全国高等农林院校“十三五”规划教材

# 线性代数学习指导

曹殿立 张建林 / 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材

# 线性代数学习指导

曹殿立　张建林　主编

中国农业出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数学习指导 / 曹殿立，张建林主编．—北京：中国农业出版社，2017.8（2018.6 重印）
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-109-23071-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①曹… ②张… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 192877 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑 魏明龙
文字编辑 张柳茵

---

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2017 年 8 月第 1 版 2018 年 6 月北京第 2 次印刷

---

开本：720mm×960mm 1/16 印张：21.75
字数：425 千字
定价：33.00 元

# 内 容 提 要

本教材为全国高等农林院校“十三五”规划教材，是全国高等农林院校“十三五”规划教材《线性代数》(曹殿立、姬利娜主编)的配套学习辅导教材。教材内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写．各章内容包括学习重点与知识体系、内容提要、典型例题、习题全解、综合练习题及综合练习题解答等六个部分．

本教材注重课程内容的系统归纳与总结，突出典型例题的示范讲解．为便于读者的学习，给出了主教材全部习题及综合练习题的详尽解答．在例题和习题的解答中，注重思路分析和方法归纳，并且对于部分题目给出了多种解法．本教材的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试大纲，涵盖了历年全国硕士研究生入学考试中的相关典型试题，例题、习题数量多且题型丰富．

本教材可作为高等学校非数学类各专业学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书．

# 编 审 人 员 名 单

**主　编**　曹殿立　张建林

**副主编**　李战国　何春花

**编　者**　（按姓氏笔画排序）

王　瑞　文生兰　卢亚丽

李战国　何春花　张建林

曹殿立

**审　稿**　肖会敏

# 前　言

本教材为全国高等农林院校“十三五”规划教材，是全国高等农林院校“十三五”规划教材《线性代数》(曹殿立、姬利娜主编)的配套学习辅导教材.

本教材按照配套学习教材的要求编写，以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为宗旨. 内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写. 每章结构如下：

1. 学习重点与知识体系：包括学习重点、知识结构与脉络两个部分.

2. 内容提要：为了便于学生学习，定理序号与教材保持一致.

3. 典型例题：依照教材内容顺序，对重点例题进行分类解析，对每种题型的解题思路和方法进行归纳总结，突出一题多解；对重点概念和方法以及容易出错的地方进行详尽注解. 所选题目涵盖了包括 2017 年在内的历年全国硕士研究生招生统一考试线性代数试题，选题广泛，题型丰富.

4. 习题全解：对教材的全部习题进行了详尽的解答.

5. 综合练习题：包括填空、单项选择、计算和证明题，以检验学习效果，题型与研究生考试接轨.

6. 综合练习题解答.

本教材可作为高等学校非数学类各专业学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、李战国、何春花、

王瑞，中原工学院的张建林，华北水利水电大学的卢亚丽，解放军信息工程大学的文生兰，最后由曹殿立、张建林统一定稿．

本教材的编写获得了中华农业科教基金教材建设研究项目《线性代数课程的研究和教材建设》(NKJ201502033)的资助．河南财经政法大学的肖会敏教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的感谢!

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免有错误与疏漏之处，恳请广大师生和读者批评指正．

编　者

2017 年 5 月 1 日

# 目　　录

# 第1章　行列式

## 学习重点与知识体系

### 一、学习重点

1. 行列式的定义；
2. 行列式的性质；
3. 行列式按行(列)展开的法则；
4. 综合运用行列式的定义、性质以及按行(列)展开的法则计算行列式；
5. 应用克拉默法则求解线性方程组.

### 二、知识体系

**1. 结构**

$$\text{行列式}\begin{cases}\text{行列式的定义}\\ \text{特殊行列式(对角和三角行列式)}\\ \text{行列式的性质(转置、行(列)交换、数乘、消元)}\\ \text{行列式按行(列)展开的法则}\\ \text{行列式的计算}\\ \text{行列式的应用——克拉默法则}\end{cases}$$

**2. 脉络**

行列式的定义⇒行列式的性质⇒行列式按行(列)展开⇒克拉默法则

## 内　容　提　要

### 一、行列式的定义

**1. 行列式的定义**

设有行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是 $n!$ 个项的代数和．这些项是一切可能取自于 $D$ 的不同行与不同列的 $n$ 个元素的乘积．

**定义 1** 若行列式每项的行下标按自然顺序排列，则

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

**定义 2** 若行列式每项的列下标按自然顺序排列，则

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

**定义 3** 若行列式的行、列下标按任意次序排列，则

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

**2. 对角行列式和三角行列式**

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(2) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

## 二、行列式的性质

**性质 1.1** 行列式与它的转置行列式的值相等.

**性质 1.2** 交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号.

**推论** 如果行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

**性质 1.3** 用数 $k$ 乘以行列式,等于数 $k$ 乘以行列式中某一行(列)的所有元素.换言之,如果行列式某一行(列)的元素有公因子 $k$,则可将 $k$ 提到行列式记号外.

**推论 1** 如果行列式中某一行(列)元素全为零,则该行列式的值为零.

**推论 2** 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则该行列式的值为零.

**性质 1.4** 如果行列式中的某一行(列)元素都可以表示为两项之和,则这个行列式可以表示为两个行列式的和.

**性质 1.5** 将行列式中的某一行(列)的所有元素乘以数 $k$ 后,加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

## 三、行列式按行(列)展开

### 1. 代数余子式的定义

在 $n(n>1)$ 阶行列式 $D$ 中任意取定 $k$ 行和 $k$ 列,位于这些行列交叉处的元素所构成的 $k$ 阶行列式叫做行列式 $D$ 的一个 $k$ **阶子式**.

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中,划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行及第 $j$ 列元素,余下的元素按原排列次序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 $a_{ij}$ 的**余子式**,记为 $M_{ij}$,而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的**代数余子式**.

### 2. 行列式按行(列)展开的法则

**定理 1.2** 行列式等于其任一行(列)的各元素与对应的代数余子式乘积之和.即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{it}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}A_{tj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

**推论** 行列式某一行(列)的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$$
$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=0(s\neq t).$$

## 四、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中，$D_j$ 是把系数行列式 $D$ 的第 $j$ 列换为方程组的常数项 $b_1$，$b_2$，…，$b_n$ 所得到的 $n$ 阶行列式($j=1$，2，…，$n$).

# 典 型 例 题

## 一、行列式的概念

**例 1** 问 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 以及 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$ 是不是四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项？若是，指出该项所带的符号.

**解** 根据行列式的定义，四阶行列式的每一项都是由行列式中的 4 个元素的乘积构成，并且这 4 个元素必须位于行列式的不同行和不同列.

对于 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$，首先这 4 个元素都是四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的元素；其次其行下标是 2，1，3，4，没有重复数字，说明这 4 个元素位于不同的行；其列下标是 3，4，2，1，也没有重复数字，即这 4 个元素位于不同的列. 因此 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 是四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项.

分别计算 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 的行下标的逆序数和列下标的逆序数并求和，得

$$\tau(2134)+\tau(3421)=1+5=6,$$

即行、列下标的逆序数之和为偶数，所以该项的符号为正．

而对于 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$，因为其行下标是 2，3，1，2，有重复数字 2，即 $a_{22}$ 和 $a_{21}$ 同在行列式的第 2 行，因此 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$ 不是四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的项.

**例 2** 确定 $i$，$j$ 的值，使 $a_{4i}a_{31}a_{2j}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是六阶行列式中的一项，且符号为负．

**解** 六阶行列式的项是行列式的 6 个不同行不同列的元素的乘积．

考虑 $a_{4i}a_{31}a_{2j}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的列下标．由于 $i$，1，$j$，4，6，5 应是 1～6 这六个自然数的无重复数字的某个排列，故 $i=2$，$j=3$ 或者 $i=3$，$j=2$.

当 $i=2$，$j=3$ 时，分别计算 $a_{42}a_{31}a_{23}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的行、列下标的逆序数并求和，得

$$\tau(432651)+\tau(213465)=9+2=11,$$

即行、列下标的逆序数之和为奇数，所以 $a_{42}a_{31}a_{23}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的符号为负，故 $i=2$，$j=3$.

**例 3** 一个 $n$ 阶行列式中等于零的元素的个数如果多于 $n^2-n$ 个，则此行列式的值等于零．为什么?

**解** $n$ 阶行列式共有 $n^2$ 个元素．若零元素的个数大于 $n^2-n$，那么非零的元素个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个．根据行列式的定义，$n$ 阶行列式的每一项都是 $n$ 个元素的乘积，因而该行列式的每一项都等于零．故该行列式等于零.

**例 4** 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$，求：(1) $x^4$ 的系数；(2) $x^3$ 的系数；(3) 常数项．

**解** (1) 由行列式定义，$f(x)$中含 $x^4$ 的项只能由行列式主对角线上的 4 个含 $x$ 的一次因式的乘积$(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$得到，可见 $x^4$ 的系数为 1.

(2) 同理，$f(x)$中含 $x^3$ 的项也只能由行列式主对角线上的 4 个含 $x$ 的一次因式得到，与(1)不同的是，$x^3$ 的项是由其中的 3 个因式与另外一个因式中的常数项的乘积而得到的，即

$$(-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})+(x-a_{11})(-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})+$$
$$(x-a_{11})(x-a_{22})(-a_{33})(x-a_{44})+(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(-a_{44}),$$

可见 $x^3$ 的系数为$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(3) $f(x)$是 $x$ 的一元四次多项式，$f(x)$的常数项即为 $x=0$ 时 $f(x)$的值：

$$f(0)=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

## 二、余子式和代数余子式

**例 5** 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，求：(1) $-A_{31}+2A_{32}+5A_{33}+4A_{34}$；(2) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$.

**解** (1) 可以求出每一个代数余子式，再作运算，但这样很繁琐.

由于 $A_{31}$，$A_{32}$，$A_{33}$，$A_{34}$分别是 $D$ 的第 3 行元素 $a_{31}$，$a_{32}$，$a_{33}$，$a_{34}$的代数余子式，而式子$(-1)A_{31}+2A_{32}+5A_{33}+4A_{34}$中，$A_{31}$，$A_{32}$，$A_{33}$，$A_{34}$的系数$-1$，2，5，4 显然是 $D$ 的第 4 行元素 $a_{41}$，$a_{42}$，$a_{43}$，$a_{44}$，根据行列式按行(列)展开的法则(第 1 章定理 1.2 的推论)

$$-A_{31}+2A_{32}+5A_{33}+4A_{34}=a_{41}A_{31}+a_{42}A_{32}+a_{43}A_{33}+a_{44}A_{34}=0.$$

(2) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$是 $D$ 的第 2 列元素 $a_{12}$，$a_{22}$，$a_{32}$，$a_{42}$的代数余子式分别与 1，$-1$，1，$-1$ 乘积之和. 因此，将 $D$ 的第 2 列元素更换为 1，$-1$，1，$-1$，构造一个新行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix},$$

显然 $D_1$ 的前两列元素相同，故 $D_1=0$，即 $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=0$.

**例 6** 已知行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$和 $A_{44}+A_{45}$.

**解** 由已知条件得