它栖身于现代数学的各个分支, 在微积分、概率论、偏微分方程、组合数学, 甚至是看起来八竿子打不着的数论当中, 都起着重要的作用. 这个函数具有极高的实用价值, 而绝非是数学家凭空臆造的抽象玩具, 它被频繁应用于现代科学之中, 包括物理学、统计机器学习、人工智能等领域.

笔者主要从事统计自然语言处理和机器学习相关的研究工作, 多年来在概率统计和机器学习中频繁地接触和学习伽马函数. 不过长期以来一直处于一知半解的状态, 这个函数令人心存疑惑:

1. 伽马函数这么复杂的表达形式, 肯定不可能

是凭空想到的, 历史上数学家是基于什么原理找到这个奇特的函数的?

2. 现代数学对伽马函数的定义使它满足 $\Gamma(n) = (n-1)!$, 为何定义伽马函数的时候不让它满足 $\Gamma(n) = n!$?

3. 在实数域上伽马函数是唯一满足阶乘特性的函数吗? 它有哪些奇特的地方?

4. 伽马函数在各种概率分布的密度函数中频繁出现, 伽马函数本身是否有直观的概率解释?

带着这些疑问, 笔者翻阅了许多讲解伽马函数的历史和应用的资料, 发现伽马函数真是一个来自异族的美女, 与生俱来携带着一种神秘的色彩. 你要接近她并不难, 然而她魅力独特, 令你无法看透. 从她出生开始, 就吸引着众多一流的数学家对她进行解读. 历史上伽马函数的发现, 和数学家对阶乘、插值以及积分的研究有着紧密的联系, 而这最早要从著名的沃利斯公式讲起.

一、无心插柳——沃利斯公式

1655 年, 英国数学家沃利斯 (John Wallis, 1616—1703) (如图 1) 写下了一个神奇的数学公式

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

π 居然可以如此齐整地表示成奇数、偶数的比值, 真是令人惊讶! π 在数学史上是一个令数学家魂牵梦绕的常数, 为了寻求对 π 这个迷人的常数更加深刻的理解, 数学英雄们前赴后继倾注了无数的精力. 数学家陆续发现, π 可以表达成许许多多奇妙的形式, 而沃利斯公式是欧洲历史上发现的第二个把 π 表达成无穷序列的公式①. 由于它简洁的对称美, 也成为了许多数学人经常提及的数学公式之一.

为何沃利斯公式会和伽马函数发生联系呢? 对沃利斯公式做一下变形整理, 就可以得到如下等价

①第一个把 π 表示成无穷乘积的式子是法国数学家韦达于 1593 年给出的: $\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots$.

形式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

其中, 我们看到了阶乘, 所以沃利斯公式天然和阶乘有着紧密的联系, 自然也就和阶乘函数会发生关联.

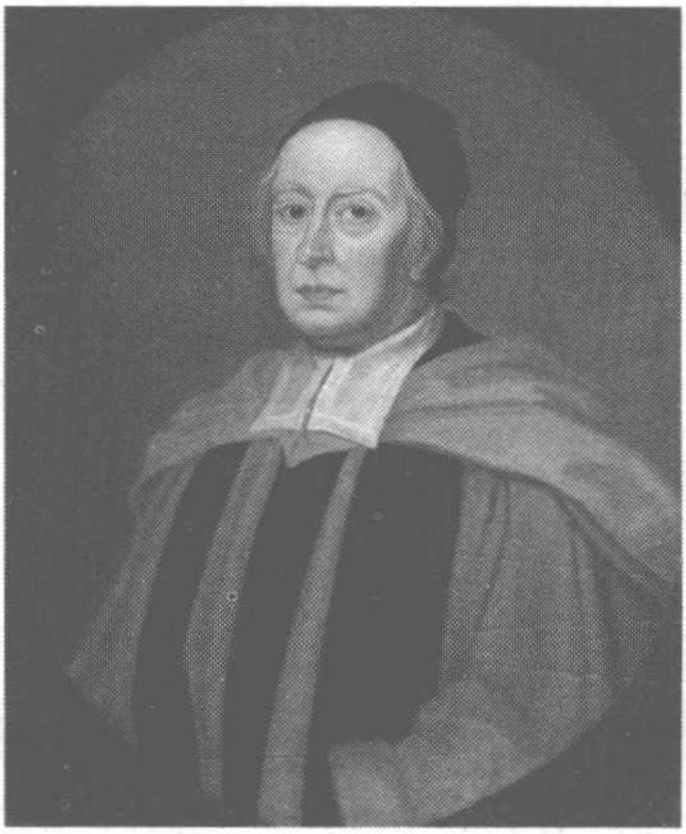


图 1 沃利斯

看着奇妙的沃利斯公式, 我们不禁心生疑问: 历史上这个神奇的公式是如何被发现的? 这个公式又如何证明? 我们站在现代数学知识的高度来回望历史, 其实利用微积分的知识来推导这个公式并不难, 许多微积分课本上都会提供一个证明. 证明的主要思路是从积分式

$$I(n)=\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$$

出发, 通过分部积分可以得到一个关于 $I(n)$ 的递推公式, 反复使用这个递推公式就可以证明结论.

上述这个证明思路有点繁琐，著名数学家波利亚 (George Pólya, 1887—1985) 在他的名著《数学与猜想》中提到了另外一个符合直觉、令人赏心悦目、但不算严格的“证明”思路，我们来欣赏一下. 基于高中数学知识我们知道:

1. 如果一个多项式 $f(x)$ 有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (此处 x_i, x_j 可以相同，对应于有重根的情形)，那么 $f(x)$ 一定可以表示为

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

2. 正弦函数 $\sin x$ 有无穷多个零点 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$.

以上两个知识点看起来毫不相干，因为我们都知道正弦函数 $\sin x$ 并不是一个多项式. 然而大数学家欧拉 (Leonhard Euler, 1707—1783) 却为这两个看似不相关的知识搭建桥梁，大胆地猜测 $\sin x$ 也具有多项式的这种性质，也就是

$$\begin{aligned}\sin x &= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \qquad (3)\end{aligned}$$

这样看似瞎猜的式子也能成立? 是的，利用现代数学分析的知识可以严格证明，欧拉的猜测完全正确!

正弦函数 $\sin x$ 是我们极为熟悉的，它可以通过多项式级数展开来表示，这一点对于理工科背景的大学生也是常识. 在微积分课程中我们都会学习

$\sin x$ 的泰勒展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

但是把 $\sin x$ 表示成无穷乘积的展开式 (3) 恐怕就不为大众所熟悉了, 通常是数学背景的学生才会接触到. (3) 这个展开式在数学推导中有许多妙用. 数学史上它发挥的第一个重要作用, 就是帮助欧拉推导出了如下美丽的公式①:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(3) 式的另一个妙处就是可以用于证明沃利斯公式, 不过这个思路并非欧拉本人给出, 而是后来的数学家发现的. 在 (3) 式中取 $x = \dfrac{\pi}{2}$, 可以得到

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right),$$

所以

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right).$$

上式正好就是沃利斯公式. 之所以说以上的证明不够严格, 是由于欧拉给的 $\sin x$ 无穷乘积展开式的严格证明并不简单, 依赖于现代数学分析理论.

① 自然数平方倒数级数求和问题在历史上极为有名, 被称为巴塞尔问题. 该问题首先由门戈利在 1644 年提出, 几十年来难倒众多数学家, 欧拉于 1735 年给出精确答案而名声大噪, 当时欧拉年仅 28 岁.

欣赏完沃利斯公式的证明, 我们把镜头重新拉回到沃利斯生活的年代. 要知道沃利斯给出他的公式是在 1655 年, 那时候牛顿刚满 12 岁, 莱布尼茨更小, 欧拉还没出生, 整个欧洲数学界对微积分的认识还停留在非常粗糙的萌芽阶段, 对正弦函数 $\sin x$ 的认识也非常有限, 所以沃利斯当然不可能用上述思路找到他的公式. 那沃利斯是如何发现这个 π 的无穷乘积表达式的呢?

在沃利斯的时代, 微积分有了初步的进展, 当时考虑的典型的问题是求一个曲线和坐标轴围成的面积. 欧洲的数学家追寻阿基米德一千多年前开创的穷竭法, 把曲线下的面积表达为求无穷多个矩形面积的和. 当积分的思想在 17 世纪开始逐步发酵的时候, 沃利斯已经能够运用积分的思路处理一些简单曲线的面积. 譬如, 对于最简单的幂函数曲线 $y = x^n$, 使用我们现在的数学记号, 沃利斯时代的数学家获得了如下的结果:

$$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

圆的面积一直是千百年来数学家们深入关心和研究的问题, 很自然地, 沃利斯也想到了可以使用同样的思路来处理圆的面积. 不过数学家早已证明圆的面积是 πr^2, 用积分的方法去计算圆的面积能带来什么好处呢? 沃利斯在此做了一个漂亮的逆向思维: 我们已经知道四分之一的单位圆圆弧 $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(0 \le x \le 1)$ 和坐标轴围成的面积是 $\dfrac{\pi}{4}$ (如图 2), 如

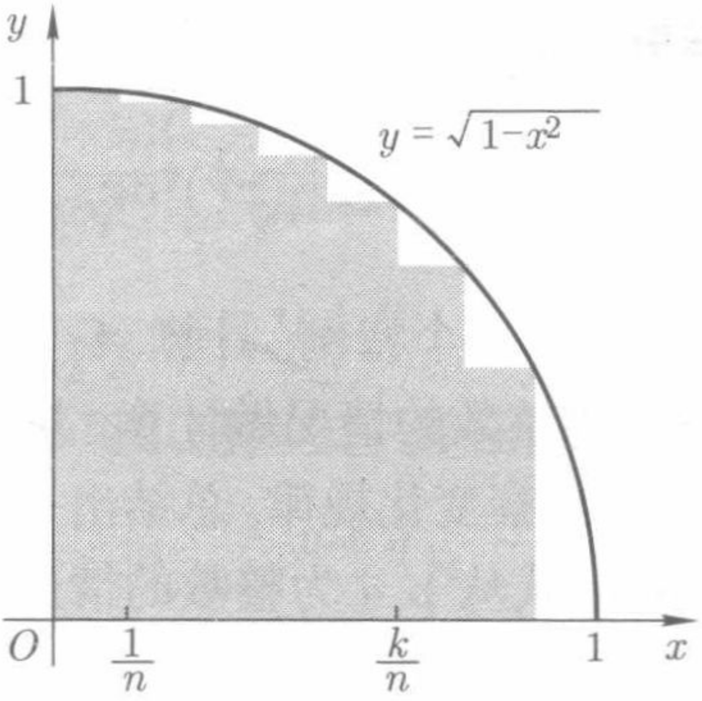


图 2　求圆弧下的面积

果这个面积能通过无穷分割的方法表达为一个解析表达式，那这个解析表达式就可以用于计算 π.

然而沃利斯在处理这个圆弧下的面积的时候遇到了困难. 虽然基于无穷分割的方法可以得到

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}},$$

但是这个极限难以简化计算. 数学家做数学研究的时候有一些思路非常奇特，当遇到一个特定的问题无法求解时，他们会考虑逆流而上，把原本的问题泛化为一个更一般的问题来思考，原本的问题就成为这个升级版本的特例. 表面上看问题变得更加困难复杂了，然而在思考一个更一般的问题的时候却往往容易发现规律. 沃利斯就是利用这样的技巧来处理他遇到的难题:

1. 考虑更一般的曲线面积问题

$$A_{p,q} = \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{p}})^q \mathrm{d}x,$$

原来的问题变成了一个特例: 计算 $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$;

2. 对 p, q 为整数的情况做计算, 并系统地列成表格, 从表格中观察变化规律, 总结出一般的公式;

3. 把计算公式从 p, q 为整数的情形延拓、内插到分数的情形, 从而计算出 $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

表 1　$B_{p,q}$ 数值表

p	q						
	0	1	2	3	4	$\cdots$	10
0	1	1	1	1	1	$\cdots$	1
1	1	2	3	4	5	$\cdots$	11
2	1	3	6	10	15	$\cdots$	66
3	1	4	10	20	35	$\cdots$	286
4	1	5	15	35	70	$\cdots$	1001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
10	1	11	66	286	1001	$\cdots$	184756

沃利斯对 $p, q = 1, 2, \cdots, 10$ 做了计算, 发现 $A_{p,q}$ 这个表格不太好处理, 改为倒数之后容易分析. 取 $B_{p,q} = \dfrac{1}{A_{p,q}}$, 列出表格 (见表 1), 仔细一分析, 就会发现, 面对着左上角 $B_{0,0}$ 的一系列平行对角线上的数居然恰好构成了帕斯卡三角形! 这个三角形中的组合数已经是数学家熟知的, 于是沃利斯很容易