考研直通车系列

2019版

考研数学二十讲

KAOYAN SHUXUE ERSHI JIANG

主编　贺金陵

復旦大學出版社

考研数学二十讲

KAOYAN SHUXUE ERSHI JIANG

主编　贺金陵

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学二十讲:2019版/贺金陵主编.—上海:复旦大学出版社,2017.6(2018.7重印)
(考研直通车系列)
ISBN 978-7-309-12910-6

Ⅰ.考… Ⅱ.贺… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第063555号

考研数学二十讲:2019版
贺金陵 主编
责任编辑/张志军

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143 出版部电话:86-21-65642845
浙江省临安市曙光印务有限公司

开本787×1092 1/16 印张26.75 字数650千
2018年7月第1版第2次印刷

ISBN 978-7-309-12910-6/O·625
定价:58.00元

前言 Preface

随着我国高等教育事业的发展,近几年报考硕士研究生的人数越来越多。在2016年考研人数上涨的基础上,2017年报考人数再次上涨,达到了201万人,2018年则达到238万人,再创历史记录!考生最关心的问题是:如何在较短的时间内按照考试大纲的要求来提高复习效率,取得理想的考试成绩。考虑到考研数学的特殊性(有数学一、二以及三之分,而且考试内容、难度等均有所差异),在认真总结了多年教学以及考研复习辅导经验、深入研究历年考试题型和考试大纲的基础上,特意编写了《考研数学二十讲》这本书。

本书具有以下几个鲜明特点:

(1) 由于硕士研究生入学数学考试有数学一(主要是报考理工科)、数学二(主要是报考农学)以及数学三(主要是报考经济学)之分,考生需要先弄清楚所要考试的种类。考虑到考试内容、难度、侧重点上有比较大的区别,为方便读者高效、合理地使用本书,在内容编排上,特意将大部分共同内容安排在前二十讲,而将一些交叉的知识点(如数学一以及数学二中的曲率)、特有的知识点(如数学三中的一元函数微分学在经济学中的应用)以附录的形式安排在后面,且在标题后面加以标示。因此,读者可以方便地找到所要考试种类相应的知识点。

(2) 为了缩短考生复习的时间,帮助考生掌握基本概念、基本理论以及基本解题方法,在每一章的例题或者课后练习题部分均使用了较多的历年硕士研究生入学考试真题(80%以上)。考生可以先做题,接着看参考解答,做每一讲安排的课后练习题,再以思考回顾的方式加强训练。考生只要掌握了一整套基本解题方法以及特殊题型的特殊解法,达到考试大纲规定的要求,便可取得理想的成绩。

(3) 每一章例题的题目以及解答是分开的,防止了既有解答对读者的干扰。建议阅读本书时,先独立去思考每一道例题,然后再参阅参考解答,养成良好的学习习惯。读者可以充分利用这部分典型例题以及习题,有针对性地掌握常考知识点部分内容,以提高分析问题、解决问题的能力。

(4) 例题部分使用了笔者改编或者引申的新题目，相信对于提高读者的解题能力大有裨益，希望读者在使用本书的时候，带着自己的思维方式去使用它们，不应受到本书解答思路的约束。

(5) 在每一章的最后，均编排了课后习题及其参考解答，可以作为例题的补充或者延续。

本书不仅可以作为硕士研究生入学数学考试的辅导用书，也可用作本科阶段学习高等数学、线性代数以及概率论与数理统计等课程的教辅用书。

在本书编写过程中，得到了复旦大学出版社的大力支持，在此表示诚挚的感谢！

由于编者水平和时间的限制，书中一定还有不少错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正，欢迎提出您的宝贵意见或者建议！

编　者

2017 年 3 月　于同济大学

目 录 Contents

第一部分

第二部分

第三部分

则称常数 a 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$。

（2）自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 a，使得对于任意的正数 ε，存在正常数 X，使得当 $|x| > X$ 时，$f(x)$ 都满足

$$|f(x) - a| < \varepsilon,$$

则称常数 a 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$。

（3）左右极限

在函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 定义中，将 $x \to x_0$ 改为当 $x \to x_0$ 且 $x < x_0$ 时，所得到的极限称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**，记为 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$；类似地，可得**右极限**，记为 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ 的定义。左右极限统称单侧极限，且有如下命题：

① **命题** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = a$。

类似地，可得 $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ 和 $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ 的定义以及如下命题：

② **命题** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow f(+\infty) = f(-\infty) = a$。

（4）函数极限的性质

有唯一性、有界性、局部保号性、函数极限与数列极限的关系（归并原理）。

① **唯一性** 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则极限必唯一。

② **有界性** 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则存在点 x_0 的某个去心邻域，函数在该邻域内有界。

③ **局部保号性** 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a > 0$，则存在点 x_0 的某个去心邻域，函数在该邻域内总有 $f(x) > 0$。

④ **归并原理** 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 存在，则对于任一收敛于点 x_0 且异于 x_0 的数列 x_n，总有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$。

注：其他极限变化趋势下有类似的性质。

3. 无穷小与无穷大

（1）无穷小与无穷大的定义

若 $\lim f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的无穷小量；若 $\lim f(x) = \infty$，则称函数 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的无穷大量。数列也有类似的定义。

（2）无穷小的比较

设 α，β 为自变量 x 在某个变化过程中的无穷小，如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$；如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c\,(c \neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c\,(c \neq 0,\ k > 0)$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；特别地，若

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$。

(3) 等价无穷小替换

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$ 且极限 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 也存在且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$。

(4) 常见等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$a^x - 1 \sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$，$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$，$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$。

4. 求证极限的常用方法

(1) 换元以及初等变形

(2) 等价无穷小替换

(3) 极限存在准则

① **准则 1**　设数列 x_n，y_n，z_n 满足 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$；

② **准则 2**　设数列 x_n 单调有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

(4) 洛必达法则

(5) 泰勒定理

(6) 定积分的定义

(7) 利用无穷级数

(8) 利用常见结论

5. 函数的连续性以及间断点

(1) 函数的连续性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**；若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点处连续，则称函数在区间 I 上连续。

(2) 函数的间断点及其分类

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**。

分类　设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在但是不相等，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**。将可去间断点与跳跃间断点称为**第一类间断点**；其余间断点称为**第二类间断点**。如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的**无穷间断点**。

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

(2) 最大值最小值定理

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可以取到最大值以及最小值。

(3) 零点定理

设 $f(x)$是闭区间$[a, b]$上的连续函数，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a, b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

(4) 介值定理

设 $f(x)$是闭区间$[a, b]$上的连续函数，M 和 m 分别是函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上的最大值和最小值，c 是介于最大值与最小值之间的任意实数，则存在 $\xi\in[a, b]$ 使得 $f(\xi)=c$。

二、习题一

1. 以下 4 个命题中正确的是(　　)。

(A) 若 $f'(x)$在$(0, 1)$内连续，则 $f(x)$在$(0, 1)$内有界

(B) 若 $f(x)$在$(0, 1)$内连续，则 $f(x)$在$(0, 1)$内有界

(C) 若 $f'(x)$在$(0, 1)$内有界，则 $f(x)$在$(0, 1)$内有界

(D) 若 $f(x)$在$(0, 1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0, 1)$内有界

2. 函数 $f(x)=\dfrac{4+e^{\frac{1}{x}}}{2-e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin|x|}{x}$ 的间断点个数和渐近线条数分别是(　　)。

(A) 1, 2　　(B) 2, 2　　(C) 1, 3　　(D) 2, 3

3. 下列结论正确的是(　　)。

(A) $x\sin\dfrac{1}{x}$在$(0, +\infty)$上无界

(B) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$为无穷大量

(C) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 在$(0, 2\,010]$上无界

(D) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0, +\infty)$上无界

4. 设函数 $f(x)$连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　)。

(A) $f(x)$在$(0, \delta)$内单调增加

(B) $f(x)$在$(-\delta, 0)$内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0, \delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(D) 对任意的 $x\in(-\delta, 0)$ 有 $f(x)>f(0)$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列(　　)区间上有界。

(A) $(-1, 0)$　　(B) $(0, 1)$　　(C) $(1, 2)$　　(D) $(2, 3)$

6. “对任意给定的 $\varepsilon\in(0, 1)$，总存在正数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 x_n 收敛于 a 的(　　)。

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

7. 设对任意的 x 总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)。

(A) 存在且等于于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

8. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+6}{x^2}$ 等于(　　)。

(A) 0　　(B) 6　　(C) 36　　(D) ∞

9. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高

阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

10. 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan t \mathrm{d}t$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin^3 t \mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　)。

(A) α, β, γ　　(B) α, γ, β　　(C) β, α, γ　　(D) β, γ, α

11. 已知当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则(　　)。

(A) $k = 1, c = 4$　　(B) $k = 1, c = -4$　　(C) $k = 3, c = 4$　　(D) $k = 3, c = -4$

12. 当 $x \to 0$ 时,用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是(　　)。

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$　　(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

13. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点个数为(　　)。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

14. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上各有且仅有 3 个间断点 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$,则复合函数 $f(g(x))$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上(　　)。

(A) 有 3 个间断点　　(B) 有 6 个间断点

(C) 有 9 个间断点　　(D) 可以有无穷多个间断点

15. 函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数是(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$ ________。

17. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} =$ ________。

18. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right] =$ ________。

19. 当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则常数 $k =$ ________。

20. 设当 $x \to 1$ 时,$1 - \dfrac{m}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}}$ 与 $x - 1$ 是等价无穷小,则 $m =$ ________。

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

22. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$。

23. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right]$。

24. 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a。

25. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$,记 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

(1) 求 a 的值;

(2) 若当 $x \to 0$ 时,$f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小,求常数 k 的值。

26. 试确定常数 A, B, C 的值,使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小。

27. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x=f(1)$。

28. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\times x\sin\dfrac{1}{x}\right)$。

29. 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$。

30. 设 $0<x_1<1$, $x_n=\int_0^1 \max(x_{n-1}, t)\mathrm{d}t$, $n=1, 2, \cdots$,证明 x_n 收敛并求极限。

31. 当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$ 最多为 x 的几阶无穷小?

32. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$, $x\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$,试补充定义 $f(0)$,使得 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 上连续。

33. 设数列 x_n 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}\leqslant 1$,证明数列 x_n 收敛并求极限。

34. 设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n (n=1, 2, \cdots)$。

(1) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求该极限; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

35. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$。

36. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$,证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在最大值。

37. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,证明存在 $\xi\in(-\infty, +\infty)$,使得 $f(\xi)+\xi=0$。

38. 设函数 $f(x)\in C[a, b]$,且对任意 $x\in[a, b]$,存在 $y\in[a, b]$,使 $\left|f(y)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left|f(x)\right|$。试证存在 $\xi\in[a, b]$,使得 $f(\xi)=0$。

39. 证明递归数列 $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}$, $n=1, 2, \cdots$ 收敛,并求极限。

40. 若 a_n 是正数数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=0$,试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=0$。

41. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=1-e^{-x_n}$, $n=1, 2, 3, \cdots$,证明 x_n 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\cdot x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$。

三、习题一的解答与分析

1. 解一 直接法 由于 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界,不妨设 $|f'(x)|\leqslant M$。对于任意 $x\in(0, 1)$,由拉格朗日中值定理,则

$$f(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right),$$

因而
$$|f(x)|=\left|f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|。$$

所以，$f(x)$在$(0,1)$内有界，故选(C)。

解二　排除法　令 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$。显然，$f'(x)$和 $f(x)$都在$(0,1)$内连续，但 $f(x)$在$(0,1)$内无界，则(A)(B)都不正确。

令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在$(0,1)$内无界，则(D)也不正确，故应选(C)。

2. 显然当 $x=\frac{2}{\ln 2}$ 或者 $x=0$ 时，函数 $f(x)$没有定义，它们是间断点。

先考虑垂直渐近线，由于 $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\ln 2}}f(x)=\infty$，故 $x=\frac{2}{\ln 2}$ 为其垂直渐近线；而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0+1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2-1=1$，故直线 $x=0$ 不是垂直渐近线。

再考虑水平渐近线，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=5$，故 $y=5$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

最后考虑斜渐近线，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，故曲线 $y=f(x)$ 没有斜渐近线。

综上，选择(B)。

注：曲线的渐近线应该考虑垂直、水平，以及斜渐近线。

3. **解一　直接法**对于(D)，记 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，若取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$，则有

$$f(x_n)=\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty。$$

故 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上无界，选(D)。

解二　排除法对于(A)，记 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，有 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$，且 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$，故 $x\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上有界，排除。

对于(B)，记 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=0\to 0$，故当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大量，排除。

对于(C)，记 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$，$x\in(0,2\,010]$，则 $f'(x)=\frac{\sin x}{x}$，此时有 $|f'(x)|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$，导函数在有限区间$(0,2\,010]$上有界，由第一题可知，$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 在$(0,2\,010]$上有

界，也排除。

4. 由已知条件 $f'(0)>0$，得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)>0$，结合函数极限的局部保号性，存在 $\delta>0$。当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，因而 $f(x)>f(0)$，选(C)。

注：选(A)是一种典型的错误，由 $f'(0)>0$，得不到一定存在原点的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增。反例如下：

令 $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1>0$，满足条件；但是当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$，若取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则有

$$f'(x_n)=1-2=-1<0,\ f'(y_n)=1+\frac{4}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}>0。$$

即在点 $x=0$ 的任何邻域内，既存在导数为正的点，也存在导数为负的点，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不会单调增加。

5. 由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$，即函数 $f(x)$ 在点 $x=1$，$x=2$ 的任一去心邻域中都无界。所以函数 $f(x)$ 只是在区间 $(-1,0)$ 内有界，因此正确答案为(A)。

6. 本题主要考查数列极限定义的理解，其定义是"对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$"，这与本题中的说法是等价的，故应选(C)。

7. 在此题中，不易直接判别哪一个答案正确，可考虑排除法。若令 $\varphi(x)=1-e^{-|x|}$，$g(x)=1+e^{-|x|}$，$f(x)=1$，则显然有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\ \lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=1,$$

可排除(A)(C)两个选项；若再取 $\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}$，$g(x)=e^{-|x|}+e^x$，$f(x)=e^x$，则显然有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\ \lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，因此(B)也可排除，选(D)。

注：由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，并不能直接推出 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在且相等。

8. 解一　利用泰勒公式　则

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\left[6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}-36=0,\text{故}\lim_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}=36。$$

解二　利用洛必达法则　由

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(xf(x)+6x)+(\sin 6x-6x)}{x^3}=0,$$

知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+6}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{3x^2}=36$。

解三　利用函数极限与无穷小之间的关系　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=0$ 知，当 $x\to0$ 时，$xf(x)+\sin 6x=o(x^3)$，有 $f(x)=-\dfrac{\sin 6x}{x}+o(x^2)$，此时

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=36。$$

解四　排除法　若令 $xf(x)+\sin 6x=0$，显然有

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=0,\text{且 } f(x)=-\frac{\sin 6x}{x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=36。$$

故应选(C)。

9. 因为当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是 x 的 4 阶无穷小，$e^{x^2}-1$ 是 x 的 2 阶无穷小，$x\sin x^n$ 是 x 的 $n+1$ 阶无穷小，因此 $2<n+1<4$，$n=2$，所以选(B)。

10. 解一　可直接判别每个无穷小的阶。由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\cos x^2=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\tan t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x\tan x^2}{4x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^{3/2}}{4x^{3/2}}=\frac{1}{4}。$$

即当 $x\to0^+$ 时，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 分别为 x 的 1 阶，4 阶，2 阶无穷小，由此选(B)。

解二　由于 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\cos x^2\to1,\ x\to0^+$，

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}=2x\tan x^2\sim2x^3,\ x\to0^+,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin\sqrt{x})^3\sim\frac{1}{2}x,\ x\to0^+,$$

且求导前后无穷小之间阶数的高低不会发生变化,因此正确的排序是 α, γ, β,故选(B)。

注:解二不需要求出每个无穷小的阶数。

11. **解一　利用泰勒公式**　由于

$$3\sin x-\sin 3x=3x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-3x+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)=4x^3+o(x^3),$$

因此 $k=3$, $c=4$。选 C。

解二　利用等价无穷小的定义　由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=1$,且

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}},$$

因此 $k=3$, $c=4$,选(C)。

12. **解一　直接法**　由于

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$,故 $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$,所以(A)对;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}=0$,故 $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$,所以(B)对;

类似地,可得(C)对,故选择(D)。

解二　排除法　取 $o(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $o(x^2)=x^3$,此时

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^3}{x^2}=\infty。$$

故当 $x\to0$ 时,$o(x)+o(x^2)\neq o(x^2)$,(D)错,选择(D)。

13. 容易看出,函数 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在点 $x=0$, $x=\pm1$ 处没有定义,为间断点。

且

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=1\quad(\lim_{x\to0}x\ln|x|=0),$$

$$\lim_{x\to1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\frac{1}{2}\quad(\lim_{x\to1}x\ln|x|=0),$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=-\lim_{x\to-1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{(x+1)\ln|x|}=-\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}\cdot\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}=\infty\quad(\lim_{x\to-1}x\ln|x|=0)。$$

所以,点 $x=0$, $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点,选(B)。

14. 本题需要构造函数,令

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3},\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin\pi x}, & \frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}\\ \sin x\pi, & x\leqslant\frac{1}{2},\ x\geqslant\frac{7}{2}\end{cases},$$

则可以验证 $f(g(x))$有无穷多个间断点,所以选(D)。

15. 显然点 $x=0$, $x=\pm 1$ 是函数 $f(x)$的间断点,且

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=-1,$$

所以,函数 $f(x)$的无穷间断点为 $x=-1$,选择(B)。

16. **解一　利用泰勒定理**　由于

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}。$$

解二　利用洛必达法则　计算得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)\cos x}{3x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)\cos x}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x-(1+x^2)\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}。$$

17. **解一　利用基本极限**　计算得

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left[1-\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]^{-\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{-\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}\quad\left(\lim_{x\to 0}-\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{1}{2}\right)$$

解二　利用基本公式　计算得

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}。$$

18. 当 $x=0$ 时,由已知条件 $y-x=e^{x(1-y)}$,可得 $y=1$。在等式两边求导得

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')。$$