普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONGGAODENGJIAOYU “SHIERWU” GUIHUAJIAOCAI

# 线性代数

◎主编　董永胜　金明浩　王伟

XIANXING DAISHU

中国传媒大学出版社

“十二五”规划教材

# 线性代数

（第二版）

主　编　董永胜　金明浩　王　伟

中国传媒大学出版社

## 内容简介

本书共分为六章，主要内容包括：行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、代数模型与Matlab软件的应用。

本书知识系统、连贯，逻辑清晰、严密，叙述流畅、清楚。理论与实践相结合，运算与软件相结合。全书对所定义的概念给出英文注释。

本书可作为各类高等本、专科院校工科各专业的教学教材使用，也可供科技人员参考、阅读。


**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数／董永胜，金明浩，王伟 主编．—北京：中国传媒大学出版社，2012.10
ISBN 978-7-5657-0600-4
Ⅰ.①线… Ⅱ.①董…②金…③王… Ⅲ.①线性代数—教材 Ⅳ.①O151.2
中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第237411号

**线性代数**（第二版）

作　　者：董永胜　金明浩　王　伟
责任编辑：曹　辉　穆会荣
责任印制：曹　辉
封面设计：千山文苑
出 版 人：蔡　翔

出版发行：中国传媒大学出版社
社　　址：北京市朝阳区定福庄东街1号　　邮编：100024
电　　话：65450532或65450528　　传真：010-65779405
网　　址：http：//www.cucp.com.cn
经　　销：全国新华书店
印　　刷：北京今朝印刷有限公司

开　　本：787×1092毫米　1/16
印　　张：17
字　　数：331千字
版　　次：2014年7月第2版　2014年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5657-0600-4/O·0600　　定价：33.00元

# 前　言

线性代数是工科院校本、专科学生的一门数学公共基础课，对学生学习专业理论、技能，培养专业能力、素养起到了支撑和促进作用。它应用于数学、力学、物理学、自动控制、计算机技术等诸多领域之中，体现出几何观念与代数方法之间的联系；它从具体概念中抽象出公理化方法，拥有严谨的逻辑论证、巧妙的归纳综合。通过线性代数的学习，使学生形成合理的知识结构（扎实的代数基础理论知识，较深厚的数学专业知识，广泛的与线性代数邻近的专业学科知识）和能力结构（设计运算能力，解决问题能力，创新能力），这是本书编写的宗旨。

线性代数已有长久的发展历史，就其理论体系和知识结构而言已经非常完备。但随着科学技术的发展，线性代数的应用范围在增大，应用能力在增强，这就需要在内容和方法上有所突破和创新，融基础理论与实际应用为一体，融代数方法与计算技术于一身。因此，本书编写时以线性方程组为主线，矩阵为工具，在给出了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵对角化和二次型的基本内容的同时，还将代数模型和 Matlab 软件应用引进教材中。通过基本内容的学习，让学生掌握线性代数的理论与方法；通过代数模型的建立与求解，让学生了解线性代数在解决实际问题中的应用；通过 Matlab 软件的应用，让学生学会用计算机进行线性代数的计算。全书对所定义的概念给出英文注释，便于学生的双语学习和数学素质的提高。

本书在编写过程中，遵循着循序渐进的原则，用典型的实例导入基本概念，引出性质、定理，在保证知识的系统性、连贯性和逻辑的严密性情况下，减少了抽象的理论推导，简化处理了一些冗繁的定理证明，力求深入浅出，易学易懂。全书注重对基本理论的讲解、对解题方法的归纳、对学生能力的培养，突出对学生的计算能力、逻辑思维能力和应用能力的训练。每节都有对应的习题，每章都有方法归纳和综合习题。本书可供本、专科学生使用，其中带“*”的内容和习题可供专科学生选学或阅读。

本书由董永胜、金明浩、王伟担任主编。各章编写分工如下：第 1 章、第 3 章由董永胜（鸡西大学）编写；第 2 章、第 5 章及全书习题答案由金明浩（黑龙江工程学院）编写；第 4 章、第 6 章由王伟（黑龙江工程学院）编写。全书由董永胜统稿。本书在编写过程中得到鸡西大学池春姬教授及同仁的帮助和支持，在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，诚恳希望广大读者批评指正，以期不断完善。

编　者

# 目　　录

# 第1章 行 列 式

行列式是为解线性方程组而产生的，是研究矩阵和线性方程组理论的重要工具，在工程技术领域中有着极其广泛的应用，在线性代数学中占有重要的地位．在这一章里，将介绍行列式的定义、行列式的性质、行列式按行(列)展开及行列式在解线性方程组中的应用——克莱姆法则．正确理解行列式的概念，熟练掌握行列式的计算方法，对学习后面的课程内容会带来很大方便．

## 1.1 $n$ 阶行列式的定义

### 1.1.1 排列与逆序数

排列的逆序数是 $n$ 阶行列式定义中所涉及的一个重要概念，它决定着行列式的展开式中每一项的符号．

**定义 1.1.1** 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的一个有序数组 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 称为一个 ***n* 级排列**(n-level permutation).

例如，312 是一个 3 级排列；2413 是一个 4 级排列；32541 是一个 5 级排列．

**定义 1.1.2** 在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**(inverted sequence)．一个排列中所有逆序之和称为这个排列的**逆序数**(inverted sequence number)．排列 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 j_3 \cdots j_n)$．逆序数为偶数的排列称为**偶排列**(even permutation)；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**(odd permutation).

例如，$\tau(312)=2$，312 为偶排列；$\tau(2413)=3$，2413 是奇排列；$\tau(32541)=6$，32541 为偶排列．

**【例 1】** 求 $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)$．

**解** $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

排列 $123\cdots n$ 称为 ***n* 级标准排列**(n-level standard permutation)．显然有 $\tau(123\cdots n)=0$ 为偶排列．

在一个排列中,将其中两个数对调,其他数不变,这种对调过程称为**对换**(transposition).

**定理 1.1.1** 对排列的每一次对换都改变排列的奇偶性.

**证** 分两种情形来证明:Ⅰ对换的两个数在排列中是相邻的.设排列为

$$\cdots ij \cdots ,$$

将数 $i$, $j$ 对换,得排列

$$\cdots ji \cdots ,$$

显然,当 $i<j$ 时,$\tau(\cdots j\, i \cdots)=\tau(\cdots i\, j \cdots)+1$;当 $i>j$ 时,$\tau(\cdots j\, i \cdots)=\tau(\cdots i\, j \cdots)-1$.排列逆序数的奇偶性发生改变,所以改变了排列的奇偶性.

Ⅱ对换的两个数在排列中是不相邻的.设排列为

$$\cdots ik_1 \cdots k_s j \cdots ,$$

将数 $i$ 经过 $s+1$ 次与相邻数对换,数 $j$ 经过 $s$ 次与相邻数对换,得排列

$$\cdots jk_1 \cdots k_s i \cdots ,$$

由于这个排列是原排列经过 $2s+1$ 次对换得到的,根据(1)知它的奇偶性与原排列的奇偶性发生了改变.

根据全排列计算公式我们可以知道,由 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的 $n$ 级排列共有 $n!$ 个,这 $n!$ 个排列中奇排列与偶排列各占多少呢?

**定理 1.1.2** 在 $n!$ $(n\geqslant 2)$个 $n$ 级排列中,奇排列与偶排列的个数各占一半.

**证** 设 $n!$ 个 $n$ 级排列中有 $k$ 个奇排列,$l$ 个偶排列.若将 $k$ 个奇排列中的数字 $i_s$ 与 $i_t$ 都进行对换,便得到 $k$ 个不同的偶排列,由于偶排列只有 $l$ 个,因此 $k\leqslant l$. 同理可证得 $l\leqslant k$. 故 $k=l=\dfrac{n!}{2}$.

**【例 2】** 选择 $i,j,k$ 使 $21i36jk97$ 为偶排列.

**解** 在排列中可供 $i,j,k$ 选择的数字仅为 4,5,8,不妨设 $i=4$, $j=5$, $k=8$,则

$$\tau(214365897)=1+1+1+1+1=5 ,$$

为奇排列,由定理 1.1.1 知,对换两个数字改变排列的奇偶性,所以当 $i=5$, $j=4$, $k=8$;或 $i=8$, $j=5$, $k=4$;或 $i=4$, $j=8$, $k=5$ 时,9 级排列为偶排列.

### 1.1.2 二阶、三阶行列式

行列式的概念我们先从二、三阶开始.在中学里我们就学过解二元线性方程组(未知

数个数为两个且未知数次数是一次的方程组）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

采用加减消元法从方程组里消去一个未知数来求解，为此：

第一个方程乘以 $a_{22}$ 与第二个方程乘以 $a_{12}$ 相减得 $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，

第二个方程乘以 $a_{11}$ 与第一个方程乘以 $a_{21}$ 相减得 $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$，

若设 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}, \qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} . \tag{1-2}$$

容易验证(1－2)式是方程组(1－1)的解．

在(1－2)式中，两个等式右端的分母是相等的，我们把分母引进一个记号，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} , \tag{1-3}$$

(1－3)式左端称为**二阶行列式**(second-order determinant)，而右端称为二阶行列式的**展开式**(expansion)．行列式中数 $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ 称为行列式的**元素**(element)．规定在一个行列式中，横排称为**行**(row)，纵排称为**列**(column)，每个元素都带两个下标，第一个下标表示元素所在的行数叫做**行下标**(row subscript)；第二个下标表示元素所在的列数叫做**列下标**(column subscript)．(1－3)式的左端从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**(main diagonal)，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**(auxiliary diagonal)；右端的展开式是主对角线上的两元素乘积与副对角线上两元素乘积的差．(1－3)式也可记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} .$$

这里，$\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有2级排列求和．

根据二阶行列式的定义，(1－2)式的两个分子可写成行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

若记

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1－1)的解(1－2)式可写成

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

其中二阶行列式 Δ 称为方程组(1－1)的**系数行列式**(determinant of coefficients).像这样用行列式来表示方程式组的解,形状简便,容易记忆.

**【例 3】** 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=-2\\4x_1-3x_2=5\end{cases}.$$

**解** 由于

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3\\4&-3\end{vmatrix}=-18\neq0,$$

所以方程组有解,且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-2&3\\5&-3\end{vmatrix}=-9,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&-2\\4&5\end{vmatrix}=18,$$

故方程组的解为 $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-1$.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-4}$$

与二元线性方程组类似,利用加减消元的方法,当

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0,$$

可求得它的解:

$$\begin{cases}x_1=(a_{22}a_{33}b_1+a_{13}a_{32}b_2+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}a_{33}b_2-a_{23}a_{32}b_1)/\Delta\\x_2=(a_{11}a_{33}b_2+a_{13}a_{21}b_3+a_{23}a_{31}b_1-a_{13}a_{31}b_2-a_{11}a_{23}b_3-a_{21}a_{33}b_1)/\Delta\\x_3=(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}a_{31}b_2+a_{21}a_{32}b_1-a_{22}a_{31}b_1-a_{11}a_{32}b_2-a_{12}a_{21}b_3)/\Delta\end{cases},\tag{1-5}$$

若对解(1－5)式的分母 Δ 引进记号,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (1-6)$$

则(1－6)式的左边称为**三阶行列式**(third-order determinant)；右边称为三阶行列式的展开式，共有 3！＝6 项，每项是位于不同行不同列的三个元素按行自然顺序的乘积，其符号是由 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$（$j_1j_2j_3$ 是三个元素列下标的排列）来决定的．因此，(1－6)式也可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 3 级排列(3！个)求和．

式(1－6)的右端展开式也可按照图 1－1 的“对角线法则”写出来的，这也是三阶行列式的一种计算方法，它遵循的规律是主对角线及平行主对角线的连线上三个元素乘积取正号，副对角线及平行副对角线的连线上三个元素乘积取负号．

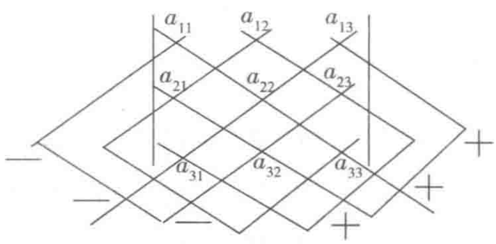


**图 1－1**

**【例 4】** 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**解**　利用对角线法则计算：

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\times 0\times 3 + 3\times(-2)\times(-2) + 2\times 3\times 1$$

$$-(-1)\times(-2)\times 1 - 3\times 3\times 3 - 2\times 0\times(-2) = -11.$$

若对(1－5)式分子引进三阶行列式，记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，方程组(1—4)的解就可写成，

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{1—7}$$

**【例 5】** 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

**解** 先求系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

方程组有唯一解．又

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 22, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 14, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10,$$

所以方程组的解为：$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -22$， $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -14$， $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -10$．

由上述的讨论我们可以看到，二元线性方程组(1—1)、三元线性方程组(1—4)当它们的系数行列式不等于零时，其解可以借助行列式这一工具，简便、工整地给出求解公式，很方便记忆．那么对于由 $n(n>3)$ 个未知数 $n$ 个方程组成的 $n$ 元线性方程组当其系数行列式不等于零时是否也有这样的求解公式呢？回答是肯定的，但这个求解公式需要用 $n$ 阶行列式来表示，什么是 $n$ 阶行列式呢？

### 1.1.3 $n$ 阶行列式

类似于二、三元线性方程组的讨论，对于 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-8}$$

的所有未知数的系数也可以组成一个算式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-9}$$

它就是一个 $n$ 阶行列式.

**定义 1.1.3** 由 $n^2$ 个数排成 $n$ 行 $n$ 列的(1—9)式，称为 ***n* 阶行列式**[①](n-th order determinant)，它等于这个行列式中所有取之于不同行不同列的 $n$ 个元素乘积的代数和($n!$ 项的和)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{1-10}$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列求和．等式右端称为 ***n* 阶行列式展开式**(n-th order deter-minant expansion)，它是按行的自然顺序展开的．

行列式(1－10)式的右端展开式也可以按列的自然顺序展开，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}. \tag{1-11}$$

$n$ 阶行列式一般可用 $D$ 或 $D_n$ 表示．当 $n=1$ 时称为一阶行列式，规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 $a$.

---

① 行列式的研究开始于 18 世纪中叶以前，出现于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，是由德国数学家和哲学家莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz 1646—1716)最早引入的，行列式记号中的两条竖线是英国数学家凯莱(A. Cayley 1821—1895)在 1841 年引进的.

【例 6】 用行列式定义计算：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

**解** (1) 由行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

在本行列式中有许多零元素，我们知道在行列式展开式的一般项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为零，这一项的乘积就为零，只有当所有元素全不为零时这一项乘积才能不为零，因此在此行列式中，只有当第一行取 $a_{12}$，第二行取 $a_{24}$，第三行取 $a_{31}$，第四行取 $a_{43}$ 时乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 才能不为零，故

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(2413)} a_{12} a_{24} a_{31} a_{43} = -a_{12} a_{24} a_{31} a_{43}.$$

(2) 本行列式的展开式中只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$ 和 $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$ 两项的乘积不等于零，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(43215)} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + (-1)^{\tau(54321)} 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 240.$$

利用行列式的定义进行行列式的计算，在其非零元素特别少（一般不多于 $2n$ 个）的情况下我们才会采用它.

*【例 7】　解下列各题：

(1) 在四阶行列式中，求带负号且包含因子 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 的项；

(2) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，求 $x^3$ 的系数．

**解**　(1) 由行列式的定义可以知道，包含因子 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 $i$，$j$ 为 2，4 或 4，2，又此项为负，所以 $i31j$ 为奇排列，故 $i=4$，$j=2$．

(2) 根据行列式定义可知，只有 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 项才能出现 $x^3$ 项，此时该项为

$$(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3\ ,$$

故含 $x^3$ 项的系数为 $-1$．

### 1.1.4　几种特殊的行列式

下面介绍的几种特殊行列式，在行列式的实际计算和应用中用途十分广泛，它们的值都可通过行列式的定义来求得．

**1．对角行列式(diagonal determinant)**

形如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在此行列式的展开式中只有 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 项之积不为零，其余各项之积全为零，故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ .$$

类似地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

**2. 三角行列式(triangular determinant)**

三角行列式有以下两种:

(1) **上三角行列式**(upper triangular determinant):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在此行列式的展开式中只有 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 项之积不为零,其余各项之积全为零,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) **下三角行列式**(lower triangular determinant):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

类似于上三角行列式的讨论,可得出下三角行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可见,设法将一个高阶行列式化成三角行列式再计算其值,是计算行列式的一种简单实用的方法,怎么样才能把一个行列式化成三角行列式呢?在下一节行列式的性质中我们将解决这个问题.