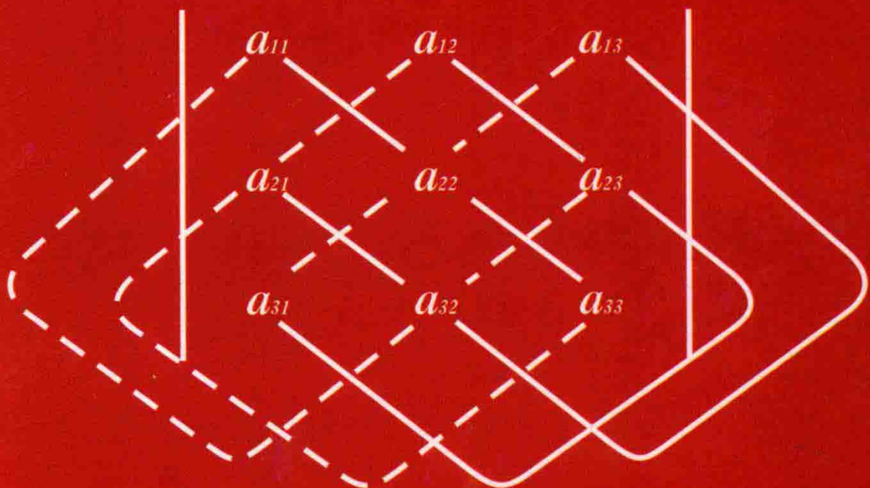
高等学校“十三五”规划教材



线性代数（第二版）

王兆飞 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划教材

线性代数

（第二版）

王兆飞　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是根据理工类和经管类非数学专业线性代数课程的教学要求，结合普通高等院校线性代数的教学实际编写而成的. 本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型等，较系统地介绍了线性代数的基本概念与理论，重点介绍了用矩阵理论解决线性代数问题的方法与技巧. 书中每一章都精选了具有代表性的习题，为学好线性代数提供了保障.

本书可作为普通高等院校理工类及经管类非数学专业学生的教材，也可作为相关教师和其他相关工作人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王兆飞编著. —2版—西安：西安电子科技大学出版社，2018.4

ISBN 978-7-5606-4841-5

Ⅰ. ① 线…　Ⅱ. ① 王…　Ⅲ. ① 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 032664 号

策划编辑　胡华霖
责任编辑　马晓娟
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2018 年 4 月第 2 版　2018 年 4 月第 3 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　15.5
字　　数　263 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　35.00 元

ISBN 978-7-5606-4841-5/O

XDUP　5143002-3

前言

“线性代数”是理工类、经管类等非数学专业的重要基础课程. 随着我国高等教育的迅速发展，教学改革的进一步深入，教学时数不断减少，为了适应新形势下的高等教育，对“线性代数”进行教学内容与教学方式上的改革是十分必要的. 为此，我们认真分析了高等院校非数学专业“线性代数”课程的教学内容及要求，并结合近年来工科数学研究生入学考试的考试大纲，经过大量的调研与论证，总结多年的教学经验，对其教学内容进行了优化组合，调整了知识结构，充实了行列式的内容，增加了行列式的计算方法，突出了矩阵理论的应用，介绍了用矩阵理论解决向量问题的方法，增加了一些其它同类教材很少给出的定理证明，力求让学生知其所以然，克服学生机械地背结论的弊端，提高学生的学习兴趣，培养学生的思考习惯. 本书能改变学生学习线性代数时理论体系模糊的状态，从较简单的概念入手，逐步建立以矩阵为主要理论的线性代数体系，从而使学生较为系统地掌握线性代数的知识与技能.

本书的编写与出版得到了河北北方学院的领导及教材科的大力支持，在编写过程中，得到了西安电子科技大学出版社胡华霖编辑的鼎力支持，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，敬请读者不吝赐教.

编　者

2018 年 3 月

目 录

第一章　行　列　式

行列式起源于解线性方程组，它不仅是研究矩阵、线性方程组等理论的重要工具，而且在数学、物理学、工程技术、经济学等领域也有着广泛的应用. 本章主要介绍行列式的概念、性质及运算，最后给出利用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

1.1　二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

为了说明行列式的起源，首先考虑含有两个未知数的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用加减消元法分别消去 x_2，x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可求得线性方程组(1.1.1)的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

容易看出，上式中的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由线性方程组的未知数的系数组成的，为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1.1.1　由数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 排成 2 行 2 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为一个二阶行列式，它的值是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 二阶行列式的横排为行，竖排为列. 若用 D 来表示二阶行列式，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

这里数 $a_{ij}(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$称为二阶行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于行列式 D 的第 i 行；元素 a_{ij} 的第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于行列式 D 的第 j 列. 位于行列式 D 的第 i 行、第 j 列的元素 a_{ij} 称为行列式 D 的$(i,\ j)$元.

如图 1.1 所示，把行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 的连线称为主对角线，把右上角元素 a_{12} 到左下角元素 a_{21} 的连线称为副对角线，于是二阶行列式的值便是主对角线上两个元素之积减去副对角线上两个元素之积. 这种计算方法称为二阶行列式的对角线法则.

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式的定义，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组(1.1.1)的唯一解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

上式即为二元线性方程组(1.1.1)的求解公式，其中分母 D 是由线性方程组(1.1.1)的未知数的系数所确定的二阶行列式，称它为线性方程组(1.1.1)的系数行列式；分子 $D_i(i=1,\ 2)$是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中的第 i 列元素所得到的.

2. 三阶行列式

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

用加减消元法可以得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_2$$
$$=b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}+b_1a_{31}a_{23}-b_2a_{31}a_{13}-b_3a_{11}a_{23}-b_1a_{21}a_{33}$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_3$$
$$=b_3a_{11}a_{22}+b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时，可得三元线性方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}+b_1a_{31}a_{23}-b_2a_{31}a_{13}-b_3a_{11}a_{23}-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$x_3=\frac{b_3a_{11}a_{22}+b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

为了表示三元线性方程组的解，我们引入三阶行列式的概念.

定义 1.1.2 由数 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$排成 3 行 3 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，它的值是

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.1.5}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，三元线性方程组(1.1.4)的唯一解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

上式即为三元线性方程组(1.1.4)的求解公式，其中分母 D 是由线性方程组(1.1.4)的未知数的系数所确定的三阶行列式，称它为线性方程组(1.1.4)的系数行列式；分子 $D_i(i=1, 2, 3)$是用常数项 b_1，b_2，b_3 替换 D 中的第 i 列元素所得到的.

三阶行列式的计算方法遵循如图 1.2 所示的对角线法则：三条实线连接的三个元素的乘积之和减去三条虚线连接的三个元素的乘积之和.

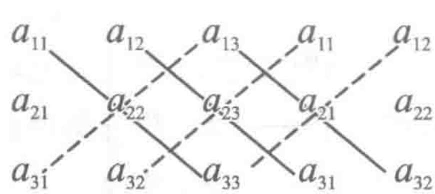


图 1.2

例 1.1.1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1\\3x_1+5x_2+2x_3=8\\x_1-2x_2-3x_3=-1\end{cases}$$

解 线性方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}2&3&-1\\3&5&2\\1&-2&-3\end{vmatrix}\\&=2\cdot5\cdot(-3)+3\cdot2\cdot1+(-1)\cdot3\cdot(-2)-(-1)\cdot5\cdot1\\&\quad-2\cdot2\cdot(-2)-3\cdot3\cdot(-3)\\&=22\end{aligned}$$

由于 $D\neq0$，所以原方程组有唯一解. 而

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&-1\\8&5&2\\-1&-2&-3\end{vmatrix}=66$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&8&2\\1&-1&-3\end{vmatrix}=-22$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&5&8\\1&-2&-1\end{vmatrix}=44$$

故原方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{66}{22}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-22}{22}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{44}{22}=2$$

1.2 排　列

由上一节的讨论可知，二元、三元线性方程组的解都可以用行列式表示，那么一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.2.1}$$

是否也能用行列式来表示它的解呢？要回答这个问题，就需要讨论如何定义 n 阶行列式的问题，并讨论行列式的性质及计算. 为了引入 n 阶行列式，先介绍一些排列的知识.

1. 排列及其逆序数

定义 1.2.1 由自然数 1，2，…，n 组成的一个无重复数字的全排列称为一个 n 元排列.

n 元排列的一般形式为 $j_1j_2\cdots j_n$，例如，由自然数 1，2，3 组成的 3 元排列有

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

由于给定 n 个不同的自然数，它们组成的全排列一共有 $n!$ 个，因此，对于给定的 n 个不同的自然数，所有互不相同的 n 元排列一共有 $n!$ 个.

n 元排列 $123\cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列的，称它为自然排列.

在由自然数 1，2，…，n 组成的所有 n 元排列中，除了自然排列外，其它的排列都或多或少地破坏了这种自然顺序，即都存在较大的数排在较小的数前面的情形. 例如，在 4 元排列 3241 中，3 比 2 大，但 3 却排在了 2 的前面，这时就说数 3 与 2 构成一个逆序. 在这个排列中，构成逆序的数对还有 31，21，41，因此排列 3241 共有 4 个逆序，这样就说排列 3241 的逆序数为 4.

定义 1.2.2 在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面($j_s<j_t$)，则称数对 j_t 与 j_s 构成一个逆序. 一个 n 元排列中逆序的总数，称为这个 n 元排列的逆序数.

n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如，在 5 元排列 31542 中，构成逆序的数对有 31，32，54，52，42，因此 $\tau(31542)=5$.

为了不重不漏地计算排列的逆序数，可以采用下面的方法计算排列的逆序数.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是由自然数 1，2，…，n 组成的 n 元排列，考虑 $j_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 j_i 大的数且排在 j_i 前面的数有 t_i 个，就说 j_i 的逆序数是 t_i. 于是，j_1，j_2，…，j_n 的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

就是这个排列的逆序数. 用公式写出来就是

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_1\text{ 的逆序数 }t_1+j_2\text{ 的逆序数 }t_2+\cdots+j_n\text{ 的逆序数 }t_n$$

或者

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n)=&\text{排在 }j_1\text{ 前面比 }j_1\text{ 大的数的个数 }t_1\\&+\text{排在 }j_2\text{ 前面比 }j_2\text{ 大的数的个数 }t_2+\cdots\\&+\text{排在 }j_n\text{ 前面比 }j_n\text{ 大的数的个数 }t_n\end{aligned}$$

例 1.2.1 求 n 元排列 7624135 的逆序数.

解 在排列 7624135 中，因为 7 排在首位，前面没有比它大的数，所以 7 的逆序数是 0；因为排在 6 的前面比 6 大的数有 1 个，所以 6 的逆序数是 1；因为排在 2 的前面比 2 大的数有 2 个，所以 2 的逆序数是 2；因为排在 4 的前面比 4 大的数有 2 个，所以 4 的逆序数是 2；因为排在 1 的前面比 1 大的数有 4 个，所以 1 的逆序数是 4；因为排在 3 的前面比 3 大的数有 3 个，所以 3 的逆序数是 3；因为排在 5 的前面比 5 大的数有 2 个，所以 5 的逆序数是 2. 因此，

$$\tau(7624135)=0+1+2+2+4+3+2=14$$

例 1.2.2 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots321$ 及 $12\cdots(n-1)n$ 的逆序数.

解 对于排列 $n(n-1)\cdots321$，因为排在 n 前面比 n 大的数有 0 个，排在 $n-1$前面比 $n-1$ 大的数有 1 个，排在 $n-2$ 前面比 $n-2$ 大的数有 2 个……排在 2 前面比 2 大的数有 $n-2$ 个，排在 1 前面比 1 大的数有 $n-1$ 个，因此

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

对于排列 $12\cdots(n-1)n$，显然有

$$\tau(12\cdots(n-1)n)=0$$

一个 n 元排列的逆序数可能是奇数，也可能是偶数，我们可以按照 n 元排列的逆序数的奇偶性对 n 元排列进行分类.

定义 1.2.3 逆序数是奇数的 n 元排列称为奇排列；逆序数是偶数的 n 元排列称为偶排列.

例如，因为 $\tau(31542)=5$，所以 31542 是奇排列；因为 $\tau(21435)=2$，所以 21435 是偶排列.

2. 对换

为了讨论 n 元排列的性质，下面引入 n 元排列对换的概念.

定义 1.2.4 把一个 n 元排列中某两个数 i, j 的位置互换，保持其余的数位置不变，得到另一个 n 元排列，这样的变换称为一个对换，记作 (i, j).

对换与排列的奇偶性有什么关系呢？我们先看一个例子：5 元排列 31542，它是一个奇排列，作对换(3, 4)，变成的排列为 41532，而此排列是偶排列. 这说明，对换会改变排列的奇偶性. 这一现象并非偶然.

定理 1.2.1 对换改变 n 元排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证明 先证明对换的两个数在 n 元排列中相邻的情形.

设 n 元排列为

$$i_1 \cdots i_k a b i_{k+3} \cdots i_n \tag{1.2.2}$$

作对换 (a, b)，则 n 元排列变为

$$i_1 \cdots i_k b a i_{k+3} \cdots i_n \tag{1.2.3}$$

因为 a, b 以外的数在 n 元排列式(1.2.2)与 n 元排列式(1.2.3)中的位置没有改变，所以经过对换 (a, b) 后，这些数彼此间的逆序数没有改变；又因为 a, b 以外的数与 a 或 b 在 n 元排列式(1.2.2)与 n 元排列式(1.2.3)中的位置也没有改变，所以经过对换 (a, b) 后，这些数彼此间的逆序数也没有改变. 当 $a<b$ 时，在 n 元排列式(1.2.2)中 ab 是顺序的，而在 n 元排列式(1.2.3)中 ba 是逆序的，于是 n 元排列式(1.2.3)的逆序数比 n 元排列式(1.2.2)的逆序数增加了 1；当 $a>b$ 时，在 n 元排列式(1.2.2)中 ab 是逆序的，而在 n 元排列式(1.2.3)中 ba 是顺序的，于是 n 元排列式(1.2.3)的逆序数比 n 元排列式(1.2.2)的逆序数减少了 1. 所以，不论是哪种情形，n 元排列式(1.2.2)与 n 元排列式(1.2.3)的奇偶性总是相反的.

再证明一般的情形.

设 n 元排列为

$$i_1 \cdots i_{k-1} a i_{k+1} \cdots i_{k+t} b i_{k+t+2} \cdots i_n \tag{1.2.4}$$

作对换 (a, b)，则 n 元排列变为

$$i_1 \cdots i_{k-1} b i_{k+1} \cdots i_{k+t} a i_{k+t+2} \cdots i_n \tag{1.2.5}$$

对换 (a, b)，即 n 元排列式(1.2.4)变成 n 元排列式(1.2.5)，可以通过下面的一系列相邻数的对换来实现. 从 n 元排列式(1.2.4)出发，把 a 依次与数 i_{k+1}, …, i_{k+t}, b 作 $t+1$ 次相邻数的对换，n 元排列式(1.2.4)就变为

$$i_1 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots i_{k+t} b a i_{k+t+2} \cdots i_n \tag{1.2.6}$$

再从 n 元排列式(1.2.6)出发，把 b 依次与数 i_{k+t}，i_{k+t-1}，$\cdots i_{k+2}$，i_{k+1} 作 t 次相邻数的对换，n 元排列式(1.2.6)就变成 n 元排列式(1.2.5). 因此，对换 (a, b)，即 n 元排列式(1.2.4)变成 n 元排列式(1.2.5)可以通过 $2t+1$ 次相邻数的对换来实现. 因为 $2t+1$ 是奇数，而相邻数的对换改变排列的奇偶性，所以经过奇数次这样的对换，n 元排列式(1.2.4)与 n 元排列式(1.2.5)的奇偶性还是相反的.

推论 1.2.1 所有 $n(n>1)$ 元排列中，奇排列与偶排列各占一半，均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 假设在所有的 n 元排列中共有 s 个奇排列、t 个偶排列. 将 s 个奇排列都作对换(1, 2)，则这 s 个奇排列都变成了偶排列，且它们彼此不同，所以 $s \leqslant t$；将这 t 个偶排列都作对换(1, 2)，则这 t 个偶排列都变成了奇排列，且它们彼此不同，所以 $t \leqslant s$，故有 $s=t=\frac{n!}{2}$.

定理 1.2.2 任意一个 n 元排列与自然排列 $12\cdots n$ 都可经过一系列对换互变，并且所作对换的次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

证明 用数学归纳法首先证明任意一个 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 都可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots n$.

$n=1$ 时，1 元排列只有一个，所以结论显然成立.

假设任意一个 $n-1$ 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 都可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots(n-1)$. 现在来看由 1, 2, …, n 组成的任意一个 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$.

如果 $j_n=n$，那么由归纳假设 $n-1$ 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots(n-1)$. 显然这些对换也把排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 变成自然排列 $12\cdots(n-1)n$.

如果 $j_n \neq n$，那么作对换 (n, j_n) 就把排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 变成了排列 $j_1' j_2' \cdots j_{n-1}' n$，这就归结为上一情形，从而排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots n$.

根据数学归纳法原理可得，由 1, 2, …, n 组成的任意 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 都可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots n$.

其次证明自然排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换变成任意一个 n 元排列

$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$.

设经过对换(i_1, i_2), (i_3, i_4), …, (i_{2s-1}, i_{2s})可把n元排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$变成自然排列$12\cdots n$. 这里$i_1$, i_2, …, i_{2s-1}, i_{2s}可以有相同的数，则经过反次序的对换(i_{2s-1}, i_{2s}), …, (i_3, i_4), (i_1, i_2)就把自然排列$12\cdots n$变成了排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$.

设排列$12\cdots n$经过s次对换变成排列$j_1 j_2 \cdots j_n$. 若s是奇数，则排列$j_1 j_2 \cdots j_n$与排列$12\cdots n$的奇偶性相反. 由于$12\cdots n$是偶排列，因此排列$j_1 j_2 \cdots j_n$是奇排列. 若s是偶数，则排列$j_1 j_2 \cdots j_n$与排列$12\cdots n$的奇偶性相同. 由于$12\cdots n$是偶排列，因此排列$j_1 j_2 \cdots j_n$是偶排列.

1.3 n阶行列式

1. 二阶、三阶行列式的展开式结构

为了给出n阶行列式的定义，我们先来讨论二阶、三阶行列式的展开式，从而得出结构性的规律，然后利用这些规律来定义n阶行列式.

首先看三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

从三阶行列式的展开式中可以看出如下规律：

(1) 项数：它有$3! = 6$项.

(2) 项的构成：行列式的展开式中的每一项都是取自不同行不同列的3个元素的乘积，而且所有这种取自不同行不同列的3个元素的乘积在行列式的展开式中都出现，若把元素的行标按自然次序排列，则除符号外展开式中的一般项可以表示为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \tag{1.3.1}$$

这里$j_1 j_2 j_3$是由1, 2, 3组成的3元排列. 当$j_1 j_2 j_3$取遍1, 2, 3组成的3元排列时，式(1.3.1)恰好对应3阶行列式的展开式中的6项.

(3) 符号规律：当$j_1 j_2 j_3$是偶排列时，式(1.3.1)在行列式的展开式中的符

号为正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，式(1.3.1)在行列式的展开式中的符号为负号. 因此，式(1.3.1)在行列式的展开式中的符号可表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

综上所述，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 3 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的代数和，共有 3! 项，这里 $j_1j_2j_3$ 是由 1，2，3 组成的 3 元排列. 当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负号. 因此，三阶行列式的展开式可以表示为

$$D=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对由 1，2，3 组成的所有 3 元排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

分析二阶行列式也有类似的规律，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对由 1，2 组成的所有 2 元排列 j_1j_2 求和.

2. *n* 阶行列式的概念

下面根据二阶、三阶行列式的展开式的规律给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成一个 n 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为一个 n 阶行列式，它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，即