普通高等教育"十二五"规划教材
工科数学信息化教学丛书

高等数学学习指导（下）

第二版

尹水仿　余胜春　主编

科学出版社

普通高[illegible]教材

工科数学信息化教学丛书

高等数学学习指导

(下)

(第二版)

尹水仿　余胜春　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书《高等数学学习指导》（上、下册）是根据教育部最新颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》和《全国硕士生入学统一考试数学考试大纲》对该课程要求编写的．本书为下册，内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学、无穷级数．

本书各章内容包括基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、考题选讲、复习题与自测题，并附有复习题与自测题解答，最后还给出了三套模拟试题及解答．

本书各章具有内容充实、选题灵活、题型丰富、覆盖面广的特点，可作为高等院校理工类各专业高等数学课程的学习指导书，也可作为教师的教学参考书，对报考研究生的学生也具有一定的参考价值．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导．下/尹水仿，余胜春主编．—2版．—北京：科学出版社，2017.6

（工科数学信息化教学丛书）

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-053900-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①尹… ②余… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第143498号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中远印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2017年6月第　二　版　印张：16 1/4

2017年6月第一次印刷　字数：350 000

定价：43.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《高等数学学习指导(下)》(第二版)编委会

主　编　尹水仿　余胜春

副主编　余　东　赵喜林　刘云冰　张　青

编　委　（按姓氏笔画为序）

丁咏梅　王志明　尹水仿　曲峰林

刘云冰　李春丽　李琳娜　余　东

余胜春　张　青　张平芳　张学英

张艳红　陈贵词　赵喜林　胡　松

咸艳霞　徐树立　蒋　君　熊　丹

第二版前言

本书是在第一版的基础上，根据教育部最新颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》和《全国硕士生入学统一考试数学考试大纲》对该课程的要求，结合近几年教学改革实践和新形势下教材改革的精神以及在使用本书第一版教学过程中的积累的经验进行综合修订而成. 本次修订中，保留了第一版的体系和风格. 本书自 2010 年 9 月出版以来，得到了广大师生的重点关注，特别是同行们对本书提出了许多很好的宝贵意见和建议，在认真地汲取这些意见和建议的基础上，通过本次修订，使得本书能更好地适合当前教师教学和学生学习的需要. 在此，对提出宝贵意见和建议的同行们表示衷心的感谢！

本次修订重点体现在以下几个方面：

(1) 对第一版中的疏漏进行了更正，对部分内容重新进行了编排，使其更加规范和严谨.

(2) 更新了部分例题，特别是“考题选讲”部分，更换或增加了近几年的研究生考试试题，使本书更富有新的气息，内容更加充实.

(3) 调整了部分内容解题方法的先后顺序，使之更好地与学习内容的先后顺序一致.

(4) 更加注重调动学生自主学习的积极性. 例如，在“例题分析”和“考题选讲”部分，相当部分题目都给出了解题分析或注释，以更好地培养和提高学生分析问题和解决问题的能力，更好地体现本书的学习指导作用.

参加本书编写的人员有尹水仿、余胜春、余东、赵喜林、刘云冰、张青等.

限于编者水平，书中还会存在不足之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2017 年 3 月

前　言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础理论课，同时也是硕士研究生入学考试的必考科目，掌握好高等数学的基本知识、基本理论和基本方法，对于学生后续课程的学习，对于培养和提高学生的素质和能力都具有十分重要的作用，甚至对于学生今后的发展都有着深远的影响.为了帮助正在学习高等数学的大学一年级学生及有志报考硕士研究生的考生系统地掌握好高等数学的知识，我们组织了多年在教学一线从事高等数学教学且教学经验丰富的老师编写了《高等数学学习指导》一书.

本书依据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》和《全国硕士生入学统一考试数学考试大纲》对该课程的要求编写，并结合目前高等数学课程的实际教学情况，与同济大学数学系主编的《高等数学》(第七版)教材同步，它将成为学生学习高等数学的良师益友.

本书各章按基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、考题选讲、复习题和自测题及复习题解答、自测题解答等内容编写.基本要求具体地指出了学习每一章应掌握的程度.内容提要说明了每一章需要掌握的内容，包括基本概念、重要定理、常用公式以及它们之间的关系.释疑解难通过对各章中的疑难问题，学生在学习中易错的概念和解题过程中常见错误的剖析，指导学生正确地理解和掌握基本概念，提高分析问题和解决问题的能力.例题分析和考题选讲是本书的重点.在这里我们选择了大量的例题，大多都具有典型性，由浅入深，由易到难，用例题的形式体现本章的基本内容及具体要求，题型极为丰富，注重基本概念，讲求基本方法，相当部分题目还给出了解题分析或注释，以更好地体现本书的学习指导作用.考题选讲则选取了全国研究生入学考试部分试题及相关院校的期末考试试题，体现通过学习指导以期达到的辅导目标，各章配有复习题和自测题，复习题供学生检测学习各章时对内容的掌握.自测题(I)主要用于测试学生对本章基本知识、基本方法的掌握程度，自测题(II)以达到或接近考研水平的题目为主，供学生复习总结时自我检查提高使用.

本书由尹水仿、余胜春任主编，王志明、余东、赵喜林、刘云冰任副主编，并由尹水仿提出编写思路及编写提纲，各章编写人员：赵喜林(第一章、第十一章)，王志明(第二章、第三章)，刘云冰(第四章、第十二章)，余胜春(第五章、第六章)，余东(第七章、第八章)，尹水仿(第九章、第十章)，全书由尹水仿、余胜春统稿，张平芳、咸艳霞、张青、蒋君、徐树立、曲峰林、陈贵词、丁咏梅、李春丽、熊丹、李琳娜、张学英、张艳红、胡松等参加了编写的整理、复习题和自测题解答的编写及书稿的校对等工作，最后由尹水仿、余胜春定稿.

由于编者水平有限，书中不妥及不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2010年8月

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

基 本 要 求

1. 了解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积)，掌握两个向量垂直和平行的条件.

3. 了解单位向量、方向向量与方向余弦、向量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

8. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

内 容 提 要

一、空间直角坐标系

(1) 建立空间直角坐标系 $O-xyz$，空间点 P 与三元有序数组 (a, b, c) 之间有一一对应关系.

(2) 空间两点间距离公式：设有点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则两点间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

二、向量代数

1. 基本概念

(1) 向量. 既有大小又有方向的量称为向量. 向量可用坐标表示

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

(2) 向量的模(长度). 向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

(3) 单位向量. 模为 1 的向量称为单位向量. 和 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量以 $\boldsymbol{a}^0$ 表示

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\quad 或\quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

(4) 负向量. 和向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

(5) 零向量. 模为零的向量称为零向量(方向不定)，记为 $\boldsymbol{0}$.

(6) 向量在轴上的投影.

设有一向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 及一轴 u，向量的起点 M_1 与终点 M_2 在轴 u 上的投影分别为 M_1' 及 M_2'，则称轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ 的值 $M_1'M_2'$ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在轴 u 上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}$ 或 $(\overrightarrow{M_1M_2})_u$ 即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}=M_1'M_2'$，轴 u 称为投影轴.

(7) 向量的坐标表示式.

设有点 $O(0,0,0)$，$M(x,y,z)$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x，y，z 轴正向的单位向量(也称基本单位向量)，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{k}\\&=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中 α,β,γ 是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 OM 的方向余弦，且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad 及 \quad \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

(8) 向量相等. 两向量若满足大小相等，方向相同，则称两向量相等.

2. 向量的基本运算

(1) 向量的加减法. 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$$

(2) 向量的数乘. λ 为一实数，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\qquad |\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

(3) 向量的数量积. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(4) 向量的向量积. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{c}$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定平面的单位向量，方向服从由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 的右手规则.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},\quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，即等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

3. 向量的基本性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

(3) 主要运算规律：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交换律)，　　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (无交换律)

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，　　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，　　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

(5) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

三、空间平面

1. 平面方程

(1) 点法式.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(A, B, C)是平面的法向量,(x_0, y_0, z_0)是平面上的一点.

(2) 一般式.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(3) 截距式.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$$

a, b, c 分别为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

2. 两平面的位置关系

平面 $\Pi_1 \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

(1) Π_1 与 Π_2 的夹角 θ 为

$$\cos\theta = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})| = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(2) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(3) $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

3. 点到平面的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

其中(x_0, y_0, z_0)是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外的一点.

四、空间直线

1. 直线方程

(1) 对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

(2) 参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \quad (t \text{ 为参数}) \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

(3) 一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

(4) 两点式 $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

2. 两直线间的关系

直线 L_1 $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$

直线 L_2 $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$

(1) L_1 与 L_2 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

(2) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

(3) $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

3. 直线与平面的关系

设直线 L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$, 平面 Π: $Ax+By+Cz+D=0$, $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

(1) 直线与平面的夹角 φ 为

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

(2) 直线与平面平行 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow mA+nB+pC=0$

(3) 直线与平面垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

4. 点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上一点.

五、空间曲面

曲面的一般方程为 $F(x, y, z)=0$.

(1) 旋转曲面方程. yOz 坐标面上曲线 $f(y, z)=0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

类似可得 xOy, xOz 平面上的曲线绕相应轴旋转所得曲面的方程.

(2) 柱面方程. $F(x, y)=0$ 表示以 xOy 面上的曲线 $\begin{cases}F(x, y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面方程.

(3) 常见的二次曲面.

椭球面　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆抛物面　$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

锥面　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

单叶双曲面　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

双曲抛物面(马鞍面)　$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

六、空间曲线

1. 方程

L 可以视为两个空间曲面 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 的交线，即

$$L: \begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$$

其参数方程为

$$L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

2. 空间曲线在坐标面上的投影

若空间曲线 L 的方程为 $\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0. \end{cases}$ 从方程中消去 z 得到 L 向 xOy 面上的投影柱面的方程 $H(x, y)=0$，L 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} H(x, y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

释 疑 解 难

问题 1　向量之间能比较大小吗？

答　不能. 向量是既有大小、又有方向的量. 而方向无所谓大小，在向量的描述中所讲“既有大小”是指向量的模的大小.

问题 2　(1) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

答　(1) 不能推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 事实上，等式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 成立，并不一定要求其中至少一个为零，而只要求 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$. 因此，当 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 移到同一起点，而它们的终点落在与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的一个平面上时，就有 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$. 例如，若取 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{b}=(1, 1, 0)$，$\boldsymbol{c}=(0, 1, 1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1$. 只有当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 平行且不垂直于 $\boldsymbol{a}$ 时，才能由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

(2) 不能推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 事实上，将 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 移到同一起点，而它们的终点只要在与 $\boldsymbol{a}$ 平行的任一直线上，就有 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，即 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$. 若取 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{c}=(0,1,-1)$，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$. 只有当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$ 都不平行于 $\boldsymbol{a}$ 时，才能由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

问题 3 向量的数量积与向量积有何物理意义？如何计算？如何利用它们判别向量的位置关系？

答 数量积在物理上可以表示功，若物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下做直线运动，其位移向量为 $\boldsymbol{s}$，则其功 W 为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

向量积在物理上可以表示力矩、磁力等. 当单位电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动时，它所受的磁力 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，其大小为 $|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$，方向由右手准则确定.

问题 4 向量在有向直线上的投影是向量还是数量？两个向量如果在给定的一条有向直线上的投影相等，问这两个向量是否相等？

答 向量在有向直线上的投影是数量，不是向量. 两个向量即使在给定的一条有向直线上的投影相等，这两个向量可以方向不同、长度不同. 以平面向量为例，起点是原点 $O(0,0)$，终点是 $P(1,\tan\theta)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$，无论 θ 是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中的哪个值，$\overrightarrow{OP}$ 在正向 Ox 轴上的投影都是正数 1，但对不同的 θ，$\overrightarrow{OP}$ 自然也不同.

问题 5 是否所有的三元二次方程都表示曲面？

答 不一定. 我们知道，三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面、椭圆锥面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面及以二次曲线为准线的柱面等曲面均为二次曲面. 但是，三元二次方程的图形不总是曲面，有时会出现“退化”情况，有可能表示曲线甚至点. 例如，方程

$$x^2+y^2+4z^2-2x-4y-8z+9=0$$

即 $(x-1)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0$，它仅表示一个点 $(1,2,1)$.

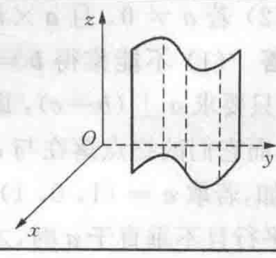
问题 6 $2x^2+2y^2-z^2=1$ 是由 $2x^2-z^2=1$ 绕 z 轴旋转一周而得的旋转单叶双曲面吗？

答 不对，$2x^2-z^2=1$ 在空间代表一个柱面，它绕 z 轴旋转是一个旋转体. 正确的说法应该是 $2x^2+2y^2-z^2=1$ 是由 xOz 平面上的双曲线 $2x^2-z^2=1$，绕 z 轴旋转一周而得的单叶双曲面，或者 yOz 平面上的双曲线 $2y^2-z^2=1$，绕 z 轴旋转而得的单叶双曲面.

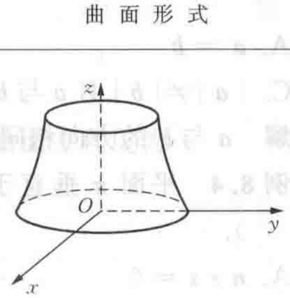
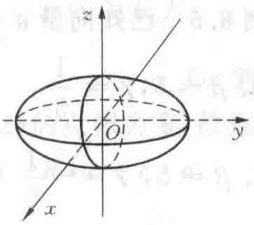
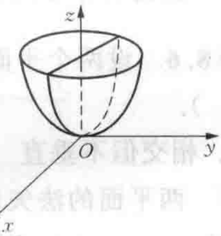
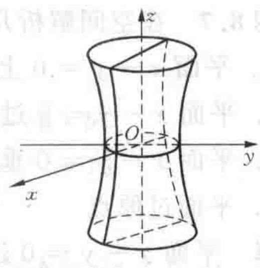
问题 7 列举常见的曲面方程，指明曲面及其方程特征.

答 见表 8.1.

表 8.1

名称	方程形式	方程特征	曲面形式
柱面	母线平行 z 轴的柱面方程 $F(x,y)=0$ 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 抛物柱面 $y^2=2px$ 双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	方程中不含变量 z	

续表

名称	方程形式	方程特征	曲面形式
旋转曲面	曲线 $L:\begin{cases} f(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$	含有 x^2+y^2 形式且 x，y 的平方项系数相同	
	椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c)>0$	x，y，z 的平方项系数同号	
二次曲面	抛物面 $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ $(p,q>0)$	含 x，y 的平方项，z 的一次项	
	单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	x，y 的平方项系数与 z 的平方项系数异号	

例题分析

例 8.1　若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为非零向量，则下列关系式中成立的是(　　).

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　B. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$

解　$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2x+|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cos^2x=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$

选项 A,B,C 一般情况下不成立. 故选 D.

例 8.2　设 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}$，则(　　).

A. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　B. $\boldsymbol{a}\,/\!/\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　C. $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{c}$

解　由 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 故选 A.

例 8.3　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，如 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，则一定不成立的是(　　).

A. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同

C. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不同　　D. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同

解　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同. 故选 C.

例 8.4　平面 π 垂直于直线 l，$\boldsymbol{n}$ 为平面 π 的法线方向，$\boldsymbol{s}$ 为直线 l 的方向向量，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$　　B. $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 重合　　C. $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{s}$　　D. $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$

解　选择 C.

例 8.5　已知向量 $\boldsymbol{a}=15\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\gamma\boldsymbol{k}$ 平行，则(　　).

A. $\beta=5,\gamma=\dfrac{1}{5}$　　B. $\beta=-5,\gamma=-\dfrac{1}{5}$

C. $\beta=5,\gamma=-\dfrac{1}{5}$　　D. $\beta=-5,\gamma=\dfrac{1}{5}$

解　因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $\dfrac{15}{3}=\dfrac{\beta}{1}=\dfrac{-1}{-\gamma}$. 故选 A.

例 8.6　设两个平面方程分别为 $x-y+5z+3=0$，$x-3y-z+7=0$，则这两个平面(　　).

A. 相交但不垂直　　B. 垂直相交　　C. 平行　　D. 重合

解　两平面的法矢量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,5)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(1,-3,-1)$，一方面 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 不平行，另 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\neq0$，则 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不垂直. 故选 A.

例 8.7　在空间解析几何中，对平面 $x-y=0$，如下叙述错误的是(　　).

A. 平面 $x-y=0$ 上的点到 x 轴与 y 轴的距离相等

B. 平面 $x-y=0$ 过 z 轴

C. 平面 $x-y=0$ 垂直 x 轴

D. 平面过原点

解　平面 $x-y=0$ 过 z 轴且与 x 轴的夹角为 $\pi/4$. 故选 C.

例 8.8　过点 $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 且母线平行于 x 轴的柱面方程是(　　).

A. $2x^2+y^2=1$　　B. $2z^2+y^2=1$

C. $x+y+z=1$　　D. $z^2+2yz+y^2=1$

解　母线平行于 x 轴的柱面方程中应该不含变量 x，因此只考虑选项 B, D，将点的坐标代入，D 满足. 故选 D.

例 8.9　对于曲面 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$，下列叙述错误的是(　　).

A. 是由在 xOy 坐标平面上母线 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转而成

B. 是由在 zOy 坐标平面上母线 $\dfrac{z^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转而成

C. 是由在 xOy 坐标平面上母线 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成

D. 曲面 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$ 是旋转椭球面

解　由在 xOy 坐标平面上母线 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成曲面方程应为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$$

故选 C.

例 8.10　直线 L：$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和平面 π：$4x-2y-2z=3$ 的关系为(　　).

A. 垂直　　B. 平行　　C. 直线在平面上　　D. 斜交

解　直线的方向向量$(-2,-7,3)$与平面的法矢量$(4,-2,-2)$的点积为零.故选 B.

例 8.11　设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0$,得

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}$$

例 8.12　已知 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$,求:

(1) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模;

(2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ 的模;

(3) 以向量 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积 S.

解　(1)

$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2&=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\\&=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=4|\boldsymbol{a}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2=76\end{aligned}$$

所以 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{76}$.

(2)　$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

所以

$$|(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|=|7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=7|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=35\sqrt{3}$$

(3)

$$S=|(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|=35\sqrt{3}$$

例 8.13　已知平行四边形的对角线向量为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$,其中 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$,求平行四边形的面积.

解　设平行四边形的两邻边分别为 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$,因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$,从而

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\frac{1}{2}(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$$

$$S=|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=|(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=5$$