自然科学学术文库

微分方程数值解的收敛性与稳定性研究

王伟华　张玲　刘国清　著

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

自然科学学术文库

微分方程数值解的收敛性与稳定性研究

王伟华　张　玲　刘国清　著

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书在选材上注重理论上的系统性和科学性，并尽量做到简明扼要，深入浅出。全书共分八章，主要介绍了一类微分方程和积分方程的半离散化方面的特点，以及方程的数值解的稳定性和收敛性的研究方法和研究结果。

本书可作为一般性微分方程数值解方面的学习和研究参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

微分方程数值解的收敛性与稳定性研究 / 王伟华，张玲，刘国清著. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2017. 12

ISBN 978 - 7 - 5661 - 1766 - 3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… ②张… ③刘… Ⅲ. ①微分方程 - 数值计算 - 研究 Ⅳ. ①O241. 8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 310188 号

选题策划 夏飞洋
责任编辑 张忠远 夏飞洋
封面设计 博鑫设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451 - 82519328
传　　真 0451 - 82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 北京中石油彩色印刷有限责任公司
开　　本 787 mm × 1 092 mm 1/16
印　　张 13. 5
字　　数 328 千字
版　　次 2018 年 6 月第 1 版
印　　次 2018 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 38. 00 元

http：//www. hrbeupress. com
E-mail：heupress@ hrbeu. edu. cn

前　言

自微积分理论形成后不久，人们就开始用微分方程来描述、解释和预测各种自然现象，在力学、天文学、物理学、生物学、工程技术和其他学科的许多分支中提出了很多用微分方程描述的数学模型，我们将其称为动态系统。很多重要学科如物理学、生态学等的基本方法本身就是偏微分方程。动态系统有其自身的特点，但它们仍要遵循系统所具有的一般规律，正是这个原因的推动，形成了系统思想、理论、方法和技术研究动态系统的新途径和新方法。噪声对微分方程影响也是很重要的，考虑白色噪声对微分方程的影响形成随机微分方程，随机模型在科学理论与生产实践中起到非常重要的作用，然而，随机微分方程的显式解很难得到，因此在实际应用中用数值方法求解。构造收敛速度快、精度高的数值方法是极其必要的。在许多科学技术工作者结合控制问题的研究，在这个方向上进行了一系列开创性的工作，取得了许多既有理论意义、又有实际应用价值的研究成果。

本书分为两部分，第一部分主要针对几类不同的随机微分方程，应用不同的数值方法，给出了几类随机微分方程数值解的收敛性与稳定性，这部分内容为随机微分方程数值解的研究奠定了基础和提供了理论依据。第二部分使用一阶偏微方程所描述的系统，即用偏微分方程描述的带有边界控制的分布参数系统模型为基础而进行的理论研究，它与系统具有的属性关系不大，就是说本书所介绍的方法对有类似模型的其他系统也是适用的。在求抛物型方程描述的物理和工程问题的数值近似解时应用半离散化逼近的方法。半离散逼近方法保持原问题的许多重要的物理意义，因而它本身就可以作为原物理问题的常微分方程模型。本部分还详细介绍利用 Trotter 逼近定理证明半离散逼近算法收敛的方法。在微分方程的研究领域中，作者对常微分方程所表示的动态系统如生物学模型也做了深入的研究，并取得一定的成果。由于这两种研究是建立在相同泛函分析和方程稳定性理论的基础之上，同时在这些研究成果的基础上进一步介绍了算子紧性的研究成果，这些是数值分析研究的基础。

全书由王伟华、张玲和刘国清担任主编共同完成，并由张玲负责统稿。具体分工如下：

第一部分中第一章至第五章及部分参考文献：张玲（大庆师范学院）；

第二部分中第六章和第八章及部分参考文献：王伟华（齐齐哈尔大学）；

第二部分中第七章：刘国清（大庆师范学院）。

其中王伟华完成本书 11 万字，张玲完成本书的 11 万字，刘国清完成其余的 10.8 万字。

本书的很多成果受到了黑龙江省教育厅科学技术研究项目（12531763）和黑龙江省自然科学基金青年项目（QC2016001）的资助。

本书在选材上注重理论上的系统性和科学性，并尽量做到简明扼要、深入浅出。另外书末附有参考文献，供有兴趣的读者进一步参考，由于作者学识浅薄，尽管竭力而为，但书中还会有许多缺点和错误，恳请专家、读者批评指正。

著　者

2017 年 8 月于齐齐哈尔大学

目　　录

第一部分

第一章　绪论 …… 3
　第一节　课题的背景及意义 …… 3
　第二节　研究现状 …… 4
　第三节　预备知识和符号 …… 9
　第四节　本部分的主要内容 …… 14
第二章　分段连续型随机微分方程 Euler-Maruyama 方法的收敛性 …… 15
　第一节　引言 …… 15
　第二节　数值解的收敛性 …… 15
　第三节　数值算例 …… 22
　第四节　本章小结 …… 22
第三章　分段连续型随机微分方程 Euler-Maruyama 方法的依概率收敛性 …… 23
　第一节　引言 …… 23
　第二节　解的存在唯一性 …… 23
　第三节　数值解的依概率收敛性 …… 25
　第四节　数值算例 …… 33
　第五节　本章小结 …… 33
第四章　半线性分段连续型随机微分方程指数 Euler 方法的收敛性与稳定性 …… 34
　第一节　引言 …… 34
　第二节　数值解的收敛性分析 …… 34
　第三节　数值解的稳定性分析 …… 39
　第四节　数值算例 …… 43
　第五节　本章小结 …… 44
第五章　半线性随机延迟微分方程指数 Euler 方法的收敛性与均方指数稳定性 …… 45
　第一节　引言 …… 45
　第二节　数值解的收敛性分析 …… 45
　第三节　数值解的稳定性分析 …… 51
　第四节　数值算例 …… 56
　第五节　本章小结 …… 57

第二部分

第六章　线性算子半群理论 …… 61

　第一节　抽象函数理论 …… 61

　第二节　有界线性算子强连续半群 …… 67

　第三节　抽象的柯西问题 …… 89

　第四节　预解式与谱 …… 90

　第五节　谱映象原理与紧算子半群 …… 96

　第六节　紧算子半群展开 …… 102

　第七节　算子半群的稳定性和 Trotter 逼近定理 …… 106

第七章　模型的半离散化及控制 …… 117

　第一节　一类人口模型的半离散化及其研究 …… 117

　第二节　线性森林定常发展系统及其半离散 …… 145

　第三节　两相同部件冷贮备可修系统半离散化 …… 154

　第四节　两同型部件温贮备可修系统半离散化 …… 161

　第五节　软件再生系统半离散化的研究 …… 172

　第六节　具有四类故障可修系统解的渐进稳定性 …… 180

　第七节　具有内部构造安全保障体系的冗余机器系统稳态解的最优控制 …… 183

第八章　空间中积分算子性质的研究 …… 189

　第一节　L^1 空间中弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程数值解的误差估计 …… 189

　第二节　$L^p[0,1]$空间中具有有界可测核的积分算子的性质 …… 192

　第三节　$L^p[0,1]$空间中弱奇异积分算子性质的研究 …… 194

参考文献 …… 198

第一部分

第一章 绪 论

第一节 课题的背景及意义

随机模型在科学理论与生产实践中起到非常重要的作用，该模型被应用到许多领域中，如生物学、传染病学、力学、经济学和金融学等。众所周知，自然界中事物的变化过程是由确定性过程和随机过程组成的，确定性的过程指这类事物的变化过程是符合必然的变化规律、具有确定的表达方式，也就是说，这类过程可以用时间 t 的一个确定性的函数来表示，而随机过程则不能，如液体中花粉所做的无规则的运动，它做运动的动力是周围液体分子无规则的碰撞，使我们无法预知花粉在将来的准确位置。其实，在确定性过程中也有随机因素的干扰，只是随机因素在此过程中的影响微乎其微，我们就忽略了这样的随机因素。假如这个随机因素对系统的干扰起到本质作用，那么忽略它就不合适了。例如，如果忽略了人口模型中随机因素的干扰，那么在有限的时间内人口数量可能爆炸（人口数量剧增），这是不符合实际的。为了研究此类系统，专家们引入了随机微分方程。例如，人口增长模型

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)N(t) \quad (N(0) = N_0) \tag{1-1}$$

其中 $a(t)$ 表示 t 时刻的人口增长率，$N(t)$ 表示 t 时刻的人口数量。此模型考虑随机因素的影响，$a(t)$ 不能完全确定，应该修改为

$$a(t) = \gamma(t) + \sigma(t)\text{“noise”}, \tag{1-2}$$

因此方程(1－1)修改为

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma(t)N(t) + \sigma(t)N(t)\text{“noise”} \quad (N(0) = N_0) \tag{1-3}$$

“noise”就是所谓的“白噪声”$\dot{B}(t)$，它是 $B(t)$ 的导数，即 $\dot{B}(t) = \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$。因此，可以得到随机微分方程

$$\mathrm{d}N(t) = \gamma(t)N(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)N(t)\mathrm{d}B(t) \quad (N(0) = N_0) \tag{1-4}$$

其中 $B(t)$ 是标准布朗运动（或维纳过程）。

在上面提到的随机微分方程中，将来的状态和过去的状态是独立的，只与现在的状态有关；然而，在实际的生产实践中将来的状态是和过去的状态有关系的，随机泛函微分方程就是关于这类系统的模型，例如，种群的简单增长模型

$$\dot{x}(t) = -\alpha\left[\int_{-1}^{0} x(t+\theta)\mathrm{d}\eta(\theta)\right]\left[1 + x(t)\right] \tag{1-5}$$

随机延迟微分方程是这类方程中最具有代表性的一种模型，例如，Van der Pol 方程

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) - f(x(t-\tau))\dot{x}(t-\tau) + x(t) = 0 \tag{1-6}$$

其中 τ 是常数。

分段连续型随机微分方程是一类特殊的随机延迟微分方程，它的自变量为分段常数或

分段连续函数。自变量连续型随机微分方程具有非常广泛的应用背景，如信号处理、控制理论及生物学中的一些模型都可以用此方程来描述。例如，改进的 Logistic 模型

$$\dot{x}(t) = x(t) + \{\gamma - \sum_{j=0}^{m} d_j x[(t-j)]\} \quad (t \geq 0) \tag{1-7}$$

综上所述，随机微分方程在科学研究中具有很重要的位置，但是，只有少部分随机微分方程能表示出精确解的显示表达式，大部分随机微分方程却不能表示出精确解，所以研究数值解就很有必要了，应用有效的数值方法，得出数值解的一些性质。那么怎么样来检验数值解的优劣呢？看数值解是否很好地保持了精确解的性质。因此，把数值解的研究应用于以上两种方程是必要且有意义的。

第二节 研究现状

目前对分段连续型随机微分方程研究的文献还很少。下面介绍一下随机微分方程、随机延迟微分方程、分段连续型微分方程和分段连续型随机微分方程的研究现状。

1. 随机微分方程

自从 Itô 给出了 Itô 积分的定义，对随机微分方程的研究就多了起来，随机微分方程的一般的形式如下

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \quad (\forall t \geq 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-8}$$

其中漂移系数 $f:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$，扩散系数 $g:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times m}$，$B(t)$ 是具有独立增量的 m 维标准布朗运动，x_0 是随机变量。其等价的随机积分方程为

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s) \tag{1-9}$$

随机微分方程与微分方程的区别在于随机微分方程中随机积分的部分，不能将它理解为普通的积分，因为布朗运动的轨迹是不可微的，且在任意小的区间内没有有界变差。对随机积分的定义有很多种，目前关注两种积分，即 Itô 积分和 Stratonovich 积分，二者是有一定的关系的，本文关注的是 Itô 积分。对于微分方程，我们主要考虑其方程解的存在性、稳定性及其一些其他的性质。对于随机微分方程同样关注方程解的存在唯一性与稳定性，但大部分方程的精确解是表示不出来的，因此，我们需要研究随机微分方程数值解的相应性质。下面介绍一下专家学者对随机微分方程精确解和数值解的一些研究成果。首先来看一下随机微分方程解的存在性问题，经典的讨论解的存在性问题要求方程的系数 f 和 g 满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件。讨论解的存在性问题要求方程的系数 f 和 g 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件。然而，许多随机微分方程不满足线性增长条件，因此，Khasminskii 研究了 Khasminskii 型条件下随机微分方程解的存在性，并在此条件下给出了其 Euler-Mayuyama 方法的数值解的依概率收敛性。

接下来介绍一下关于随机微分方程数值解的发展。首先介绍一下关于随机微分方程数值解的收敛性的发展。

2002 年，Higham 等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-10}$$

在局部 Lipschitz 条件和 p 阶矩条件下 Euler-Mayuyama 方法的强收敛性，并且给出了在漂移系数满足单边 Lipschitz 条件和扩散系数满足全局 Lipschitz 条件下隐式 Euler 方法的强收敛性。

2004 年，Mao 等人给出了带 Markovian 链随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), r(t))dt + g(x(t), r(t))dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-11}$$

在全局 Lipschitz 条件 Euler-Mayuyama 方法的强收敛性。其中 $r(t)$ 是在有限的状态空间$S=\{1,2,\cdots,N\}$上右连续的 Markov 链，并有生成元 $\Gamma=(\gamma_{ij})_{N\times N}$，而且

$$P\{r(t+\delta)=j|r(t)|=i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}+o(\delta) \quad (i \neq j) \\ 1+\gamma_{ij}+o(\delta) \quad (i=j) \end{cases} \tag{1-12}$$

这里的 $\delta>0,\gamma_{ij}>0$ 是 i 到 j 的转换率。如果 $i\neq j$，那么 $\gamma_{ij}-\Sigma_{i\neq j}\gamma_{ij}$，这是第一篇研究带有 Markov 链的随机微分方程数值解的文章。

2008 年，Mao 等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-13}$$

在局部 Lipschitz 条件和 p 阶矩条件下 Euler-Mayuyama 方法的强收敛性。与文献[10]不同之处在于这篇文章给出了数值解收敛到精确解的收敛阶是$\frac{1}{2}$阶的。

2012 年，Alcock 等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + \sum_{d}^{i=1} g_i(x(t))dB^i(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-14}$$

半隐式 Euler 方法的收敛性，并且收敛阶达到了 1。

下面介绍一下关于随机微分方程精确解和数值解的稳定性的发展。

1999 年，Mao 给出了带 Markov 链随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), t, r(t))dt + g(x(t), t, r(t))dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-15}$$

在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下精确解的 p 阶矩指数稳定和几乎处处指数稳定性。

2003 年，Higham 等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-16}$$

在数值解收敛的条件下随机微分方程精确解与其 Euler-Mayuyama 方法的均方指数稳定性是等价的。然后，作者给出了在漂移系数满足单边 Lipschitz 条件和扩散系数满足全局 Lipschitz 条件下隐式 Euler 方法具有上述性质证明。

2005 年，Rodkina 等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \sigma(t)x(t)dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-17}$$

半隐式变步长 θ 方法的几乎处处渐近稳定性。

2006 年，Bukkwar 等人给出了线性随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = \lambda x(t)dt + \mu x(t)dB(t) \quad (\forall t \in [0,T]) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-18}$$

线性2步方法的均方渐近稳定性。特别地,给出了此方程的2步Adams-Bashforth方法、Adams-Moulton方法、Milne-Simpson方法和BDF方法的均方稳定性。

2007年,Higham等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-19}$$

数值方法的几乎处处指数稳定性和小阶矩指数稳定性。作者首先给出了在线性增长条件下EM方法的几乎处处指数稳定性和小阶矩指数稳定性。最后给出了在漂移系数满足单边Lipschitz条件和扩散系数满足线性增长条件下向后Euler方法的几乎处处指数稳定性。

2010年,Bukkwar等人给出了线性随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = Fx(t)dt + \sum_{m}^{r=1} G_r x(t)dB(t) \quad (\forall t > 0) \\ x(0) \in R^d \end{cases} \tag{1-20}$$

数值方法的稳定性。首先给出此方程的θ-Maruyama方法的均方渐近稳定性和几乎处处渐近稳定性,接下来给出了该方法的A稳定性。

2012年,甘四清等人给出了随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-21}$$

在全局利普希茨条件和线性增长条件下隐式Milstein方法的收敛性并给出收敛阶是1,之后给出了该方法的均方渐近稳定性与几乎处处渐近稳定性。

2. 随机延迟微分方程

随机延迟微分方程解的存在唯一性要求漂移系数和扩散系数满足全局Lipschitz条件和线性增长条件在局部Lipschitz条件和线性增长条件下研究随机延迟微分方程解的存在唯一性的学者也不少,毛学荣给出了Khasminskii型定理,这是Khasminskii型实验的推广。同样,对于随机延迟微分方程的精确解也不容易用显示形式表示出来,这样研究随机延迟微分方程数值方法是很有必要的。许多学者研究了随机延迟微分方程数值解,首先介绍一下关于随机延迟微分方程数值解的收敛性的发展。

2003年,Mao等人给出了随机延迟微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), x(\delta(t)))dt + g(x(t), x(\delta(t)))dB(t) \quad (\forall t \in [0, T]) \\ x(t) = \xi(t), \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-22}$$

在局部Lipschitz条件和p阶矩条件下Euler-Mayuyama方法的强收敛性。其中$\delta(t)$:$[0,\infty) \to \mathbb{R}$,并满足$-\tau \leqslant \delta(t) \leqslant t$,$|\delta(t) - \delta(s)| \leqslant \rho |t-s|$,$\forall t, s \geqslant 0$。

2006年,Mao等人给出了随机延迟微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), x(t-\tau), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), t)dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(t) = \xi, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-23}$$

在局部Lipschitz条件和Khasminskii型条件下Euler-Mayuyama方法的依概率收敛性。

同年,Yuan等人给出了带Markov链随机延迟微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), x(t-\tau), r(t))dt + g(x(t), x(t-\tau), r(t))dB(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(t) = \xi, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-24}$$

在不同条件下的收敛性，首先给出了在全局 Lipschitz 条件下数值解的收敛性。然后给出了在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下数值解的收敛性。最后给出了在局部 Lipschitz 条件和 Khasminskii 型条件下 Euler-Mayuyama 方法的依概率收敛性。

2008 年，吴付科等人给出了中立型随机泛函微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}[x(t) - u(x_t)] = f(x_t)\mathrm{d}t + g(x_t)\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{1-25}$$

在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下 Euler-Mayuyama 方法的收敛性，在文章的最后给出了在全局 Lipschitz 条件下收敛性阶的表达式。

2011 年，Mao 给出了随机延迟微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = f(x(t), x(t-\tau))\mathrm{d}t + g(x(t), x(t-\tau))\mathrm{d}B(t) \quad \forall t \geqslant 0 \\ x(t) = \xi, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-26}$$

在局部 Lipschitz 条件和一般 Khasminskii 型条件下 Euler-Mayuyama 方法的依概率收敛性。此文中的 Khasminskii 型条件是 2006 年的 Khasminskii 型条件的推广，这样我们研究的方程更多了。

下面介绍一下关于随机延迟微分方程精确解和数值解稳定性的研究现状。

1995 年，Mao 给出了中立型随机泛函微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}[x(t) - G(xt)] = [f(t, x(t)) + g(t, x_t)]\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t)\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{1-27}$$

精确解的均方指数稳定性。

1996 年，Mao 应用了 Razumikhin 型定理给出了中立型随机泛函微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = f(t, x_t)\mathrm{d}t + g(t, x_t)\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{1-28}$$

精确解的指数稳定性。

2004 年，刘明珠等人给出了线性随机延迟微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = [ax(t) + bx(t-\tau)]\mathrm{d}t + [cx(t) + \mathrm{d}x(t-\tau)]\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(t) = \xi(t), \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-29}$$

半隐式 Euler 方法数值解的收敛性与均方渐近稳定性。

2007 年，Mao 给出了随机延迟微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = f(x(t), x(t-\tau))\mathrm{d}t + g(x(t), x(t-\tau))\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(t) = \xi, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-30}$$

在数值解收敛的条件下随机微分方程精确解的均方指数稳定性和其 Euler-Mayuyama 方法的均方指数稳定性是等价的。

2008 年，Mao 等人给出了带 Markov 链中立型随机延迟微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}[x(t) - D(x(t-\tau), r(t))] = f(x(t), x(t-\tau), t, r(t))\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + g(x(t), x(t-\tau), t, r(t))\mathrm{d}B(t) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(t) = \xi, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1-31}$$

在局部 Lipschitz 条件和一般 Khasminskii 型条件下该方程存在全局的精确解，并给出了在该条件下 Euler-Mayuyama 方法的几乎处处渐近稳定性。

2010 年，吴付科等人给出了随机延迟微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), x(t-\tau), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), t)dB(t) \\ x(t) = x_0, \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (\forall t \geqslant 0)$$

(1 - 32)

在局部 Lipschitz 条件下该方程 Euler-Mayuyama 方法数值解的几乎处处指数稳定性，本文最大的特点就是作者应用连续的和离散的半鞅收敛定理得到了数值解的几乎处处指数稳定性。

3. 分段连续型微分方程

最近，分段连续型微分方程(EPCAs)受到了很多专家学者的关注并且给出了许多有用的结论。该方程的基本形式为

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(h(t))) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1 - 33}$$

这里 $h(t)$ 是常数区间，如 $h(t)=[t]$，$h(t)=[t-n]$，$h(t)=t-n[t]$，其中 n 是正整数，$[t]$ 是不超过 t 最大的取整函数。分段连续型微分方程具有本身特点，该方程是一种特殊的延迟微分方程，又有着与微分方程不同的性质，在某些区间上自变量是常数，而且该方程的解是一个连续的、局部光滑的函数，初值由有限集来确定，而不是一个初始函数。因此，对该方程的研究是很有必要的。Cooke 等人给出了该方程在生物模型和控制系统中的应用。Wiener 给出了关于该方程的一般理论与基础的结果，如该方程的解存在唯一性、稳定性、振动性和周期性。2003 年，刘明珠教授带领的科研团队开始对分段连续型微分方程进行了数值解的研究。下面介绍该方程的一些主要结果。

1997 年，Wang 等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) + px(t-l) + qx([t-k]) = 0 \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1 - 34}$$

平衡解的全局吸引的充要条件为该方程的特征方程在 $|\lambda| \geqslant 1$ 上无根。

2004 年，刘明珠等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + a_0x([t]) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1 - 35}$$

的 Runge-Kutta 方法的数值解的渐近稳定性。本书应用了 (r,s) - Padé 逼近及 Order Stars 理论分析了 Runge-Kutta 方法的渐近稳定性。

2005 年，杨占文等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t-1]) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0, x(-1) = x_{-1} \end{cases} \tag{1 - 36}$$

的 Runge-Kutta 方法的数值解的渐近稳定性，并确定了 Runge-Kutta 方法的稳定区域，进一步得到了该方程解析解的稳定区域包含数值解的稳定区域。

同年，宋明辉等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1 - 37}$$

的 θ 方法的数值稳定性，并得到了该方程的解析解的稳定区域包含数值解的稳定区域的充要条件。

2007 年,刘明珠等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + bx\left(\left[\dfrac{t}{N}\right]\right) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-38}$$

的 Runge-Kutta 方法的数值解的渐近稳定性。并给出了数值解的稳定性条件保持了精确解的稳定性条件。

同年,吕万金等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + bx\left(\left[t + \dfrac{1}{2}\right]\right) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-39}$$

的 Runge-Kutta 方法保持收敛阶,并给出了数值解的稳定性区域保持解析解的稳定性区域的充要条件。最后给出了当 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}$ 时,该方法是渐近稳定的。

2008 年,Györi 等人给出了分段连续型微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(h(t)), x(g(t))) \quad (\forall t \geqslant 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1-40}$$

的数值方法的一些性质,给出了在精确解是渐近稳定的条件下,其数值解是收敛到精确解的。最后给出了关于稳定性和振动性的两个开放问题。其中 $h(t)$ 是一个连续的函数,而 $g(t)$ 在区间上是一个常函数。

4. 分段连续型随机微分方程

目前,对分段连续型微分方程关注的人很多,然而,关注噪声对该方程的影响的人都很少,实际上,环境和偶然事件对该系统是有一定影响的。关于分段连续型随机微分方程的数值分析结论还很少,戴红玉等给出了线性分段连续型随机微分方程 Euler 方法的均方稳定性。分段连续型随机微分方程具有分段连续型微分方程和随机微分方程的特点,在研究该方程时应用了分段连续型微分方程和随机微分方程的特点,给出了较好的结论,因此,研究分段连续型随机微分方程是很有意义的。同样,对于分段连续型随机微分方程的精确解,其表达式是不容易表示出来的,因而,对分段连续型随机微分方程数值解的研究很有必要。

第三节　预备知识和符号

1. 一些符号

本书中所需要的符号如下。

$|\boldsymbol{x}|$:向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧几里得范数。

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:向量或者矩阵的转置。

$|\boldsymbol{A}|$:$|\boldsymbol{A}| = \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹范数。

$a \wedge b$:$a \wedge b = \min\{a, b\}$,即 a 与 b 的最小值。

$a \vee b$:$a \vee b = \max\{a, b\}$,即 a 与 b 的最大值。

I_A:集合 A 的指示函数,即如果 $x \in A$,$I_A = 1$;否则,$I_A = 0$。

$\mathbb{R}$:$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$,实数。

$\mathbb{R}^+$:$\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$,所有非负实数的集合。

$\mathbb{R}^d$:d 维的欧几里得空间。

$\mathbb{R}^{d\times m}$:$d\times m$ 维的矩阵空间。

$\mu[A]$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对数范数。

$(\Omega,\mathcal{F},P)$:具有满足通常条件滤子$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$的完备的概率空间。$a.s.$:几乎处处,或者依概率 1。

$\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathbb{R}^n)$:表示所有实值可测的,$\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程 $f(t)_{t\geqslant 0}$所构成的空间,并且对任意的 $T>0$,有 $\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t<\infty\ a.s.$。

$\mathcal{L}^2([0,\infty),\mathbb{R}^n)$:表示所有实值可测的,$\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程 $f(t)_{t\geqslant 0}$所构成的空间,并且对任意的 $T>0$,有 $\int_0^T|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty\ a.s.$。

$C([a,b];\mathbb{R}^n)$:表示定义在$[a,b]$上所有的连续函数 ϕ 构成的空间。如果 $\phi\in C([a,b];\mathbb{R}^n)$则定义范数为$|\phi|=\sup_{a\leqslant\theta\leqslant b}|\phi(\theta)|$。

$C^b_{\mathcal{F}_t}([a,b];\mathbb{R}^n)$:表示所有有界 $\mathcal{F}_t$ 可测的 $C([a,b];\mathbb{R}^n)$值随机变量的空间。

$B(t)=(B_1(t),\cdots,B_d(t))^{\mathrm{T}}$:表示 d 维的布朗运动。

$C^{2,1}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$:表示定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+$ 上关于 x 二次连续可微、关于 t 一次可微的所有的连续非负函数 $V(x,t)$的集合。

LV:$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$:若 $V\in C^{2,1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$,那么 LV:$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to R$ 定义为

$LV(x,y,t)=V_t(x,t)+V_x(x,t)f(x,y)+\dfrac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(x,y)V_{xx}(x,t)g(x,y)]$,这里

$$V_t=\frac{\partial V}{\partial t},V_x=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_d}\right),V_{xx}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{d\times d}$$

2. 定义、引理、条件及有用的不等式

本书中所需要的定义、引理、条件及不等式如下。

定义 1.1 一个随机试验所有可能的结果构成的集合,称为样本空间,记作 Ω。其中每个元素称为样本点,记作 ω。

定义 1.2 在样本空间 Ω 上,令 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集族,如果

(1)$\varnothing\in\mathcal{F}$,

(2)$A\in\mathcal{F}\Rightarrow A^C\in\mathcal{F}$,其中 $A^C=\Omega-A$,

(3)$A_i\in\mathcal{F},i=1,2,\cdots.\Rightarrow\cup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$成立,那么称 $\mathcal{F}$ 为定义在 Ω 上 σ 代数。$\mathcal{F}$ 中元素称为 $\mathcal{F}$ 可测集。

定义 1.3 称实值函数 X:$\Omega\to\mathbb{R}$ 为 $\mathcal{F}$ 可测的,如果对任意的 $a\in\mathbb{R}$ 满足

$$\{\omega:X(\omega)\leqslant a\}\in\mathcal{F}$$

定义 1.4 令 P:$\mathcal{F}\to[0,1]$是定义在 $\mathcal{F}$ 上的集函数,如果

(1)$P(\Omega)=1$;

(2)对任意不相交的的序列$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$有

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

成立,那么称 P 为概率测度,并称 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间。如果 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间,令 $\overline{\mathcal{F}}=\{A\subset\Omega:\exists B,C\in\mathcal{F},s.t.\ B\subset A\subset C,P(B)=P(C)\}$. 那么 $\overline{\mathcal{F}}$ 是一个 σ 代数或者叫作 $\mathcal{F}$ 的完备,进而如果 $\mathcal{F}=\overline{\mathcal{F}}$,那么概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是完备的概率空间。

定义 1.5 称定义在 Ω 上的实值函数 X 为随机变量,如果满足下式

$$\{\omega:X(\omega)\in B,B\in B\}\in\mathcal{F}$$

其中 B 为 Borelσ 代数。

定义 1.6 称随机变量族 $\{X_t(\omega)\}_{t\in I}$ 为随机过程,其中 I 是它的指标集。一方面对任意的 $t\in I$,有

$$\{X_t(\omega)\}:\Omega\to\mathbb{R}$$

是随机变量。另一方面,对任意的 $\omega\in\Omega$,有

$$\{X_t(\omega)\}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

是确定的函数,称为随机过程的样本轨道。

定义 1.7 若对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, $X(t,\omega)$ 都是连续的,则称 $X(t,\omega)$ 是连续的随机过程。若对任意的 $t\in R^+$, $X(t,\omega)$ 都是 $\mathcal{F}$ 可测的,则称 $X(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}$ 适应的。

定义 1.8 在具有滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上,若一个连续的随机过程 $B(t)$ 满足如下条件:

(1) $B(0)=0,a.s.$;

(2) 对于 $0\leqslant s<t<\infty$,增量 $B(t)-B(s)$ 服从均值为 0,且方差为 $t-s$ 的正态分布;

(3) 对于 $0\leqslant s<t<\infty$,增量 $B(t)-B(s)$ 独立于 $\mathcal{F}_s$,则称 $B(t)$ 为布朗运动。

定义 1.9 如果 $B_1(t),B_2(t),\cdots,B_d(t)$ 是相互独立的布朗运动,则称 $(B_1(t),B_2(t),\cdots,B_d(t))^{\mathrm{T}}$ 是 d 维的布朗运动。

定义 1.10 令 $\tau:\Omega\to[0,+\infty]$. 称 τ 是停时。如果对任意的 $t\geqslant 0$,有

$$\{\omega:\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$$

定义 1.11 令 $X(t,\omega)$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应过程。称 $X(t,\omega)$ 是 Itô 过程。如果 $X(t,\omega)$ 满足分解式

$$X(t,\omega)=X(0,\omega)+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}B(s)$$

其中 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, $g\in\mathcal{L}^2(R^+,\mathbb{R}^{d\times m})$,同时 $X(t,\omega)$ 具有随机微分

$$\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B(t)$$

定义 1.12 (几种收敛的定义)令 X 和 $X_k,k\geqslant 1$ 是 $\mathbb{R}^d$ 值的随机变量。

(1) (几乎处处或者依概率 1 收敛)如果存在零测度集 $\Omega_0\in\mathcal{F}$,对任意的 ω 不属于 Ω_0,数列 $X_k(\omega)$ 在通常意义下收敛到 X,即

$$\lim_{k\to\infty}X_k=X\ a.s.$$

那么称 $X_k(\omega)$ 几乎处处收敛到 X。

(2) (随机或者依概率收敛)如果对于任意的 $\varepsilon>0$,当 $k\to\infty$,有

$$P\{\omega:|X_k(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}\to 0$$

那么称 $X_k(\omega)$ 随机收敛到 X。

(3) (L^p 上 p 阶矩收敛)如果 $X_k,X\in L^p$,并且

$$E|X_k-X|^p\to 0$$

那么称 $\{X_k\}$ 在 L^p 上 p 阶矩收敛到 X。