纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第5号

弹性结构的数学理论

冯 康 石钟慈 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第5号

弹性结构的数学理论

冯 康 石钟慈 著

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书包括三方面的基本内容：一、线性弹性理论基础，这是经典的内容；二、组合弹性结构的数学理论，作者提出了自己的数学体系；三、弹性结构问题的有限元方法. 作者在统一的理论基础上把这三方面内容有机地结合起来进行论述，着重弹性结构问题的数学提法的准确性和完整性.

本书可供应用数学、弹性力学、结构力学等方面的理论工作者、计算工作者和工程技术人员以及高等院校有关专业的师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：魏茂全 向安全／责任校对：李静科
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1981 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 1 月 印 刷 印张：19 1/4
字数：372 000

序

弹性力学是一门经典学科. 弹性力学的数学理论特别是它的线性化理论, 在其特定的范围内, 通过历史性的实践检验, 已相当成熟和定型化了, 并已成为若干工程科学的基础之一. 近一二十年来, 与这一经典学科有密切联系的若干方面已有了新的发展, 特别是在以下两个方面:

其一是数值方法, 特别是有限元方法的发展. 有限元方法是在我国和在西方沿着不同的学术道路各自独立地创造发展起来的解微分方程——特别是椭圆型方程的——系统化、现代化的数值方法. 大量的实践检验, 证明它具有强大的解题效能和异常宽广的应用范围——包括(而远不限于)弹性力学的领域, 尤其适用于高度复杂的问题. 作者之一(冯康)有幸参与了有限元方法的创始与理论奠基工作, 在 20 世纪 60 年代前期曾认为在计算机的配合下, 这一方法将使固体力学计算问题得到实际解决. 后来的实践证实了而且还在继续证实这一看法. 事实上, 它已成为把弹性结构力学这门科学落实为生产力的主要环节, 并对这门科学的进一步发展起了巨大影响. 作者认为, 在一本现代化的弹性结构力学的书里把有限元方法列为一个重要组成部分的设想是可取的, 而且时机业已成熟.

其二是组合弹性结构力学的发展. 现代工程实践中所面临的不只限于经典的、几何上单一的弹性体, 而且更重要的还有由多个——包括不同维数的和不同性能的——弹性构件耦合而成的组合体, 即组合弹性结构. 例如航天结构、反应堆结构、地下结构、海上钻台结构、高层建筑结构, 等等. 这是弹性力学在几何复杂性方向上的发展, 具有很大的实践与理论意义. 这一方面的发展事实上也是与有限元法的发展交互影响着的. 但是, 组合结构的数学基础迄今还不够严密、完整. 与此同时, 作者之一(冯康)在近几年来发展了组合流形上椭圆型方程理论, 并可以应用于组合弹性结构而作为它的一个比较严谨的数学基础和理论框架. 这将有助于它在理论与应用上的进一步发展. 因此也提供了这样的条件, 使得在一本现代化的弹性结构力学的书中能以对等的严整性列入组合结构的数学理论.

鉴于上述情况, 作者写了这本书, 包括三方面的基本内容: 一、线性弹性理论基础, 这是经典的内容. 二、组合弹性结构的数学理论, 这里作者提出了自己的数学体系. 三、弹性结构问题的主导的数值解法——有限元方法. 作者试图在统一的理论基础上把这三方面的内容有机地结合起来. 在这个意义上, 本书可能是一本全新的著作. 为此目的, 全书统一在以位移为基本变量的势能极小原理的

数学基础上进行理论论述，着重弹性结构问题的数学提法的准确性和完整性．这也可以说是本书的另一个特点．大家知道，变分原理是弹性理论的数学表达方式之一．它虽不是唯一的方式，但确实是充足的，即可以处理几乎一切的弹性问题．大家也知道，基于位移的势能极小原理在弹性理论的变分原理中虽不是唯一的，但同样也确实是充足的，而且具有最大的通用性，特别适用于复杂性大的问题．还应该指出，有限元方法正是基于变分原理这一数学形式，特别是取以位移为基础的变分原理的形式之后才在实践上取得了巨大成功．我们出自上述的指导思想，希望用比较经济的手段达到我们所企求的目的．至于是否真正做到了这一点，以及书中可能存在的缺点和错误，则敬请读者指正．

本书的初稿曾于 1977 年冬由石油化学工业部和 1978 年夏由中国科学院计算中心分别在南京和北京主办的讨论班上讲授过．作者在写作、讲授与修订本书的过程中曾得到林群、王荩贤、阎长洲、傅子智等同志以及参加讨论班的同志们的热情支持与帮助，在此表示深切的感谢．

冯　康　石钟慈

一九七九年十二月廿日

目　　录

序
第 1 章　弹性变形的简单模式 ······ 1
1.1　弹簧的简单伸缩 ······ 1
1.1.1　变形模式 ······ 1
1.1.2　变分原理与平衡方程 ······ 3
1.2　均匀杆的伸缩 ······ 4
1.2.1　变形模式 ······ 4
1.2.2　变分原理与平衡方程 ······ 7
1.2.3　分段均匀杆 ······ 11
1.2.4　平面抗拉杆系 ······ 15
1.3　非均匀杆的伸缩 ······ 26
1.3.1　变形模式 ······ 26
1.3.2　变分原理 ······ 27
1.3.3　边界值问题 ······ 34
1.3.4　平衡方程 ······ 38
1.3.5　无应变状态 ······ 40
1.4　各向伸缩 ······ 42
1.4.1　虎克定律与应变能 ······ 42
1.4.2　体积变化 ······ 44
1.5　剪切变形 ······ 46
1.5.1　切应力 ······ 46
1.5.2　切应变 ······ 47
1.5.3　切变虎克定律与应变能 ······ 49
1.6　圆杆的扭转 ······ 49
1.6.1　变形模式 ······ 49
1.6.2　变分原理与平衡方程 ······ 51
1.6.3　圆管的扭转 ······ 52
1.7　梁的弯曲 ······ 53

1.7.1 变形模式 …… 53
1.7.2 变分原理与平衡方程 …… 55
1.7.3 边界条件与交界条件 …… 59
1.7.4 无应变状态 …… 61
第 2 章 静态弹性力学 …… 63
2.1 位移与应变 …… 63
2.1.1 应变 …… 63
2.1.2 旋转 …… 64
2.1.3 无应变状态与无穷小刚性位移 …… 66
2.2 主轴变换与主应变 …… 67
2.2.1 坐标转轴 …… 67
2.2.2 新老坐标系上的应变张量 …… 68
2.2.3 主轴与主应变 …… 69
2.3 应力 …… 71
2.3.1 应力分量 …… 71
2.3.2 平衡方程 …… 72
2.3.3 主应力 …… 73
2.4 虎克定律与应变能 …… 74
2.4.1 虎克定律 …… 74
2.4.2 应变能 …… 76
2.5 变分原理与弹性平衡 …… 78
2.5.1 变分原理 …… 78
2.5.2 平衡方程 …… 80
2.5.3 边界条件和交界条件 …… 81
2.5.4 无应变状态 …… 84
2.5.5 关于变分原理和有限元方法 …… 84
2.6 几何协调性 …… 85
2.6.1 向量场的可积分条件与区域的拓扑性质 …… 85
2.6.2 几何协调方程与积分条件 …… 92
2.7 热效应 …… 97
2.7.1 虎克定律与应变能 …… 97
2.7.2 变分原理与平衡方程 …… 99

第 3 章 典型的弹性平衡问题……103
3.1 平面弹性问题……103
3.1.1 平面应变问题……104
3.1.2 平面应力问题……106
3.1.3 比较……107
3.1.4 一维问题……109
3.2 平面几何协调性与应力函数……110
3.2.1 平面几何协调性……110
3.2.2 应力函数……111
3.2.3 边界条件……113
3.2.4 复连通域……116
3.3 柱体的扭转……119
3.3.1 变形模式……119
3.3.2 扭转函数……120
3.3.3 应力函数……123
3.3.4 几种特殊断面的扭转公式……126
3.4 薄板的弯曲……128
3.4.1 变形模式……128
3.4.2 变分原理……130
3.4.3 平衡方程……133
3.4.4 边界条件与交界条件……139
3.4.5 无应变状态……145
3.4.6 热效应……147
3.5 空间梁的弯曲……150
3.5.1 变形模式……150
3.5.2 变分原理……153
3.5.3 平衡方程……156
3.5.4 边界条件与交界条件……158
3.5.5 无应变状态……159
3.5.6 热效应……160
第 4 章 组合弹性结构……163
4.1 引言……163
4.2 平面组合结构……164

4.2.1 几何描述 ……164
4.2.2 基本构件 ……168
4.2.3 刚接连系 ……173
4.2.4 边界条件 ……177
4.2.5 铰接连系 ……178
4.2.6 变分原理 ……179
4.2.7 平衡方程 ……180
4.2.8 无应变状态 ……182
4.3 空间组合结构 ……185
4.3.1 几何描述 ……185
4.3.2 基本构件 ……190
4.3.3 刚接连系 ……199
4.3.4 边界条件 ……201
4.3.5 铰接连系 ……203
4.3.6 变分原理 ……205
4.3.7 平衡方程 ……206
4.3.8 无应变状态 ……213
4.3.9 偏心距的处理 ……217
第 5 章 有限元方法 ……220
5.1 引言 ……220
5.2 杆件的拉伸与扭转 ……221
5.2.1 变分问题 ……221
5.2.2 剖分与插值 ……221
5.2.3 单元分析（一次元） ……224
5.2.4 总体合成 ……226
5.2.5 强加条件的处理 ……228
5.2.6 二次元的应用 ……229
5.3 梁的弯曲 ……232
5.3.1 变分问题 ……232
5.3.2 三次 Hermite 元 ……233
5.4 泊松(Poisson)方程 ……236
5.4.1 变分问题 ……236
5.4.2 剖分与插值 ……237

5.4.3 单元分析（一次元与二次元）······244
5.4.4 总体合成及其他······252
5.5 平面弹性问题······254
5.5.1 变分问题······254
5.5.2 双线性矩形元······256
5.5.3 强加边界条件······262
5.6 薄板弯曲问题······263
5.6.1 变分原理······263
5.6.2 不完全双三次矩形元(Adini-Clough-Melosh 元)······264
5.6.3 不完全三次三角形元(Zienkiewicz 元)······271
5.6.4 完全二次三角形元(Morley 元)······275
5.6.5 关于非协调元······279
5.7 组合结构······280
5.7.1 平面组合结构······280
5.7.2 空间组合结构······286
5.7.3 非标准交接与偏心距处理······293
参考文献······296

第 1 章　弹性变形的简单模式

1.1　弹簧的简单伸缩

1.1.1　变形模式

设有一长度为 L 的弹簧, 一端 O 固定, 在另一端 A 加力使之拉伸或压缩. 设在外力 f 作用下, 弹簧的伸长即 A 点的位移为 u(图 1). 规定 $u>0$ 为拉伸, $u<0$ 为压缩. 实验证明, 在一定的范围内, 所加的外力 f 与弹簧的伸长 u 成正比:

$$f=cu, \tag{1.1}$$

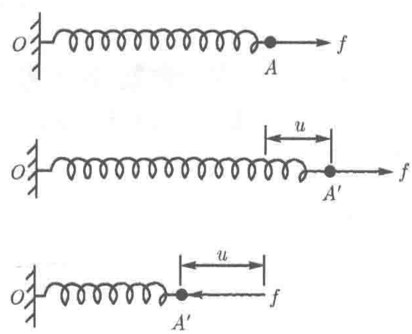

图 1

$c>0$ 是弹簧常数, 依赖于弹簧的材料特性与几何尺寸.

弹簧的一端加力后, 内部产生所谓弹性反力. 根据作用与反作用互等原理, 弹簧伸长 u 时的弹性反力为

$$R=-cu, \tag{1.2}$$

R 是弹簧的内力, 方向与外力相反. 这就是胡克定律.

因此, 在外力 f 作用下, 当弹簧伸长为 u 时, 其合力为

$$F=R+f=-cu+f,$$

特别当合力 $F=0$ 时, 弹簧处于平衡状态, 即

$$-cu+f=0, \tag{1.3}$$

这是质点 A 的平衡方程. 由此解出平衡态的位移

$$u=f/c,$$

再由胡克定律得到 A 点的弹性反力

$$R=-cu=-f.$$

再考察弹簧的合力 F. 当一质点在外力 F 作用下移动距离 du, 若力与位移的方向一致, 则所做的功等于

$$dw = Fdu.$$

质点的势能 dJ, 按照习惯表为功的反号, 即

$$dJ = -dw = -Fdu,$$

或者写为

$$\frac{dJ}{du} = -F, \tag{1.4}$$

积分后得

$$J = -\int Fdu + J_0, \tag{1.5}$$

其中 J_0 是一个积分常数, 表示某一基准势能, 不妨取 $J_0 = 0$. 因此, 若已知势能 J, 则微分一次并取反号即得力 F. 反之, 若已知力 F, 则积分一次并取反号即得势能 J.

今弹簧的合力

$$F = F(u) = -cu + f,$$

而受力方向又与伸缩方向一致, 所以其势能

$$J(u) = -\int Fdu = \frac{1}{2}cu^2 - fu, \tag{1.6}$$

这就是弹簧在外力 f 作用下伸长 u 时所具有的势能 (不管是否为平衡态).

弹簧的合力 F 是由两部分组成的. 一部分是内力, 一部分是外力, 分别记为

$$F_{内} = R = -cu, \quad F_{外} = f, \quad F = F_{内} + F_{外}.$$

与之相应, 势能 J 也可分为两部分

$$J = J_{内} + J_{外}, \ J_{内} = \frac{1}{2}cu^2, \quad J_{外} = -fu, \tag{1.7}$$

并且有

$$F_{内} = -\frac{dJ_{内}}{du} = -cu, \quad F_{外} = -\frac{dJ_{外}}{du} = f,$$

$J_{内}$ 是弹簧内部的弹性能, 是位移 u 的二次函数, 而且是正定的, 即

$$J_{内} \geqslant 0, \quad J_{内} = 0 \quad 当且仅当u = 0时,$$

注意式 (1.7) 中有因子 $\frac{1}{2}$. $J_{外}$ 称为外功势能, 是 u 的一次函数, 并有负号.

1.1.2 变分原理与平衡方程

以上是从直观的力的平衡原理来推导平衡方程. 重要的是, 弹性力学中的平衡方程还可以从全然不同的途径即根据最小势能原理导出.

事实上, 根据 (1.4), 势能与力的关系为

$$F = -\frac{dJ}{du}.$$

因此, 平衡方程 $F = 0$ 等价于 $\frac{dJ}{du} = 0$. 由于二阶导数

$$\frac{d^2 J}{du^2} = c > 0,$$

所以平衡态位移 u 使势能 J 取极小值. 反之, 使势能取极小值的状态必为平衡态. 这就是最小势能原理.

这样, 力学上的平衡问题归结为数学上的极值问题即变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2}cu^2 - fu = \mathrm{Min}.$$

最小势能原理还有另一种等价形式, 所谓虚功原理. 设平衡态位移 u 获得增量或称虚位移 v 而变为 $u + v$. 这时弹簧的势能从 $J(u)$ 变到 $J(u+v)$. 由于 $J(u)$ 是 u 的二次函数, 所以

$$J(u+v) = f(u) + J'(u)v + \frac{1}{2}J''(u)v^2 = J(u) + J'(u)v + \frac{1}{2}cv^2.$$

由此显然可见, J 达到极小值的充要条件是

$$J'(u)v = 0,$$

亦即

$$cuv - fv = 0 \quad 对一切虚位移v, \tag{1.8}$$

它的力学意义为：平衡态位移使虚功总和为零, 因此也叫虚功原理.

综上所述, 下列三个问题的解是等价的：

1° 最小势能原理：$J(u) = \frac{1}{2}cu^2 - fu = \mathrm{Min}$;

2° 虚功原理：$cuv - fv = 0$ 对一切虚位移 v;

3° 平衡方程：$cu - f = 0$.

对于弹簧伸缩这种最简单的一个自由度的平衡问题来说, 上述三种数学提法的等价性几乎是同义反复, 没有什么实质性的内容差别. 然而这种等价性对于本书将要讨论的其他各种弹性平衡问题也都是普遍成立的. 那时将会表明, 不同的数学提法将导致不同的解题途径, 而其实际效果则是极不相同的. 换句话说, 数学上的等价性并不意味着实际上的等效性.

1.2 均匀杆的伸缩

1.2.1 变形模式

取一条沿 x 轴向的等断面细长轩 Ω, 长度为 L, 断面积为 A. 将其一端固定, 另一端加以均匀的纵向载荷使杆拉伸. 设载荷合力为 f, 杆件的伸长为 δL(图 2). 与弹簧伸缩一样, 这时有胡克定律, 即作用于杆件的单位面积力 f/A 恒和相对伸长 $\delta L/L$ 成正比：

$$\frac{f}{A} = E\frac{\delta L}{L}, \tag{2.1}$$

E 为只依赖于杆件材料而不依赖于几何尺寸的常数, 叫做弹性模量或杨氏模量. 由于 $\frac{\delta L}{L}$ 为无量纲, 所以弹性模量 E 的量纲与左端 $\frac{f}{A}$ 同, 即为 $\frac{力}{面积}$.

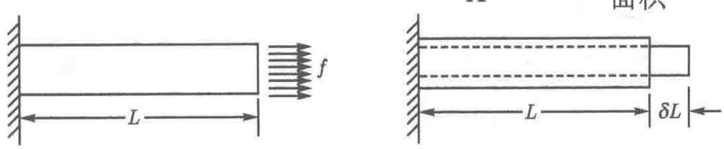

图 2

杆件在载荷作用下发生弹性变形, 内部处于紧张状态, 产生内力. 任取横断面 (与杆的纵向 x 轴正交)S, 它将杆件 Ω 分割为 Ω^+, Ω^- 两部分 (图 3(a)), 跨过 S 彼此有力作用, 其单位面积力称为应力. 命正方 Ω^+ 跨过 S 作用于负方 Ω^- 的应力为 σ. 在端面上载荷为均匀的以及杆件细长的条件下, 可以认为应力 σ 在 S 上也是均匀的. 所以整个断面上正方作用于负方的应力的合力, 即内力为

$$Q = \sigma A, \tag{2.2}$$

断面 S 上负方作用于正方的内力则为 $-Q, Q > 0$ 表示拉力, $Q < 0$ 表示压力.

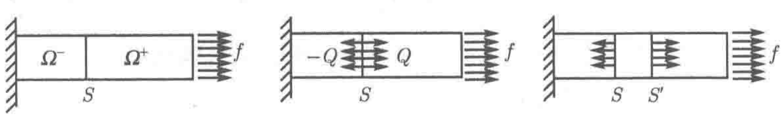

图 3

任取两个断面 S, S', 其坐标分别为 x, x', 相应的内力为 $Q(x)$, $Q(x')$. 考虑这两个断面间的截断的平衡 (图 3(c)). 由于 $S - S'$ 之间没有载荷, 所以

$$-Q(x) + Q(x') = 0,$$

从而

$$\sigma(x) = \sigma(x'),$$

即应力 $\sigma(x)$ 与断面所在的 x 坐标无关:

$$\sigma(x) \equiv \sigma = \text{常数}.$$

再考虑 Ω^+ 区段上的平衡 (图 3(b)), 得

$$-Q + f = 0,$$

即

$$-A\sigma + f = 0, \tag{2.3}$$

这就是用应力表示的平衡方程, 由此立即解出应力

$$\sigma = \frac{f}{A}.$$

杆件的弹性变形用相对伸长来度量, 叫做应变, 记为 ε. 于是胡克定律 (2.1) 可以用应力与应变表示为

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\delta L}{L}, \tag{2.4}$$

$\varepsilon > 0$ 相当于拉伸变形, $\varepsilon < 0$ 相当于压缩变形. 在上述均匀载荷细长杆的条件下, 应变 ε 与应力 σ 一样也是均匀的.

如果应力 σ 在杆内不是均匀的, 则应变 ε 也不是均匀的, 而是一个相对伸长的极限值. 设在载荷作用下杆件发生变形, 坐标为 x 处的质点取得位移 $u(x)$, 与 x 相邻近的点 $x' = x + \Delta x$ 的位移为 $u(x') = u(x + \Delta x)$, 于是相对伸长的极限为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x).$$

这样, 在每一点 x 可以用位移 $u(x)$ 的导数 $u'(x)$ 作为应变的度量, 即

$$\varepsilon = u' \tag{2.5}$$

当应变为均匀时, 位移 u 是 x 的线性函数

$$u = u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x, \tag{2.6}$$

其中

$$u_1 = u(0) = 0, \quad u_2 = u(L) = \delta L.$$

根据 (2.5) 与 (2.6) 式以及胡克定律 (2.4), 我们可以将用应力表示的平衡方程 (2.3) 改写为

$$-\frac{EA}{L} u_2 + f = 0, \tag{2.7}$$

系数 $\dfrac{EA}{L}$ 称为杆件的抗拉刚度. 由此立即解出位移

$$u_2 = \frac{Lf}{EA}.$$

平衡方程 (2.7) 以位移 u 作为未知量, 先解出位移, 再用 (2.5) 式与胡克定律求应变与应力, 这种按位移求解平衡方程的方法叫做位移法. 相反, 平衡方程 (2.3) 以应力 σ 为未知量, 先解出应力, 再用胡克定律与 (2.5) 式求应变与位移, 这叫做力法. 位移法和力法是弹性力学中解平衡方程的两种常用方法. 本书主要讨论位移法.

单独一个弹性模量 E 还不足以刻画材料的全部弹性性质. 实验表明, 在纵向载荷导致纵向的拉伸 (压缩) 变形的同时必伴以横向的压缩 (拉伸) 变形 (图 2(b)). 事实上, 上面定义的 u, ε, σ 只是对纵向 x 而言, 类似地还可以定义另外两个横向即 y 和 z 方向上的位移 v, w; 应变 $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$ 以及应力 σ_y, σ_z. 对于上述纵向载荷下纵向拉伸的胡克定律应写为

$$\sigma_x = E\varepsilon_x.$$

与此同时有横向压缩与纵向拉伸成比例

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x,$$

这里无量纲数 ν 也是只依赖于材料的常数, 叫做泊松比. 式中的负号表示在纵向载荷作用下, 纵向与横向的应变相反号. 可以证明, 各向同性 (即对于任意旋转具有不变性) 的固体材料的弹性性质可以通过弹性模量 E 和泊松比 ν 两个常数来完全表达. 但各向异性材料则不然. 例如对于立方晶体需要三个材料常数, 而对于一般的三斜晶体则需要 21 个常数. 对于泊松比 ν , 后面将要证明 $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$.

表 1 列出一些工程材料的弹性模量和泊松比. 可以看到, E 是很大的数. 这就是说, 在通常的载荷条件下弹性应变是很微小的. 事实上, 描述应力与应变之间线性关系的胡克定律 (即所谓弹性定律) 只是在微小应变时才成立. 当应力增加到一定程度时, 材料开始屈服, 无须显著地增加应力就会有显著的变形, 材料成为塑性的. 当应变继续增加后最终会造成破坏. 有些工程材料对于拉伸和压缩的抵抗是不对等的, 例如混凝土能抗压而不甚抗拉. 此外, 有些工程材料加载时在 $\varepsilon - \sigma$ 平面中沿一条路径上升, 而在卸载时却沿着另一条路径下降, 只能部分地回到原来状态而遗留有永久的变形. 所有这些都是对于理想的线性弹性规律的偏离, 虽然在实践上都是常见的, 但本书将不予讨论.

表 1

材料	弹性模量E(达因/厘米^2)	泊松比
钢	20.0×10^{11}	0.28
铜	11.0×10^{11}	0.34
混凝土	2.7×10^{11}	0.10
橡皮	0.05×10^{11}	0.48

1.2.2 变分原理与平衡方程

现在我们从能量出发,用变分原理对均匀杆件的伸缩变形作进一步的分析.

杆件在变形时内力做功,作为应变能储存起来. 在杆件内任取单位断面积及单位长度的体元. 设想体内应力即单位面积上的力 σ' 由 0 变到 σ, 相应地应变即单位长度的伸长 ε' 由 0 变到 ε(图 4). 令

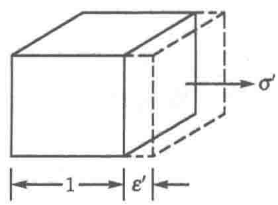

图 4

$$\sigma'=t\sigma,\quad \varepsilon'=t\varepsilon,$$

则 t 由 0 变到 1. 所以单位体元所存的应变能 (或称应变能体密度) 为

$$W=\int_0^{\varepsilon}\sigma' d\varepsilon'=\int_0^1 t\sigma\varepsilon dt=\sigma\varepsilon\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \tag{2.8}$$

注意式中有因子 1/2. 因为纵向载荷对于同时产生的横向变形不做功,故后者对于应变能无贡献.

由 (2.8) 式, 单位长杆元的应变能 (或称应变能线密度) 为

$$\overline{W}=WA=\frac{1}{2}A\sigma\varepsilon=\frac{1}{2}EA\varepsilon^2,$$

所以杆件的总应变能 (考虑到左端固定, 即 $u_1=0$) 为

$$P=\overline{W}L=\frac{1}{2}EAL\varepsilon^2=\frac{1}{2}\frac{EA}{L}(u_2-u_1)^2=\frac{1}{2}cu_2^2,\quad c=\frac{EA}{L}. \tag{2.9}$$

另一方面, 右端载荷 f 对当地位移 u_2 做功 fu_2, 所以外功势能为 $-fu_2$. 于是杆件的总势能为

$$J(u_2)=\frac{1}{2}cu_2^2-fu_2, \tag{2.10}$$

这是单自由度的问题, 变元为 u_2. 其形式与 1.1 节弹簧伸缩时的势能表达式 (1.6) 完全相同, 因此仍有三种等价的数学提法 (为了简化, 记 $u_2=u, v_2=v$):

1° 最小势能原理: $J(u)=\frac{1}{2}-cu^2-fu=\mathrm{Min}$,

2° 虚功原理: $cuv-fv=0$, 对一切虚位移 v,