



全国高等农林院校“十三五”规划教材

线性代数 学习指导



曹殿立 张建林 / 主编

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材

线性代数学习指导

曹殿立 张建新 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习指导 / 曹殿立, 张建林主编. —北京:
中国农业出版社, 2017.8 (2018.6 重印)
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-109-23071-2

I. ①线… II. ①曹… ②张… III. ①线性代数-高
等学校-教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 192877 号

中国农业出版社出版
(北京市朝阳区麦子店街 18 号楼)
(邮政编码 100125)
策划编辑 魏明龙
文字编辑 张柳茵

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2017 年 8 月第 1 版 2018 年 6 月北京第 2 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 21.75

字数: 425 千字

定价: 33.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本教材为全国高等农林院校“十三五”规划教材，是全国高等农林院校“十三五”规划教材《线性代数》（曹殿立、姬利娜主编）的配套学习辅导教材。教材内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写。各章内容包括学习重点与知识体系、内容提要、典型例题、习题全解、综合练习题及综合练习题解答等六个部分。

本教材注重课程内容的系统归纳与总结，突出典型例题的示范讲解。为便于读者的学习，给出了主教材全部习题及综合练习题的详尽解答。在例题和习题的解答中，注重思路分析和方法归纳，并且对于部分题目给出了多种解法。本教材的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试大纲，涵盖了历年全国硕士研究生入学考试中的相关典型试题，例题、习题数量多且题型丰富。

本教材可作为高等学校非数学类各专业学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书。

编 审 人 员 名 单

主 编 曹殿立 张建林

副主编 李战国 何春花

编 者 (按姓氏笔画排序)

王 瑞 文生兰 卢亚丽

李战国 何春花 张建林

曹殿立

审 稿 肖会敏

前 言

本教材为全国高等农林院校“十三五”规划教材，是全国高等农林院校“十三五”规划教材《线性代数》（曹殿立、姬利娜主编）的配套学习辅导教材。

本教材按照配套学习教材的要求编写，以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为宗旨。内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写。每章结构如下：

1. 学习重点与知识体系：包括学习重点、知识结构与脉络两个部分。

2. 内容提要：为了便于学生学习，定理序号与教材保持一致。

3. 典型例题：依照教材内容顺序，对重点例题进行分类解析，对每种题型的解题思路和方法进行归纳总结，突出一题多解；对重点概念和方法以及容易出错的地方进行详尽注解。所选题目涵盖了包括 2017 年在内的历年全国硕士研究生招生统一考试线性代数试题，选题广泛，题型丰富。

4. 习题全解：对教材的全部习题进行了详尽的解答。

5. 综合练习题：包括填空、单项选择、计算和证明题，以检验学习效果，题型与研究生考试接轨。

6. 综合练习题解答。

本教材可作为高等学校非数学类各专业学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书。

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、李战国、何春花、

王瑞，中原工学院的张建林，华北水利水电大学的卢亚丽，解放军信息工程大学的人文生兰，最后由曹殿立、张建林统一定稿。

本教材的编写获得了中华农业科教基金教材建设研究项目《线性代数课程的研究和教材建设》(NKJ201502033)的资助。河南财经政法大学的肖会敏教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免有错误与疏漏之处，恳请广大师生和读者批评指正。

编 者

2017年5月1日

目 录

前言

第 1 章 行列式	1
学习重点与知识体系	1
一、学习重点	1
二、知识体系	1
内容提要	1
一、行列式的定义	1
二、行列式的性质	3
三、行列式按行(列)展开	3
四、克拉默法则	4
典型例题	4
一、行列式的概念	4
二、余子式和代数余子式	6
三、行列式的计算	7
四、克拉默法则	18
习题全解	19
第 1 章综合练习题	33
第 1 章综合练习题解答	36
第 2 章 矩阵及其运算	42
学习重点与知识体系	42
一、学习重点	42
二、知识体系	42
内容提要	43
一、矩阵的概念	43
二、矩阵的运算	44
三、逆矩阵	45

四、分块矩阵	46
典型例题	48
一、矩阵的基本运算	48
二、矩阵的方幂	50
三、逆方阵	53
四、方阵的行列式	57
五、分块矩阵	58
习题全解	61
第 2 章综合练习题	77
第 2 章综合练习题解答	78
第 3 章 矩阵的初等变换	82
学习重点与知识体系	82
一、学习重点	82
二、知识体系	82
内容提要	83
一、矩阵的初等变换和初等矩阵	83
二、矩阵的秩	84
三、等价矩阵	84
四、矩阵 A 可逆的等价条件	85
典型例题	85
一、初等变换与初等矩阵	85
二、用初等变换求逆矩阵	89
三、矩阵的秩	91
习题全解	95
第 3 章综合练习题	104
第 3 章综合练习题解答	107
第 4 章 线性方程组	112
学习重点与知识体系	112
一、学习重点	112
二、知识体系	112
内容提要	113
一、线性方程组的表达形式及分类	113
二、线性方程组相容性的判定	114
三、向量组的线性相关性	114

四、向量组的秩与极大线性无关组	116
五、向量空间	117
六、线性方程组解的结构	118
典型例题	120
一、线性方程组解的判定	120
二、向量组的线性相关性	124
三、向量组的秩	135
四、极大线性无关组	137
五、齐次线性方程组的基础解系	140
六、齐次线性方程组的通解	144
七、非齐次线性方程组的通解	146
八、方程组的公共解	156
九、用方程组理论讨论向量的线性表示问题	161
十、用方程组理论讨论矩阵的秩	165
十一、向量空间	167
习题全解	172
第 4 章综合练习题	200
第 4 章综合练习题解答	203
第 5 章 矩阵的相似变换	211
学习重点与知识体系	211
一、学习重点	211
二、知识体系	211
内容提要	212
一、特征值与特征向量	212
二、方阵的相似对角化	213
典型例题	214
一、求矩阵的特征值与特征向量	214
二、特征值与特征向量的证明题	221
三、求特征值与特征向量的逆问题	224
四、相似矩阵的基本概念	225
五、矩阵可相似对角化的判定	227
六、矩阵的相似对角化	231
七、运用相似对角化求解问题	234
习题全解	238
第 5 章综合练习题	248

第5章综合练习题解答	251
第6章 二次型	258
学习重点与知识体系	258
一、学习重点	258
二、知识体系	258
内容提要	259
一、向量的内积	259
二、向量的度量——长度与夹角	259
三、正交向量组与标准正交向量组	260
四、正交矩阵与正交变换	261
五、矩阵的合同	262
六、二次型	262
七、正定二次型和正定矩阵	265
八、矩阵的相似、合同、等价等概念辨析	266
典型例题	267
一、向量的概念与运算	267
二、向量组的正交化	268
三、正交矩阵	268
四、实对称矩阵	272
五、二次型的概念	276
六、合同矩阵	279
七、化二次型为标准形	282
八、正定二次型与正定矩阵	296
习题全解	306
第6章综合练习题	325
第6章综合练习题解答	327
参考文献	334

第1章 行列式

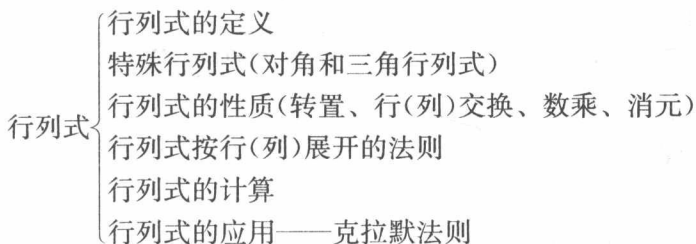
学习重点与知识体系

一、学习重点

1. 行列式的定义;
2. 行列式的性质;
3. 行列式按行(列)展开的法则;
4. 综合运用行列式的定义、性质以及按行(列)展开的法则计算行列式;
5. 应用克拉默法则求解线性方程组.

二、知识体系

1. 结构



2. 脉络

行列式的定义 $\Rightarrow$ 行列式的性质 $\Rightarrow$ 行列式按行(列)展开 $\Rightarrow$ 克拉默法则

内 容 提 要

一、行列式的定义

1. 行列式的定义

设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是 $n!$ 个项的代数和. 这些项是一切可能取自于 D 的不同行与不同列的 n 个元素的乘积.

定义 1 若行列式每项的行下标按自然顺序排列, 则

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

定义 2 若行列式每项的列下标按自然顺序排列, 则

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

定义 3 若行列式的行、列下标按任意次序排列, 则

$$D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

2. 对角行列式和三角行列式

(1) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

(2) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

二、行列式的性质

性质 1.1 行列式与它的转置行列式的值相等.

性质 1.2 交换行列式的两行(或两列), 行列式改变符号.

推论 如果行列式中有两行(列)完全相同, 则行列式的值为零.

性质 1.3 用数 k 乘以行列式, 等于数 k 乘以行列式中某一行(列)的所有元素. 换言之, 如果行列式某一行(列)的元素有公因子 k , 则可将 k 提到行列式记号外.

推论 1 如果行列式中某一行(列)元素全为零, 则该行(列)的值为零.

推论 2 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例, 则该行(列)的值为零.

性质 1.4 如果行列式中的某一行(列)元素都可以表示为两项之和, 则这个行列式可以表示为两个行列式的和.

性质 1.5 将行列式中的某一行(列)的所有元素乘以数 k 后, 加到另一行(列)对应位置的元素上, 行列式的值不变.

三、行列式按行(列)展开

1. 代数余子式的定义

在 $n(n>1)$ 阶行列式 D 中任意取定 k 行和 k 列, 位于这些行列交叉处的元素所构成的 k 阶行列式叫做行列式 D 的一个 k 阶子式.

在 n 阶行列式 D 中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列元素, 余下的元素按原排列次序构成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} , 而称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按行(列)展开的法则

定理 1.2 行列式等于其任一行(列)的各元素与对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{t=1}^n a_{1t}A_{1t} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{tj}A_{tj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} &= 0 (i \neq j), \\ a_{1s}A_{1t} + a_{2s}A_{2t} + \cdots + a_{ns}A_{nt} &= 0 (s \neq t). \end{aligned}$$

四、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中, D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的 n 阶行列式 ($j=1, 2, \cdots, n$).

典型例题

一、行列式的概念

例 1 问 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 以及 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$ 是不是四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中的项? 若是, 指出该项所带的符号.

解 根据行列式的定义, 四阶行列式的每一项都是由行列式中的 4 个元素的乘积构成, 并且这 4 个元素必须位于行列式的不同行和不同列.

对于 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$, 首先这 4 个元素都是四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的元素; 其次其行下标是 2, 1, 3, 4, 没有重复数字, 说明这 4 个元素位于不同的行; 其列下标是 3, 4, 2, 1, 也没有重复数字, 即这 4 个元素位于不同的列. 因此 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 是四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中的项.

分别计算 $a_{23}a_{14}a_{32}a_{41}$ 的行下标的逆序数和列下标的逆序数并求和, 得

$$\tau(2134) + \tau(3421) = 1 + 5 = 6,$$

即行、列下标的逆序数之和为偶数，所以该项的符号为正。

而对于 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$ ，因为其行下标是 2, 3, 1, 2，有重复数字 2，即 a_{22} 和 a_{21} 同在行列式的第 2 行，因此 $a_{22}a_{34}a_{13}a_{21}$ 不是四阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中的项。

例 2 确定 i, j 的值，使 $a_{4i}a_{31}a_{2j}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是六阶行列式中的一项，且符号为负。

解 六阶行列式的项是行列式的 6 个不同行不同列的元素的乘积。

考虑 $a_{4i}a_{31}a_{2j}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的列下标。由于 $i, 1, j, 4, 6, 5$ 应是 $1 \sim 6$ 这六个自然数的无重复数字的某个排列，故 $i=2, j=3$ 或者 $i=3, j=2$ 。

当 $i=2, j=3$ 时，分别计算 $a_{42}a_{31}a_{23}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的行、列下标的逆序数并求和，得

$$\tau(432651) + \tau(213465) = 9 + 2 = 11,$$

即行、列下标的逆序数之和为奇数，所以 $a_{42}a_{31}a_{23}a_{64}a_{56}a_{15}$ 的符号为负，故 $i=2, j=3$ 。

例 3 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果多于 $n^2 - n$ 个，则此行列式的值等于零。为什么？

解 n 阶行列式共有 n^2 个元素。若零元素的个数大于 $n^2 - n$ ，那么非零的元素个数就小于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个。根据行列式的定义， n 阶行列式的每一项都是 n 个元素的乘积，因而该行列式的每一项都等于零。故该行列式等于零。

$$\text{例 4 设 } f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x - a_{44} \end{vmatrix}, \text{ 求: (1) } x^4 \text{ 的系}$$

数; (2) x^3 的系数; (3) 常数项。

解 (1) 由行列式定义， $f(x)$ 中含 x^4 的项只能由行列式主对角线上的 4 个含 x 的一次因式的乘积 $(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44})$ 得到，可见 x^4 的系数为 1。

(2) 同理， $f(x)$ 中含 x^3 的项也只能由行列式主对角线上的 4 个含 x 的一次因式得到，与 (1) 不同的是， x^3 的项是由其中的 3 个因式与另外一个因式中的常数项的乘积而得到的，即

$$\begin{aligned} & (-a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44}) + (x - a_{11})(-a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44}) + \\ & (x - a_{11})(x - a_{22})(-a_{33})(x - a_{44}) + (x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})(-a_{44}), \end{aligned}$$

可见 x^3 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(3) $f(x)$ 是 x 的一元四次多项式, $f(x)$ 的常数项即为 $x=0$ 时 $f(x)$ 的值:

$$f(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

二、余子式和代数余子式

例 5 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, 求: (1) $-A_{31} + 2A_{32} + 5A_{33} + 4A_{34}$;

(2) $A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42}$.

解 (1) 可以求出每一个代数余子式, 再作运算, 但这样很繁琐.

由于 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 分别是 D 的第 3 行元素 $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$ 的代数余子式, 而式子 $(-1)A_{31} + 2A_{32} + 5A_{33} + 4A_{34}$ 中, $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 的系数 $-1, 2, 5, 4$ 显然是 D 的第 4 行元素 $a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$, 根据行列式按行(列)展开的法则(第 1 章定理 1.2 的推论)

$$-A_{31} + 2A_{32} + 5A_{33} + 4A_{34} = a_{41}A_{31} + a_{42}A_{32} + a_{43}A_{33} + a_{44}A_{34} = 0.$$

(2) $A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42}$ 是 D 的第 2 列元素 $a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}$ 的代数余子式分别与 $1, -1, 1, -1$ 乘积之和. 因此, 将 D 的第 2 列元素更换为 $1, -1, 1, -1$, 构造一个新行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix},$$

显然 D_1 的前两列元素相同, 故 $D_1 = 0$, 即 $A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42} = 0$.

例 6 已知行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$, 求 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$.

解 由已知条件得