

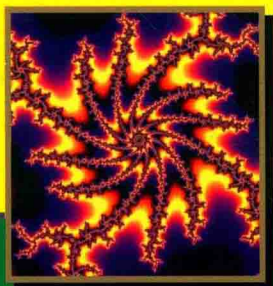


中学数学拓展丛书

数学技能操握

SHUXUE JINENG CAOWO

沈文选 杨清桃 著



数学技能，是在数学知识的学习过程中逐步形成和发展的。技能是一种智慧！是数学能力的标志！

操握数学技能是数学学习追求的一种基础性目标！



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本书是湖南省教育厅科研课题“教育数学的研究”(编号06C510)成果之六

数学技能操握

SHUXUE JINENG CAOWO

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本册书共分八章:第一章数学技能的含义、特征及训练;第二章数学注意和数学观察;第三章数学理解和数学记忆;第四章数学计算和数学推理;第五章数学阅读和数学概括;第六章数学论证和数学实验;第七章数学作图和数学建模;第八章数学审美和数学写作.

本书可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或数学参考书,也是广大中学数学教师及数学爱好者的数学视野拓展读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学技能操握/沈文选,杨清桃著. —哈尔滨:

哈尔滨工业大学出版社,2018.3

(中学数学拓展丛书)

ISBN 978-7-5603-7230-3

I. ①数… II. ①沈… ②杨… III. ①中学数学课-
教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 022589 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 李宏艳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 总印张 19.5 总字数 498 千字

版 次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7230-3

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

我和沈文选教授有过合作,彼此相熟.不久前,他发来一套数学普及读物的丛书目录,包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等,洋洋大观.从论述的数学课题来看,该丛书的视角新颖,内容充实,思想深刻,在数学科普出版物中当属上乘之作.

阅读之余,忽然觉得公众对数学的认识很不相同,有些甚至是彼此矛盾的.例如:

一方面,数学是学校的主要基础课,从小学到高中,12年都有数学;另一方面,许多名人在说“自己数学很差”的时候,似乎理直气壮,连脸也不红,好像在宣示:数学不好,照样出名.

一方面,说数学是科学的女王,“大哉数学之为用”,数学无处不在,数学是人类文明的火车头;另一方面,许多学生说数学没用,一辈子也碰不到一个函数,解不了一个方程,连相声也在讽刺“一边向水池注水,一边放水”的算术题是瞎折腾.

一方面,说“数学好玩”,数学具有和谐美、对称美、奇异美,歌颂数学家的“美丽的心灵”;另一方面,许多人又说,数学枯燥、抽象、难学,看见数学就头疼.

数学,我怎样才能走进你,欣赏你,拥抱你?说起来也很简单,就是不要仅仅埋头做题,要多多品味数学的奥秘,理解数学的智慧,抛却过分的功利,当你把数学当作一种文化来看待的时候,数学就在你心中了.

我把学习数学比作登山,一步步地爬,很累,很苦.

但是如果你能欣赏山林的风景,那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初始阶段。走入山林,爬得微微出汗,坐拥山色风光。体会“明月松间照,清泉石上流”的意境。当你会做算术,会记账,能够应付日常生活中的数学的时候,你会享受数学给你带来的便捷,感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰,大汗淋漓,歇足小坐。环顾四周,云雾环绕,满目苍翠,心旷神怡。正如苏轼名句:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同;不识庐山真面目,只缘身在此山中。”数学理解到一定程度,你会感觉到数学的博大精深,数学思维的缜密周全,数学的简捷之美,使你对符号运算能够有爱不释手的感受。不过,理解了,还不能创造。“采药山中去,云深不知处。”对于数学的伟大,还莫测高深。

最后是登顶阶段。攀岩涉水,越过艰难险阻,到达顶峰的时候,终于出现了“会当凌绝顶,一览众山小”的局面。这时,一切疲乏劳顿、危难困苦,全都抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”,欣赏数学之美,是需要代价的。当你破解了一道数学题,“蓦然回首,那人却在灯火阑珊处”的意境,是语言无法形容的快乐。

好了,说了这些,还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读,它会帮助你一步步攀登数学的高山,领略数学的美景,最终登上数学的顶峰。于是劳顿着,但快乐着。

信手写来,权作为序。

张奠宙

2016年11月13日

于沪上苏州河边

附 文

(文选先生编著的丛书,是一种对数学的欣赏。因此,再次想起数学思想往往和文学意境相通,2007年年初曾在《文汇报》发表一短文,附录于此,算是一种呼应)

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词,历来有许多可供谈助的材料。例如

一去二三里,烟村四五家。

亭台六七座,八九十枝花。

把十个数字嵌进诗里,读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗:

一片二片三四片,五片六片七八片。

千片万片无数片,飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过,以上两诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系,在于意境.李白《送孟浩然之广陵》诗云:

故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州.

孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流.

数学名家徐利治先生在讲极限的时候,总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句,让大家体会一个变量趋向于0的动态意境,煞是传神.

近日与友人谈几何,不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句:

前不见古人,后不见来者.

念天地之悠悠,独怆然而涕下.

一般的语文解释说:上两句俯仰古今,写出时间绵长,第三句登楼眺望,写出空间辽阔;在广阔无垠的背景中,第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪,两相映照,分外动人.然而,从数学上来看,这是一首阐发时间和空间感知的佳句.前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间).陈老先生以自己为原点,前不见古人指时间可以延伸到负无穷大,后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大.后两句则描写三维的现实空间:天是平面,地是平面,悠悠地张成三维的立体几何环境.全诗将时间和空间放在一起思考,感到自然之伟大,产生了敬畏之心,以至怆然涕下.这样的意境,数学家和文学家是可以彼此相通的.进一步说,爱因斯坦的思维时空学说,也能和此诗的意境相衔接.

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验.他在微积分教学中讲到无界变量时,用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句:

春色满园关不住,一枝红杏出墙来.

学生每每会意而笑.实际上,无界变量是说,无论你设置怎样大的正数 M ,变量总要超出你的范围,即有一个变量的绝对值会超过 M .于是, M 可以比喻成无论怎样大的园子,变量相当于红杏,结果是总有一枝红杏越出园子的范围.诗的比喻如此贴切,其意境把枯燥的数学语言形象化了.

数学研究和学习需要解题,而解题过程需要反复思索,终于在某一时刻出现领悟.例如,做一道几何题,百思不得其解,突然添了一条辅助线,问题豁然开朗,欣喜万分.这样的意境,想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境:“众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处.”一个学生,如果没有经历过这样的意境,数学大概是学不好的了.

◎

前

言

音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能
动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,
但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学就是对于模式的研究。

——A. N. 怀特海

甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解
一个实际情况,因为我们在试图建立数学模型时被迫考
虑了各种逻辑可能性,不含混地定义了所有的概念,并且
区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了
与事实不符的结果,它也可能是有价值的,因为一个模型
的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战
争是相似的,有时一次失败比一次胜利更有价值,因为它
帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

——A. Renyi

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦
耳的优美旋律!

人们喜爱画卷,因为它不仅能描绘出自然界的壮丽,
而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅能字词的巧妙组合,而
且有抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的
浓缩,而且增加人的智慧!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或桥

梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学精神,科学与人文融合的精神,它是一种理性精神,一种求简、求统、求实、求美的精神!数学精神似一座光辉的灯塔,指引数学发展的航向!数学精神似雨露阳光滋润人们的心田!

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!让我们在思疑中启悟,在思辨中省悟,在体验中领悟!

数学方法,人类智慧的结晶,它是人类的思想武器!它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接!它的源头又是那样地寻常!

数学解题,人类学习与掌握数学的主要活动,它是数学活动的一个兴奋中心!数学解题理论博大精深,提高其理论水平是永远的话题!

数学技能,在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式.它是一种智慧!它是数学能力的一种标志!操握数学技能是应达到的一种基础性目标!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景,特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学竞赛,许多青少年喜爱的一种活动,这种数学活动有着深远的教育价值!它是选拔和培养数学英才的重要方式之一.这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣,可以扩大他们的数学视野,促进创新意识的发展.数学竞赛中的专题培训内容展示了竞赛数学亮丽的风采!

数学测评,检验并促进数学学习效果的重要手段.测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩.测评数学的深入研究正期待着我们!

数学史话,充满了诱人的前辈们的创造与再创造的心血机智,让我们可以从中汲取丰富的营养!

数学欣赏,对数学喜爱的情感的流淌.这是一种数学思维活动的崇高情感表达.数学欣赏,引起心灵震撼,真、善、美在欣赏中得到认同与升华.从数学欣赏中领略数学智慧的美妙,从数学欣赏走向数学鉴赏,从数学文化欣赏走向数学文化研究!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学.

从而,提高我们每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高中华民族的整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标.为此,笔者构思了这套丛书.

这套丛书是笔者学习张景中院士的教育教学思想,对一些数学素材和数学研究成果进

行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:构建符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生的书籍.

不积小流无以成江河,不积跬步无以至千里,没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色,这套丛书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的.因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者.

这套丛书,作者试图以专题的形式,对中小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作的.

本册书是《数学技能操握》.

熟练掌握一些基本技能,对学好数学是非常重要的.例如,在学习概念中有要求学习者能举出正、反面例子的训练;在学习公式、法则中有对公式、法则掌握的训练,也有注重对运算算理认识 and 理解的训练;在学习推理证明时,不仅仅有在推理证明形式上的训练,更有对落笔有据、言之有理的理性思维的训练;在立体几何学习中不仅有对基本作图、识图的训练,而且有对认识事物的方法的训练;在学习统计时,有在实际问题中处理数据,从数据中提取信息的训练,等等.

数学技能的操握,不单纯是为了熟练技能,更重要的是使学习者通过训练更好地理解数学知识的实质,体会数学的价值,因此技能训练必须有利于学习者认识数学的本质,提高数学能力.

随着科技和数学的发展,数学技能的内涵也在发生变化.除了传统的运算等技能外,还应包括更广泛、更有力的技能.例如,我们要在操练中重视对学习者进行以下的技能训练:能熟练地完成心算与估计;能决定什么情况下需寻求精确的答案,什么情况下只需估计就够了;能正确地、自信地、适当地使用计算器或计算机;能估计数量级的大小,判断心算或计算机结果的合理性,判断别人提供的数量结果的正确性;能用各种各样的表、图、统计方法来组织、解释,并提供数据信息;能把模糊不清的问题用明晰的语言表达出来(包括口头和书面的表达能力);能从具体的前后联系中,确定该问题采用什么数学方法最合适,会选择有效的解题策略等.

也就是说,随着时代的前进和数学的发展,中学数学的基本技能也在发生变化.学习中也要用发展的眼光与时俱进地认识基本技能,如上面我们提出的需要训练的那些技能.而一部分原有的技能训练的内容,随着时代的发展可能被淘汰,如:会熟练地查表,像查对数表、三角函数表等,这在过去是作为中学生的一个基本技能来要求的.现在,我们有了计算器和计算机,那么,能正确地、自信地、适当地使用计算器或计算机这样的技能就替代了原来的查表技能.

本书对数学技能的探讨是在学习了曹才翰、章建跃、田万海、何小亚等先生的论著的基础上,做了一些探讨工作,在这其中,融合作者 40 余年教学体验.当然,深入地探讨也有待于

与同行们继续努力.在此,望得到专家、同行们的指教.

衷心感谢张莫宙教授在百忙中为本套丛书作序!

衷心感谢刘培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、李宏艳老师等诸位老师,是他们的大力支持,精心编辑,使得本书以这样的面目展现在读者面前!

衷心感谢我的同事邓汉元教授,我的朋友赵雄辉、欧阳新龙、黄仁寿,我的研究生羊明亮、吴仁芳、谢圣英、彭熹、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君、孔璐璐、邹宇、谢罗庚、彭云飞等对我写作工作的大力协助,还要感谢我的家人对我们写作的大力支持!

沈文选 杨清桃

2017年3月于岳麓山下

目录

CONTENTS

第一章 数学技能的含义、特征及训练

1.1 数学技能的含义	1
1.1.1 什么是数学技能	1
1.1.2 数学技能的组成因素	2
1.2 与数学技能有关的几个问题	5
1.2.1 数学技能与数学活动经验、数学知识的获得	8
1.2.2 数学技能与数学知识的应用	9
1.2.3 数学技能与数学能力	9
1.2.4 数学技能与数学活动的控制	9
1.2.5 数学技能的特性	10
1.3 数学技能的特征	10
1.3.1 由数学活动对象的高度抽象性决定的特征	11
1.3.2 由数学语言所决定的特征	11
1.3.3 由数学活动结构的性质决定的特征	11
1.3.4 数学技能与数学思维方法(认知策略)的比较	12
1.4 数学技能的训练	12
1.4.1 数学技能的形成过程	12
1.4.2 数学技能训练的规律	14
1.4.3 数学技能训练的途径和方法	15

第二章 数学注意和数学观察

2.1 数学注意技能	16
2.1.1 关注注意的广度	16
2.1.2 关注注意的稳定性	19
2.1.3 关注注意的分配	21
2.1.4 关注注意的转移	22
2.2 数学观察技能	30
2.2.1 关注观察的目的性	31
2.2.2 关注观察的客观性	32
2.2.3 关注观察的全面性	35
2.2.4 关注观察的精确性	37
2.2.5 关注观察的深刻性	39
2.2.6 关注观察的直感性	47

第三章 数学理解和数学记忆

3.1 数学理解技能	52
3.1.1 数学理解可借助丰富的感性材料	55
3.1.2 数学理解可借助合适的问题情境	55
3.1.3 数学理解要抓本质和规律的揭示	57
3.1.4 数学理解要抓联系与应用	60
3.1.5 数学理解要植根于数学知识网络之中	67
3.2 数学记忆技能	71
3.2.1 善于运用各种形式的记忆	72
3.2.2 理解是记忆的基础	80
3.2.3 背诵是记忆的手段	81
3.2.4 思辩是记忆的益友	89
3.2.5 重复是记忆的窍门	93
3.2.6 趣味是记忆的媒介	94
3.2.7 联想是记忆的延伸	96
3.2.8 简化是记忆的助手	103
3.2.9 模拟是记忆的恩人	104

第四章 数学计算和数学推理

4.1 数学计算技能	107
4.1.1 数学估算的方式及应用	107
4.1.2 数学妙算方式及应用	110
4.1.3 数学运算技能的内涵和技能培养	114
4.1.4 会算、会少算、也要会不算	116
4.1.5 发挥恒等变形运算在解题中的作用	120
4.1.6 关注“算两次”	123
4.2 数学推理技能	127
4.2.1 演绎推理	127
4.2.2 归纳推理	132
4.2.3 类比推理	140
4.2.4 递推推理	148
4.2.5 逆向推理	150

第五章 数学阅读和数学概括

5.1 数学阅读技能	154
5.1.1 对数学概念、定义精细读与批注	156
5.1.2 对数学定理、公式、法则推敲读与批注	156
5.1.3 对课本例、习题的变式读与批注	157
5.1.4 对章节小结的联系读与批注	158
5.1.5 对数学语言的阅读与转换	159
5.1.6 对阅读有关数学问题进行自我检验	165

目录 CONTENTS

5.2 数学概括技能	167
5.2.1 数学概括要关注的几点	168
5.2.2 对数学阅读的内容进行要点提炼	169
5.2.3 对数学学习的阶段内容进行小结	173
5.2.4 对一类数学对象的特点、规律、关系等进行归纳揭示	174

第六章 数学论证和数学实验

6.1 数学论证技能	182
6.1.1 熟悉数学论证主要方法	182
6.1.2 善用数学论证重要技术	196
6.2 数学实验技能	208
6.2.1 数学实验要善于就地取材	209
6.2.2 数学实验可作为一种学习方式	213
6.2.3 数学实验要充分运用信息技术	214

第七章 数学作图和数学建模

7.1 数学作图技能	219
7.1.1 了解几何作图的含义及基本知识	219
7.1.2 熟悉常用的平面几何作图方法	220
7.1.3 作立体几何图形	222
7.1.4 作简单统计图	223
7.2 数学建模技能	225
7.2.1 认识数学模型方法	225
7.2.2 理解数学建模的含义与步骤	238

第八章 数学审美和数学写作

8.1 数学审美技能	243
8.1.1 认识数学美的呈现形式	244
8.1.2 关注数学美的熏陶方式	251
8.1.3 把握数学美的审视要素	254
8.1.4 了解数学美的审视层次	258
8.2 数学写作技能	259
8.2.1 认识数学写作的价值	259
8.2.2 关注数学写作的要点	268
参考文献	275
作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录	276
编后语	279

第一章 数学技能的含义、特征及训练

数学学习不仅要让学习者学好数学基础知识,而且还要培养学习者有一定的数学基本技能.这就是常说的“双基”问题.那么数学技能的组成因素是什么?有何特征?有什么样的作用?如何培训呢?这是我们在这一章中要讨论的问题.

1.1 数学技能的含义

1.1.1 什么是数学技能

什么是技能?“技”与常说的“技艺”“技巧”“技术”密切相关;显然,“能”与常说的“能力”“才能”密切相关.技能就是顺利完成某种任务按照一定的程序或步骤进行的一种认知活动方式或行为活动方式,它是通过练习获得的.也就是说,技能是完成某种任务所需要的,是一种活动方式(认知或行为),是需要练习的.

数学技能是顺利完成数学任务按照一定的程序或步骤进行的一种数学认知活动方式或数学行为活动方式.数学技能往往表现为完成数学任务所需要的动作协调和自动化,这种活动是按照一定的程序或步骤完成的,它可以是外显的行为操作,也可以是头脑中的思维操作.外显的行为操作常称为外显动作技能,头脑中的思维操作常称为心智技能.

例如,学习者一旦掌握了求解一元一次方程的技能,当他遇到像解 $\frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{3} + 1$ 这样的方程时,用不着有意识思考,就能按照解一元一次方程的步骤,自动化地进行一系列准确、协调的操作,迅速求出方程的解 $x=11$.在这种求解方程的活动中,既有外显动作技能,也有心智技能,但主要的是心智技能,进行推演、运算.

在完成某一数学活动时,涉及一系列外部可见的实际动作,这些动作有顺序地组织起来并顺利地进行时,就成为外显动作技能.例如作图的技能、操作计算器的技能都是外显动作技能.外显动作技能主要靠肌肉、骨骼运动以及与之相应的神经系统部分的活动.

内部心智技能是顺利完成某一项数学活动的心智活动方式,是指借助内部言语在头脑中进行的认识活动,它包括感觉、知觉、想象、思维等.在遇到具体数学问题时,这些心理活动便按一定合理、完善的方式进行,这就是内部的心智技能.正确的思维方式、方法是心智技能的本质特征.例如,学习者掌握了列方程解应用题的技能,一旦遇到某个应用题时,便能按下列步骤顺利地进行:审题——设未知数——布列方程——解方程——检验——写答案.这就是列方程解应用题过程中的内部心智技能.

外显动作技能和内部心智技能都是对一系列行为方式的概括,都是以一定的程序或步骤组织起来的合理且完善的行为方式,所不同的是前者的操作是外显的,可见的;后者的操作是在头脑中进行的,是内稳的,不可见的.

外显动作技能与内部心智技能之间有着密切的联系,外显动作技能是内部心智技能的体现,而内部心智技能对外显动作技能起调节作用.在数学学习活动中,两者既有各自的功

能,又必须联合发挥作用。

例如,应用尺规作图的技能就是外显动作技能和内部心智技能的协调统一,并直接决定于学习者对作图工具使用的熟练程度以及对作图规则的理解水平。

心智技能是一种心智活动方式,若区别于外显动作活动方式,就心智活动来说,它有以下三方面的特点:

(1)操作对象的观念特点. 外显动作活动的对象是物质的,具有客观性. 心智活动的对象是客体在人脑中的主观映象,是客观事物的主观表征,是知识、信息. 心智活动就是对客观事物的主观表征的加工改造过程. 而客观事物的主观表征是具有主观性的,属于观念的范畴. 因此,心智活动可以看成是对观念的加工改造活动,具有观念特点:外显动作活动是对物质的加工改造活动,具有物质特点。

(2)操作执行的内潜特点. 动作活动可以以外显的形式通过肢体运动来实现,言语活动则可以通过声音而觉察活动的存在. 心智活动的实现则是通过内部言语进行的,只能通过其作用对象的变化而判断活动的存在. 因此,心智活动的执行是在头脑内部进行的,具有内潜特点。

(3)操作结构的简缩特点. 由于内部言语可以是不完全的、片断的,因此心智活动可以合并、省略或简化,这样,心智活动就具有简缩特点。

所以,我们可以把心智活动定义为:在人脑内部,借助于内部言语,以简缩的形式对事物的主观表征进行加工、改造的过程。

1.1.2 数学技能的组成因素

数学技能虽可以分为外显动作技能和心智技能两种,但主要是心智技能. 既然数学技能在任何数学活动中都会得到训练和培养,也会在数学活动中发挥作用,那么我们就可以通过考察数学活动过程来认识数学技能的组成因素。

首先,运算、作图、推演、论证是四种基本的数学活动. 因此,能算、会作图和会推演、论证是四种基本的数学技能. 这里,运算技能是指能正确运用各种概念、公式、法则进行数学运算,作代数变换,包括对算法的选择以及对所采用算法合理性的判断,还包括达到一定的运算速度. 运算包含根据法则进行的精确计算、心算和估算. 作图技能是指根据数学语言和题意,能准确、直观地作出几何图形,这里要注意的是,作图技能不仅是一种动作技能,对于数学中的作图来说,更重要的是在头脑中想象图形的基本结构,按一定的方式来合理地、完善地组织作图步骤,考虑图形中各元素(点、线和面)的位置、大小及其关系. 显然,这些都属于心智技能的范畴. 推演技能是指根据具体内容所规定的程序与步骤进行逻辑推导. 因此,从技能培养的角度来说,数学学习目标中,就应该包含知识中所内涵的关于知识应用的程序与步骤. 数学中的推理论证是数学的显著特色. 另外,推演技能中还包含了正确、简捷地表述思想,其中,在推演过程中适当地使用数学变式来帮助推导则可以看成是突出地反映了数学特点的技能. 如:^①已知

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

① 田万海. 数学教育学[M]. 杭州:浙江教育出版社,1999:214.

且 $x+y+z=1$, 求证: x, y, z 中必有一个为 -1 .

这个题目的已知条件中 x, y, z 是三个分式, 它们很像余弦定理的变式, 于是有的学习者自然会想到作如下的三角代换: $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$, 认为“ a, b, c 是三角形的三条边, x, y, z 是三角形三个内角的余弦.”这就是在原题中外加了一些条件, 当然不会证得题目的结论.

对这个题目, 如果将 x, y, z 代入 $x+y+z=1$, 可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1$$

然后经过较复杂的分式运算, 再因式分解, 便有

$$(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) = 0$$

于是可证得结论. 但运算繁复, 显然不是理想的推演. 我们可以进一步把已知条件变为

$$bx = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, ay = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c}, \text{ 于是 } bx+ay=c. \text{ 同理 } cy+bz=a. \text{ 这就有}$$

$$\begin{cases} bx+ay=c & \textcircled{1} \\ cy+bz=a & \textcircled{2} \\ x+y+z=1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

①+②, 并将③代入, 得

$$(a+c-b)y = a+c-b$$

当 $a+c-b \neq 0$ 时, $y=1$. 这时有

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = 1$$

于是 $(c-a-b)(c-a+b)=0$, 所以, 若 $c-a-b=0$, 则 $z=-1$; 若 $c-a+b=0$, 则 $x=-1$.

当 $a+c-b=0$ 时, $a^2+c^2-b^2=-2ac$, 所以 $y=-1$.

从上例, 我们也可以看到: 推演中含有恰当地模仿, 适时地转换, 灵活地变形, 有效地构造, 逻辑地论证.

其次, 注意、观察、阅读、记忆等是数学活动的重要成分, 数学交流更离不开它们, 也是学好数学的重要条件. 我们也应视其为数学技能的组成因素.

在数学活动中, 不管是学习新知识还是解决新问题, 都要从注意开始. 注意力的强弱极大地影响着数学活动的效果.

在数学活动中, 对数学符号、几何图形的识别, 数学关系的发现, 联想的展开, 以及进行抽象与概括、对比与类比、归纳与演绎、分析与综合等都离不开数学观察.

阅读数学教科书和练习册, 阅读参考书等是数学学习的又一基本活动方式. 在阅读的过程中, 就涉及如何掌握阅读的节奏; 哪些地方应该精读, 哪些地方可以泛读; 如何阅读才能更加有利于发现问题; 阅读中如何才能抓住关键; 应该如何进行阅读的检查; 等等. 这些说明, 阅读中是存在技能问题的, 如果没有阅读的技能 and 技巧, 往往会事无巨细, 平均使用力量, 使重点内容、关键思想淹没在细节之中; 或者是“走马观花”, 抓不住重点和要害. 例如, 关于分类加法计数原理和分步乘法计数原理的阅读, 就定义来说, 几乎是常识, 学习者在阅读时一般会认为内容简单、道理浅显, 因此常常认为一读就懂. 但实践表明, 问题并不这样简单, 在解决具体问题时, 许多学习者都会在“完成一件事情”中的这件“事情”到底指什么产生错

误。例如,“乘积 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ 展开后共有多少项?”中的“一件事情”往往被学习者认为是“把乘积展开”,而不知道这件事情是“写出展开式的一项”;“求10 800的不同正因数的个数”中的“一件事情”是“求……的个数”;等等。

良好的记忆是认知的必要条件之一,拥有数学记忆力是学好数学的重要条件之一。有记忆才能产生联想,才能进行灵活地思考,记忆是需要技能的。

另外,与数学交流活动相关的,还有听、说、利用信息技术等。实际上,听、说、利用信息技术等是我们日常生活中的基本心智活动方式。因此,在分析数学技能组成因素时,也应考虑到这些方面。这是因为,我们在前面界定数学技能时,讲的是为了顺利完成数学任务的数学活动方式就是数学技能的范畴。

在数学学习活动中,学习者一般要听课,也要听同学关于数学知识理解的叙述,要使听的效果理想,就要有听的技能。例如听的过程中如何才能使自己的思路与指导者保持同步;如何才能更好地领会指导者的讲解;遇到不懂的地方应该怎么办;如何回答他人的问题;如何向他人提出问题;等等。另外,还要学会倾听同学的见解。

数学学习的另一项活动方式是“说”,对数学情境进行描述,用自己的语言对数学的概念、定理、法则、定义等作出解释,向指导者和同学准确地提出问题(使问题易于被他人理解),对指导者和同学谈论自己遇到的困难,与指导者和同学开展讨论,学会提问、答问、论述、证明和反驳、作出有关数学活动的口头或书面报告,都涉及“说”的技能。在学习者的学习活动中经常会出现这样的情况:心里明白到底是怎么回事,但就是表达不出来,其中的原因,除了没有完全理解相关数学知识外,不能很好地把相关知识巧妙地组织起来并用恰当的语言表述,恐怕也是主要原因之一。^①

分析数学技能的组成因素时,还要考虑到信息技术的利用。与工具的进步成为社会进步的标志一样,利用信息技术进行数学学习是一种进步。信息技术是一种认知工具,延伸了大脑的思维,是改进数学学习的强大平台。它不仅是强大的计算工具、作图工具,收集信息、处理数据的工具,而且能构建“多元联系表示”的学习环境,使抽象的数学对象得到形象化地、动态地表示,使得抽象的数学变成“可操作”的,像物理实验、化学实验一样,可以借助信息技术进行“数学实验”,从而给学习者的数学认知活动提供强大的支持,使学习者更容易地感受到数学知识的形成过程。“看出”相关概念之间的联系,从而更好地理解数学,提高解决问题的能力,并在技术的帮助下去发现一些新的结论——创造性地学数学。因此信息技术是为学习者“开启数学之门”的金钥匙。所以,使用信息技术进行计算、作图、收集数据、处理数据、进行“数学实验”等都是与信息技术相关的技能,这里当然包括操作信息技术的技能和熟练运用软件的技能,以及简单的计算机编程技能。

基于如上数学技能组成因素的分析,因而,在本书中,我们将讨论如下数学技能的操握:

- 数学注意和数学观察;
- 数学理解和数学记忆;
- 数学计算和数学推理;
- 数学阅读和数学概括;
- 数学论证和数学实验;

① 曹才翰,章建跃.数学教育心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2006:223-224.