国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

Beatty Theorem and Lambek-Moser Theorem

Beatty定理与Lambek-Moser定理

佩捷　严华祥　编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编　王梓坤

Beatty Theorem and Lambek-Moser Theorem

Beatty定理与Lambek-Moser定理

佩捷　严华祥　编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一个拣石子游戏开始来介绍贝蒂定理与拉姆贝克一莫斯尔定理，并配有多道经典试题.

本书适合大中学生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Beatty定理与Lambek-Moser定理/佩捷，严华祥编著. 一哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.2

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978－7－5603－6439－1

Ⅰ.①B… Ⅱ.①佩… ②严… Ⅲ.①贝蒂数 Ⅳ.①O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第006802号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李 鹏 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张9.75 字数116千字
版 次 2017年2月第1版 2017年2月第1次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－6439－1
定 价 78.00元

◎代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学官殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理.浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭.吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了.屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看.封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢，且往下看.第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心中的女

英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多的

“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”许多

大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物．涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此．曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人．他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关．

王梓坤

目录

§0 引　　子

受普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的威廉·罗韦尔·普特南数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition),其试题由名家组成的命题委员会制定,背景深刻,极富独创性,为国际数学界所瞩目.

在第20届普特南数学竞赛中有一道试题为:

试题1　设正无理数α与β满足下列等式

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \tag{1}$$

求证:两序列$\{[n\alpha]\}$,$\{[n\beta]\}$合在一起恰好不重复地构成自然数集,记号$[x]$表示不超过x的最大整数.

正如美国和加拿大数学奥林匹克的主教练M.S.Klamkin所指出:“数学竞赛试题的一种产生方法就是将某些不那么新的数学论文中的漂亮结果加以改造.”而上面的题目正是用此法炮制的.1926年加拿大多伦多大学的S·贝蒂(Sam Beatty)发现了如下的贝蒂定理:

贝蒂定理　设x是任何一个正的无理数,y是它的倒数,那么两个序列$\{n(1+x)\}$,$\{n(1+y)\}$合起来,恰好包含了每对相邻正整数构成的区间$(n,n+1)$中的一个数.

显然前面的题目是贝蒂定理的一个推论,因为如

果设 $\alpha=1+x,\beta=1+y$,则

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x}=1$$

§1　题目的证明

1927 年,由 A·M·奥斯特洛夫斯基(Ostrowski)与A·C·艾特肯(Aitken) 给出了贝蒂定理的一个简洁的证明,仿此思路我们也给出前述竞赛题的一个证明.

证法 1　我们只需证:任何自然数 k,不在$\{[n\alpha]\}$中出现一次,就在$\{[n\beta]\}$中出现一次,二者必居其一.

显然 $[n\alpha]\in\mathbf{N},[n\beta]\in\mathbf{N}(n=1,2,\cdots)$,定义

$$p=\max\{n\mid [n\alpha]\leqslant k\}$$
$$q=\max\{n\mid [n\beta]\leqslant k\}$$

即 p,q 是两序列$\{[n\alpha]\}$和$\{[n\beta]\}$中不超过 k 的正整数的个数,由式(1) 有 $\alpha>1,\beta>1$,所以

$$[p\alpha]\leqslant k\leqslant[(p+1)\alpha]\Rightarrow p\alpha<k+1<(p+1)\alpha\Rightarrow$$

$$p<\frac{k+1}{\alpha}<p+1 \tag{2}$$

同理可得

$$q<\frac{k+1}{\beta}<q+1 \tag{3}$$

式(2) + 式(3) 并注意到式(1) 有

$$p+q<k+1<p+q+2\Rightarrow p+q-1<k<$$

$$p+q+1 \Rightarrow p+q=k$$

这即是说，在$\{[n\alpha]\}$和$\{[n\beta]\}$中，不超过k的正整数恰好共有k个，但由k的任意性，可知，其中不大于$k-1(k>1)$的正整数也恰好共有$k-1$个，于是比较两者可知，在$\{[n\alpha]\}$和$\{[n\beta]\}$中大于$k-1$而不大于k的正整数有且仅有一个，它正好是k.

证法 2 我们只需证$\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$两序列满足：

i) 严格单调递增；ii) 两序列的项不重复；iii) 两序列合起来后不漏掉任何一个自然数.

先证 i)，显然$\alpha>1$，$\beta>1$，所以

$$[(n+1)\alpha]=[n\alpha+\alpha]\geqslant[n\alpha]+[\alpha]\geqslant [n\alpha]+1>[n\alpha]$$

这说明$\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$均严格单调递增.

ii) 用反证法：假设存在$k,l\in\mathbf{N}$，使得$[k\alpha]$，$[l\beta]$表示同一个自然数p，于是注意到α,β是无理数，可得$p<k\alpha<p+1$，$p<l\beta<p+1$，由此可得

$$\frac{k}{p+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{k}{p}$$

$$\frac{1}{p+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{p}$$

两式相加得

$$\frac{k+1}{p+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{k+1}{p}\Rightarrow p<k+l<p+1$$

后一不等式是不可能的，因为在两连续自然数p，$p+1$中不可能再“夹”一个自然数$k+l$.

iii) 亦用反证法：假设存在一个自然数q不在两序列中，则也会找到两个$k,l\in\mathbf{N}$，使得

$$k\alpha<q<q+1<(k+1)\alpha$$

$$l\beta < q < q+1 < (l+1)\beta$$

由此可得

$$\frac{k}{q}+\frac{l}{q}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{k+1}{q+1}+\frac{l+1}{q+1}$$

所以有

$$k+l<q<q+1<k+l+2$$

这相当于在两“间距”为2的自然数$k+l$和$k+l+2$中“夹”有两个自然数q和$q+1$,而这是不可能的.

综合 i)、ii)、iii) 可知命题成立.

§2 题目的加强

本节我们将α,β是无理数这一限制取消,而代之以任意不等于1的实数,也可得到和题目相同的结果.我们首先引入一个记号$[x]^-$,其定义为:当x不是整数时为$[x]$;当x是整数时为$[x]-1$.我们有如下的:

定理1 若$\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1$,则每一正整数在下列两序列$\{[m\alpha]\}$和$\{[n\beta]^-\}$中恰好出现一次的充要条件是

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

证明 1) 必要性.若$k\in\mathbf{Z}_+$,则满足不等式

$$0<m\alpha<k+1,0<n\beta\leqslant k+1$$

的正整数m与n之和M为

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

而显见

$$\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}-2<M<\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}$$

若$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\theta$,则上式左、右两端的数分别为$(k+1)\theta-2$和$(k+1)\theta$. 以下证$\theta=1$.

i) 若$\theta<1$,则当k充分大时,$(k+1)\theta<k$,即$M<k$,这表明在$\{[m\alpha]\}$和$\{[n\beta]^-\}$内不超过k的项不到k个,亦即在前k个正整数之中至少有一个不在$\{[m\alpha]\}$和$\{[n\beta]^-\}$内,与题设矛盾.

ii) 若$\theta>1$,则当k充分大时,$(k+1)\theta-2=k+(\theta-1)k+\theta-2>k$,即$M>k$,故在$\{[m\alpha]\}$和$\{[n\beta]^-\}$的项中其值不超过$k$的项比$k$多,由此可见,在前$k$个正整数中至少有一个在$\{[m\alpha]\}$和$\{[n\beta]^-\}$中不止出现一次. 必要性得证.

2) 充分性. 设$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,则

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k+1-\frac{k+1}{\alpha}\right]=$$
$$\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k-(\frac{k+1}{\alpha})\right]=$$
$$\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+k-\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-=k$$

故在$\{[m\alpha]\}$,$\{[n\beta]^-\}$内其值不超过k的项数为k,同时由k的任意性中其值不超过$k-1$的项数为$k-1$,故其值为k的项数是1.

综合1)、2)命题得证.

我们还可以将上述定理推广为:

定理2(闵嗣鹤) 设 i)$\alpha(0)\geqslant 1$,$\beta(1)\geqslant 0$;ii) 当$x\geqslant 1$时,$\alpha(x)$和$\beta(x)$都是关于x的严格递增函数;iii) 若$\alpha^{-1}(x)$和$\beta^{-1}(x)$分别为$\alpha(x)$和$\beta(x)$的反函数,且$\alpha^{-1}(x)+\beta^{-1}(x)=lx\,(l\in\mathbf{N})$,则每一个正整数

一定在两个序列$\{[\alpha(n)]\}$,$\{[\beta(n)]^-\}$内恰好出现 l 次,而 0 则恰好出现 $l-1$ 次.

证明 适合 $\alpha(n)<k$ 或 $\beta(n)\leqslant k+1(k\in\mathbf{Z}_+)$ 的正整数 n 就是适合 $n<\alpha^{-1}(k+1)$ 或 $n\leqslant\beta^{-1}(k+1)$ 的正整数. 这样的正整数显然共有 $[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[\beta^{-1}(k+1)]$ 个. 由 iii),上式又可写成

$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[l(k+1)-[\alpha^{-1}(k+1)]]=$$
$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[l(k+1)-1-[\alpha^{-1}(k+1)]^-]=$$
$$l(k+1)-1$$

这正是在$\{[\alpha(n)]\}$,$\{[\beta(n)]^-\}$中其值不超过 k 的项数.

i) 若 $k>0$,则$\{[\alpha(n)]\}$,$\{[\beta(n)]^-\}$内其值不超过 $k-1$ 的项数应是 $lk-1$,故在两序列中其值为 k 的项数为

$$l(k+1)-1-(lk-1)=l$$

ii) 若 $k=0$,则在两序列$\{[\alpha(n)]\}$,$\{[\beta(n)]^-\}$中其值为 k 的项数,显然为

$$[\alpha^{-1}(1)]+[\beta^{-1}(1)]=l-1$$

作为定理 2 的一个推论,我们还有如下的:

定理 3 若 α,β,γ 都是正数,则每一正整数在以下两序列$\{[\alpha(\frac{n}{\beta})^\gamma+n]\}$,$\{[\beta(\frac{n}{\alpha})^{\frac{1}{\gamma}}+n]^-\}$中恰好出现一次.

请读者仿定理 2 自己给出证明.

有趣的是在第 26 届国际数学奥林匹克的候选题中也出现了类似于定理 1 的命题. 现将它写出来作为:

定理 4 对实数 x,y 令

$$S(x,y)=\{S\mid S=[nx+y],n\in\mathbf{N}\}$$