普通高等教育“十三五”规划教材

微积分

王霞　何国亮　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

微 积 分

王 霞 何国亮 主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是以教育部2016年颁布的《高等学校“十三五”科学和技术发展规划》和2015年颁布的《大学数学课程教学基本要求》为纲领，在广泛调查研究的基础上，结合高等教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验，并广泛吸取微积分教学改革成果和国内外诸多同类优秀教材的精华编写而成．本书共有10章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程与差分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的微积分、无穷级数．其中标“*”号的为选学内容，读者可自行选择．

本书适合本科理工类、经管类、财经类和文科类各专业使用，也可供各类高职高专院校根据专业需求自行选用．

图书在版编目(CIP)数据

微积分/王霞，何国亮主编．—北京：科学出版社，2017
（普通高等教育“十三五”规划教材）
ISBN 978-7-03-053855-0

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①王…　②何…　Ⅲ．①微积分-高等学校-教材
Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第141135号

责任编辑：宋　丽　陈将浪 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017年8月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2017年8月第一次印刷　印张：23
字数：550 000

定价：46.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62136230　编辑部电话 010-62135927-2014

前　言

本书有以下几大特点：一是力求适合素质教育，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力和创新精神；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是例题与习题实用性较高，书中选用较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结；四是本书配备的各类题型都是精心设计的，既有涉及基本知识、基本方法和基本技巧的习题，也有涉及巩固提高的习题，每章结束还设计了自测题．配备自测题是为了强化全章知识，增强学生综合使用所学知识的本领，并通过训练达到能力提升的目的．另外，本书的各类题型中均设计了一定数量的贴近生活、贴近实际的应用题，以增强学生综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得专业知识奠定必要的数学基础．

与以往所用教材相比，本书克服了覆盖面小、习题配备难度大及与日常生活脱节等不适合学生学习的缺点，使学生在课堂上既能学到必要的基础知识，又能使基本技能得到必要的训练，能力得到普遍提高．由于有很多现代化的知识渗透其中，因此本书也将为学生进一步深造和就业奠定良好的基础．

本书由郑州轻工业学院王霞、何国亮担任主编，由赵玲玲、何琳、杨静、王艳青、李珍珍、李春担任副主编．

由于编者水平和经验有限，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2017 年 6 月

目　录

第1章 函　　数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的一个数学概念. 函数描述了现实世界中各种变量之间的相互依赖关系，是微积分研究的基本对象. 自17世纪近代数学产生以来，函数的概念一直处于数学研究的核心位置. 本章将给出函数的概念和基本性质，并介绍经济学中一些常见的函数.

1.1 函数的概念与性质

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，一般地，我们将具有某些确定性质的对象组成的全体，称为**集合**（简称**集**），通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 或带下标的大写字母 $A_1,B_1,\cdots$ 表示. 集合中的各个对象称为集合的**元素**，通常用小写字母 $a,b,\cdots$ 或带下标的小写字母 $a_1,b_1,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的一个元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A，否则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

我们把不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$；而把所研究问题的全体元素组成的集合称为**全集**，记为 E 或者 U；含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限多个元素的集合称为无限集.

集合的表示方法通常有两种:

一种是**列举法**（**枚举法**），就是将集合中的元素全部列出，写在一个花括号内，元素间用逗号隔开，如 $A=\{a,b,c,d\}$，$N=\{0,1,2,\cdots\}$. 用列举法表示集合时，一般对元素之间的次序没有要求，对重复的元素通常看作同一个元素，在集合中用到省略号时，省略的部分必须满足一般的可认知性.

一种是**描述法**，一般形式是 $A=\{x\,|\,p(x)\}$，其中 x 表示 A 中的元素，$p(x)$ 表示 A 中的元素 x 所具有的特征. 如 $B=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$ 表示大于等于3且小于等于5的全体实数的集合. 一般在不致混淆的情况下，可以省去“$x\in\mathbf{R}$”，记成 $B=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant 5\}$.

如果集合中的元素都是数，则称其为数集. 有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”或者“－”来表示该数集是由所有正数或者负数构成的特定子集. 常用的数集及其符号表示有以下几种:

全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^+$，即 $\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{且}p\text{与}q\text{互质}\right\}$.

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

集合之间有以下几种关系.

定义 1.1 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的一个子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A.

定义 1.2 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$，否则记为 $A\neq B$.

定义 1.3 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的一个真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

在后面的许多问题的讨论中，我们往往将问题限定在某两个实数之间，为了简便地表示这部分实数集合，我们引入区间和邻域的概念.

若实数 $a<b$，满足条件 $a<x<b$ 的全体实数构成的集合称为一个**开区间**，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所构成的集合称为一个**闭区间**，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 类似地，可以定义**半开半闭区间** $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**.

除了上面的有限区间外，还可以定义无限区间

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\};$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\ [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},\ (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

下面给出邻域的概念.

定义 1.4 以点 x_0 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为**以点 x_0 为中心的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

有些情形下不要求指出邻域的半径，则可以简单记作 $U(x_0)$，称为 x_0 的**某个邻域**.

我们还可以定义以点 x_0 为中心、δ 为半径的**去心邻域**：

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

它不包含邻域中心 x_0.

1.1.2 函数的概念

在自然科学和工程技术中，常常会遇到这样两种量：常量和变量. 在某一变化过程中保持不变的量叫作**常量**，常用 a，b，c，…表示；在某一变化过程中不断变化的量叫作**变量**，常用 x，y，z，…表示.

例 1.1 一个物体在做自由落体运动过程中，物体经过的路程 s 与时间 t 之间的对应关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中重力加速度 g 为常量，而路程 s 与时间 t 均为变量.

例 1.2 一根导线在输电过程中，电压 U 与电流 I 之间的对应关系满足欧姆定律（设电阻值保持不变）

$$I=\frac{U}{R}\text{ 或 }U=RI,$$

其中，电阻 R 为常量，而 I 与 U 均为变量.

例 1.3　圆的面积 A 与它的半径 r 之间的对应关系为

$$A=\pi r^2,$$

其中，π 为常量，而 A 与 r 均为变量.

定义 1.5　设 x 与 y 是两个变量，D 为实数集的一个非空子集．若对 D 中的每一个数 x，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的（单值）函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$．x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量的取值范围 D 叫作这个函数的**定义域**.

当 x 在定义域 D 内取值 x_0 时，对应的 y 的数值为函数在点 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0=f(x_0) \text{ 或 } y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

当 x 取遍 D 内的一切数值时，对应函数值的集合

$$R=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

叫作函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

注　（1）函数的定义域和对应法则称为函数的二要素，两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则分别相同；

（2）函数的表示方法有表格法、图像法和解析法（也称公式法）．根据函数解析式表达形式的不同，函数又可分为显函数和隐函数．函数 y 由 x 的解析表达式直接表示的函数称为显函数，如 $y=x^2+2x+3$；自变量 x 与因变量 y 的对应法则一般由方程来表示的函数称为隐函数，如 $e^y=x+1$.

例 1.4　设函数 $f(x)=3x^2+1$，求 $f(1)$ 及 $f(a+1)$.

解　由函数的定义可知

$$f(1)=3\times1^2+1=4,$$

$$f(a+1)=3\times(a+1)^2+1=3a^2+6a+4.$$

例 1.5　设函数 $f(x-1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$ 及 $f(x+1)$.

解　令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，所以 $f(u)=(u+1)^2-3(u+1)+2$，所以有

$$f(x)=(x+1)^2-3(x+1)+2,$$

$$f(x+1)=(x+2)^2-3(x+2)+2=x^2+x.$$

例 1.6　判断下列函数是否相同.

（1）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

（2）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

（3）$f(x)=x$ 与 $g(x)=x\cos^2x+x\sin^2x$；

（4）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$.

解　（1）由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，与函数 $f(x)=x$ 的对应法则不同，所以这两个函数不相同.

（2）在函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 中，$x\neq0$，与函数 $f(x)=x$ 的定义域不同，故两个函数不

相同.

（3）函数 $g(x)=x\cos^2 x+x\sin^2 x=x$，与函数 $f(x)=x$ 的定义域和对应法则均相同，故这两个函数相同，即 $f(x)=g(x)$.

（4）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 1\}$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，两者定义域不同，故这两个函数不相同.

1.1.3 函数的定义域

定义域一般分为两种情况：

（1）在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义确定的，叫作**实际定义域**，如自由落体运动函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中的时间 t 必须满足 $t\geqslant 0$ 才有意义，即函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$.

（2）对于用数学解析式表示的函数，如果不考虑它的实际意义，那么使函数表达式有意义的一切实数组成的集合就是函数的定义域，叫作**自然定义域**，简称定义域，如函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}gx^2$（g 是常数）的定义域为 $\mathbf{R}$.

例 1.7 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，自变量必须满足：

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}.$$

则函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

1.1.4 几个特殊函数

下面举几个特殊函数的例子.

例 1.8 绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$. 其图像如图 1.1 所示.

如果一个函数在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**，相应的子集的共同端点称为该函数的分段点. 需要注意的是，尽管在不同的区间内函数的表达式不同，但它们是一个整体，表示的是一个函数，而不是几个函数.

例 1.9　符号函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases},$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=\{-1,0,1\}$，其图像如图 1.2 所示.

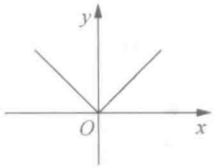

图 1.1

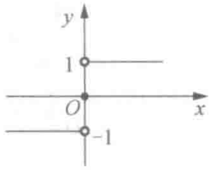

图 1.2

例 1.10　取整函数

$$y=f(x)=[x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即若 $x=n+r$，$n\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant r<1$，则 $[x]=n$．其定义域为 $D_f=\mathbf{R}$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$，图像如图 1.3 所示.

例 1.11　用解析法给出图 1.4 表示的函数.

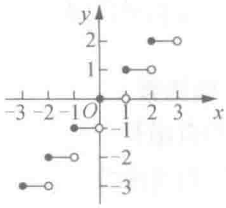

图 1.3

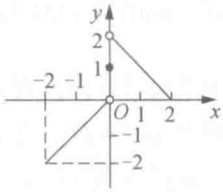

图 1.4

解　这是定义在 $[-2,2]$ 上的函数，当 $x\in[-2,0)$ 时，$y=x$；当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x\in(0,2]$ 时，$y=2-x$，所以

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-2,0)\\ 1, & x=0\\ 2-x, & x\in(0,2]\end{cases}.$$

例 1.12　设有一个边长为 a 的正方形铁皮，现将它的四角减去边长相等的小正方形，做成一个无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数.

解　设减去的小正方形的边长为 x，则盒子的底边长为 $(a-2x)$，盒子的体积为 V，则

$$V=x(a-2x)^2,0<x<\frac{a}{2}.$$

1.1.5　函数的几种特性

1．函数的单调性

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$，如果对某区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都