度量空间与函数空间的拓扑

（第二版）

林　寿／著

科学出版社

度量空间与函数空间的拓扑

(第二版)

林　寿　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书的主要内容是函数空间的广义度量性质及基数函数性质．全书由两部分组成，第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映像，第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质．本书展示了度量空间映像的核心内容及函数空间优美的对偶理论，突出了完全性在探索函数空间收敛性中的作用，把集论拓扑的研究应用于函数空间．

本书可供高等院校数学系高年级本科生、研究生以及数学工作者参考，也可供相关科研人员使用．

图书在版编目(CIP)数据

度量空间与函数空间的拓扑/林寿著．—2版．—北京：科学出版社，2018. 3

ISBN 978-7-03-056654-6

Ⅰ. ①度… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①度量空间-拓扑 ②函数空间-拓扑

Ⅳ. ①O189 ②O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 036581 号

责任编辑：王丽平／责任校对：张凤琴

责任印制：张 伟／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 5 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2018 年 3 月第 二 版 印张：15 3/4

2018 年 3 月第二次印刷 字数：307 000

定价：118.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

谨以本书的再版祝贺苏州大学吴利生教授 80 寿辰.

本书第一版出版于 2004 年, 其主要目的在于使世纪之交活跃的 “度量空间的连续映射” 与 “连续函数空间的拓扑性质” 这两个研究方向融为一体, 有更多的青年数学工作者投身于该方向的研究[161]. 近年来, 一般拓扑学的一个活跃的研究领域是 A.V. Arhangel'skiĭ 等学者致力于具有更丰富代数结构的拓扑空间的研究, 从而发展了拓扑代数的研究方向[30]. 拓扑代数的研究可谓“殊途同归”. 一方面, 20 世纪 70 年代至 90 年代, 一些俄罗斯学者从函数空间的研究逐步进入拓扑代数的研究, 函数空间作为具有良好性质的拓扑群在拓扑代数的研究中具有特别的意义; 另一方面, 21 世纪初国内一些青年人从拓扑空间论的研究逐步进入拓扑代数的研究, 从而形成了拓扑代数中广义度量空间理论的研究方向[146, 148]. 这表明关于度量空间与函数空间拓扑的研究具有深厚底蕴与巨大潜力. 近年来, 关于广义度量空间、函数空间、选择理论、描述集论、拓扑代数与泛函分析的研究更强化了这一观点[40, 56]. 本书第一版出版后, 度量空间与函数空间拓扑的研究均有不少新的进展, 为更好地反映学科研究趋势、展示国内学者贡献, 特出版经修订后的第二版.

本书的修订和出版得到国家自然科学基金资助项目 “仿拓扑群中的三空间问题” (编号: 11471153) 和福建省省级重点学科 (数学) 建设经费的支持. 修订稿的录入和编辑得到作者在四川大学、闽南师范大学的研究生的帮助, 其中郑春燕同学绘制了全书的插图. 借此机会, 向所有关心、支持和帮助第二版出版的同行们表示衷心的感谢.

作　者

2017 年 8 月

第一版前言

从 K. Weierstrass 以来, 人们十分关心闭区间上的连续函数列以及它们的收敛性. 在泛函分析、微分方程、代数拓扑、微分几何和概率论及数学许多分支的应用中常出现寻求函数集的极限问题. 这是数学中最常见的现象之一. 通过在函数集上定义一些自然的拓扑, 借助一般拓扑的方法, 这类问题可转化为函数空间的拓扑. 拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想正是来自函数序列的点式收敛和一致收敛的概念. 19 世纪末, C. Arzelà, G. Ascoli, U. Dini 和 J. Hadamard 等一些学者就开始从事函数空间理论的研究. 1906 年 M. Fréchet[81] 在研究连续函数集的收敛问题时引入度量空间的概念, 并探讨了上确界度量拓扑. 在一般拓扑学发展早期, 拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是以分析为背景的点式收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年 R. Fox[79] 定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑, 引导人们关注函数空间的拓扑性质. 1976 年 A. Arhangel'skiĭ 的论文[15] *On some topological spaces that arise in functional analysis* 是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志. 1988 年 R.A. McCoy 和 I. Ntantu[191] 的著作 *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions* 和 1992 年 A. Arhangel'skiĭ[22] 的著作 *Topological Function Spaces* 进一步推动了函数空间理论的研究.

1991 年作者与广西大学刘川在四川大学数学研究所访问期间, 与四川大学滕辉一同研读了 A. Arhangel'skiĭ, W.W. Comfort, R.A. McCoy 和 I. Ntantu 等关于函数空间和拓扑群的论著, 开始在国内外刊物发表论文. 1994 年项目 “点集拓扑” (编号: 19476010) 和 “函数空间的拓扑性质” (编号: 19501023) 获得了国家自然科学基金资助, 从而有力地支持了作者从事函数空间的研究. 本书的部分内容还来自国家自然科学基金资助项目 “集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用” (编号: 19971048) 的部分研究成果.

函数空间讨论的中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得拓扑空间 X 具有性质 P 当且仅当连续函数空间 $C(X,\mathbb{R})$ 具有性质 Q[21]. 度量空间是数学研究的主要对象之一, 连续函数空间理论最基本的内容是它的可度量性. 20 世纪 70 年代以来, 广义度量空间理论和集论拓扑中的基数函数理论取得了巨大成就, 所以函数空间的广义度量性质及基数函数性质是我们探索的重点之一. 本书由两部分共 6 章组成. 第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映像. 第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质. 由于函数空间具有较丰富的结构, 同时与泛函分析、概率论等分支有密切的联系, 限于作者

的水平, 在此只能介绍一些最基本的内容, 包括作者近年来在度量空间映像及函数空间理论的部分研究成果. 只要读者了解点集拓扑学的一些初步知识, 如学习了熊金城的《点集拓扑讲义》[286] 或蒲保明、蒋继光和胡淑礼的《拓扑学》[235], 就可顺利地阅读本书.

近 10 年来, 围绕 J. van Mill 和 G.M. Reed[206] 主编的 *Open Problems in Topology* 中的相关问题, 函数空间理论获得了很大的发展. 2001 年 J. van Mill[205] 的力作 *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces* 表明函数空间的研究是一般拓扑学中很有活力的研究方向. 本书的出版将使近年来活跃的 "度量空间的连续映射" 及 "连续函数空间的拓扑性质" 这两个研究方向融为一体, 希望国内有更多的年青数学工作者投身于该方向的研究, 不断提升拓扑学的研究水平, 为继续扩大我国一般拓扑学的国际影响作出更大的贡献. 本书的部分书稿曾在福建师范大学数学系 2000 级研究生及宁德师范高等专科学校的青年教师讨论班中讲授过. 感谢美国电子杂志 *Topological Commentary* 主编 M. Henriksen 教授提供部分拓扑学家的史料, 感谢福建师范大学聘请作者为基础数学学科特聘教授并提供宽松的工作条件. 本书的出版应特别感谢戴牧民教授、吴利生教授的热情推荐.

谨以本书献给我的导师高国士教授 85 岁寿辰.

作　者

2003 年 5 月 23 日于福建师范大学

目　　录

第 1 章　紧空间与仿紧空间

拓扑空间 X 称为紧空间, 若 X 的每一开覆盖有有限的子覆盖. 紧空间是拓扑空间理论中极其重要的空间类, 分析学中的许多性质与紧性有关. 但是像人们所熟知的实数空间却不是紧空间, 所以紧性限制了人们进一步探索更广泛的数学对象. 从本质上说, 紧性所反映的 "有限子覆盖" 是一种 "有限" 性质. 突破对空间中集族有限性限制的关键是在拓扑空间论的研究中采用局部有限集族. 这导致 1944 年法国 Bourbaki 学派的领导人之一 J. Dieudonné (1906–1992) 引入仿紧空间的概念. 紧空间和度量空间都是仿紧空间, 而 T_2 的仿紧空间是正规空间. 虽然仿紧空间的定义迟于紧空间和度量空间, 但它的出现引起拓扑学、几何学和分析学等数学分支工作者的极大兴趣, 因为这些分支中的一些定理或定理的证明得到深化或简化, 而局部有限集族及相关的 "闭包保持集族" 等概念也发展成为研究一般拓扑学的有效和自然的工具.

仿紧空间的理论是非常丰富的. 为了本书讨论度量空间及函数空间的需要, 本章在叙述紧空间的基本性质之后, 主要介绍 1953 年和 1957 年 E. Michael (美, 1925–2013) 关于仿紧性的刻画及相关的完备映射、局部紧空间和 Čech 完全空间的部分结果.

本书中如未特别说明, 以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, ω, $\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{P}$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的自然数集、正整数集、单位闭区间、有理数集和无理数集. ω 也表示最小的无限序数. 记 $\mathbb{S}_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. 对于集 X, 以 $|X|$ 表示集 X 的基数. 对于拓扑空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 上的一个拓扑. 拓扑空间简称为空间, 在不引起混淆时记 $\tau(X)$ 为 τ.

对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$, 记

$$\bigcup\mathscr{P} = \bigcup\{P : P \in \mathscr{P}\}, \ \mathscr{P} \text{ 的并};$$
$$\bigcap\mathscr{P} = \bigcap\{P : P \in \mathscr{P}\}, \ \mathscr{P} \text{ 的交};$$
$$\overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}\}, \ \mathscr{P} \text{ 的闭包}.$$

以符号 □ 表示命题论证结束或命题是不证自明的.

本书的结果都是在 ZFC 系统中讨论, 使用了选择公理的一些等价形式, 如 Tukey 引理 (引理 1.1.11)、Zermelo 良序定理 (引理 1.5.5) 和 Zorn 引理 (引理 3.3.6). 个别章节讨论一些 ZF 的命题及选择公理的作用. 特别提醒读者注意, 为了不同的需要, 本书的部分章节预先假定拓扑空间满足适当的分离性质, 如在 2.3 节设 T_1 分

离性质, 第 3 章设 T_2 分离性质, 第 5, 6 章设完全正则且 T_1 分离性质.

1.1 紧 空 间

设 X 是拓扑空间, A 是 X 的子集, $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族. $\mathscr{U}$ 称为 A 的*覆盖*, 若 $A \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. 若 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 A 的覆盖且 $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的*子覆盖*. 若覆盖的元是 X 的开 (闭) 子集, 则称该覆盖是*开 (闭) 覆盖*. 若覆盖由有限 (可数) 个元组成, 则称该覆盖是*有限 (可数) 覆盖*.

1894 年, É. Borel (法, 1871–1956) 证明了实数集中闭区间的每一可数的开覆盖具有有限的子覆盖. 1903 年, H. Lebesgue (法, 1875–1941) 进一步证明实数集中闭区间的每一开覆盖具有有限的子覆盖. 1923 年, P. Alexandroff (苏, 1896–1982) 和 P. Urysohn (苏, 1898–1924) 给出紧空间的概念[74].

定义 1.1.1　拓扑空间 X 称为*紧空间*, 若 X 的每一开覆盖有有限的子覆盖.

紧空间有许多的等价刻画. 一种直接而简明的方式是借助有限交性质. 集 X 的子集族 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 称为具有*有限交性质*, 若 $\mathscr{F}$ 的每一有限子集的交不空, 即如果 Λ 是 A 的有限子集, 则 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \neq \varnothing$.

定理 1.1.2　拓扑空间 X 是紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的闭集族的交不空.

证明　设 X 是紧空间且 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族. 若 $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \varnothing$, 则 $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在 A 的有限子集 Λ 使得 $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的覆盖, 即 $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda}(X \setminus F_\alpha)$, 所以 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \varnothing$, 从而 $\mathscr{F}$ 不具有有限交性质, 矛盾. 故 $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \varnothing$.

反之, 设空间 X 的每一具有有限交性质的闭集族的交不空且 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 的开覆盖, 则 $\bigcap_{\alpha \in A}(X \setminus U_\alpha) = \varnothing$. 由于每一 $X \setminus U_\alpha$ 是 X 的闭集, 于是存在 A 的有限子集 Λ 使得 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda}(X \setminus U_\alpha) = \varnothing$, 即 $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, 所以 $\mathscr{U}$ 有有限子覆盖. 因此, X 是紧空间. □

推论 1.1.3　紧空间的闭子集是紧的.

证明　设 X 是紧空间, F 是 X 的闭子集. 设 $\mathscr{F}$ 是子空间 F 的具有有限交性质的闭集族, 则 $\mathscr{F}$ 也是 X 的具有有限交性质的闭集族, 由定理 1.1.2, $\mathscr{F}$ 的交不空, 所以 F 是 X 的紧子空间. □

紧空间的重要性之一反映在它可获得较好的分离性质. 空间 X 称为 *T_2 空间*或 *Hausdorff 空间*①, 若 X 中不同的两点存在不相交的邻域. 对于拓扑空间 X 的子集 A 和 U, 若 $A \subseteq U^\circ$, 则 U 称为集 A (在 X 中) 的邻域.

① F. Hausdorff (德, 1868–1942) 是一般拓扑学的主要奠基人之一.

定理 1.1.4 设 X 是 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 的不相交的紧子集, 则 A 和 B 在 X 中存在不相交的开邻域.

证明 固定 $x \in A$. 对于每一 $y \in B$, 由于 X 是 T_2 空间, 分别存在 X 中点 x 和 y 的不相交的开邻域 U_y 和 V_y. 于是 $\{V_y\}_{y\in B}$ 是 X 的紧子集 B 的覆盖, 所以存在有限子集 $\{V_{y_i}\}_{i\leqslant n}$ 使其覆盖 B. 令 $U_x = \bigcap_{i\leqslant n} U_{y_i}$, $V_x = \bigcup_{i\leqslant n} V_{y_i}$, 则 U_x 和 V_x 分别是 x 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 这时 $\{U_x\}_{x\in A}$ 是 X 的紧子集 A 的覆盖, 存在有限子集 $\{U_{x_k}\}_{k\leqslant m}$ 使其覆盖 A. 令 $U = \bigcup_{k\leqslant m} U_{x_k}$, $V = \bigcap_{k\leqslant m} V_{x_k}$, 则 U 和 V 分别是 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. □

空间 X 称为**正规空间**①, 若 X 中不相交的闭集存在不相交的邻域.

推论 1.1.5 紧的 T_2 空间是正规空间.

证明 设 X 是紧的 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 中不相交的闭集, 由推论 1.1.3, A 和 B 都是 X 的紧子集. 再由定理 1.1.4, 存在 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 故 X 是正规空间. □

推论 1.1.6 T_2 空间的紧子集是闭集.

证明 设 X 是 T_2 空间且 K 是 X 的紧子集. 若 $x \in X \setminus K$, 由定理 1.1.4, 存在 X 中不相交的开集 U 和 V 使得 $K \subseteq U$ 且 $x \in V$, 于是 $V \cap K = \varnothing$. 故 K 是 X 的闭集. □

上述几个结果都是在 T_2 空间中得到的. 例 1.1.7 表明紧的 T_1 空间未必是 T_2 空间. 空间 X 称为 **T_1 空间**②, 若 x 和 y 是 X 中不同的点, 则分别存在 x 和 y 在 X 中的邻域 U 和 V 使得 $x \notin V$ 且 $y \notin U$. 空间 X 是 T_1 空间等价于 X 的每一单点集是 X 的闭集. T_2 空间是 T_1 空间.

例 1.1.7 有限补空间[252]: 紧的 T_1 空间.

设 X 是一无限集. 令 $\tau = \{\varnothing\} \bigcup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ 是有限集}\}$, 则 τ 是 X 上的一个拓扑. 拓扑空间 (X, τ) 称为**有限补空间**, τ 称为 X 上的**有限补拓扑**. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 让 U 是 $\mathscr{U}$ 中的非空元, 则 $X \setminus U$ 是有限集, 于是存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}'$ 使其覆盖 $X \setminus U$, 那么 $\mathscr{U}' \bigcup \{U\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的有限子覆盖. 故 X 是紧空间. 显然, X 的每一单点集是 X 的闭集, 所以 X 是 T_1 空间. 由于 X 中任两个非空开集必定相交, 所以 X 不是 T_2 空间. □

紧空间的重要性之二在于它具有很好的映射性质. 在叙述紧空间的映射性质之前, 先说明几个有关函数的术语与记号. 本书中的函数与映射是不同的概念. **映射**指**连续的满函数**. 设 Φ 是一函数类, P 是一拓扑性质, 称 Φ **保持** P, 若 $f : X \to Y$ 是类 Φ 中的满函数, 且空间 X 具有性质 P, 则空间 Y 也具有性质 P. 设函数 $f : X$

① 1923 年 H. Tietze (奥地利, 1880–1964) 定义了正规空间.
② 1907 年 F. Riesz (匈牙利, 1880–1956) 定义了 T_1 空间.

$\to Y$. 若 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{F}$ 分别是集 X 和 Y 的子集族, 记

$$f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\},$$
$$f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(F) : F \in \mathscr{F}\},$$

分别称为 $\mathscr{P}$ 在 f 的像和 $\mathscr{F}$ 在 f 的逆像或原像.

定理 1.1.8　映射保持紧性.

证明　设 X 是紧空间且 $f : X \to Y$ 是连续的满函数. 让 $\mathscr{U}$ 是空间 Y 的开覆盖, 则 $f^{-1}(\mathscr{U})$ 是空间 X 的开覆盖, 于是 $f^{-1}(\mathscr{U})$ 存在有限子覆盖 $\mathscr{V}$, 那么 $f(\mathscr{V})$ 是 $\mathscr{U}$ 的有限子覆盖. 故 Y 是紧空间. □

回忆闭映射和同胚的概念. 设映射 $f : X \to Y$. f 称为**闭映射**, 若 F 是 X 的闭集, 则 $f(F)$ 是 Y 的闭集. f 称为**同胚或同胚映射**, 若 f 是单 (或一对一) 的映射且 $f^{-1} : Y \to X$ 也是映射. 同胚是闭映射. 映射未必是闭映射 (练习 1.1.3). 开映射是与闭映射相对的映射. 映射 $f : X \to Y$ 称为**开映射**, 若 U 是 X 的开集, 则 $f(U)$ 是 Y 的开集. 为了叙述的简明起见, 称函数 $f : X \to Y$ 是**相对闭 (相对开) 映射**, 若 F 是 X 的闭集 (开集), 则 $f(F)$ 是 $f(X)$ 的闭集 (开集).

推论 1.1.9　紧空间到 T_2 空间的映射是闭映射.

证明　设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且 $f : X \to Y$ 是连续的满函数. 若 F 是 X 的闭集, 由推论 1.1.3, F 是 X 的紧集; 又由定理 1.1.8, $f(F)$ 是 Y 的紧集; 再由推论 1.1.6, $f(F)$ 是 Y 的闭集. 故 f 是闭映射. □

推论 1.1.10　紧空间到 T_2 空间的连续双射是同胚.

证明　设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且映射 $f : X \to Y$ 是单射. 由推论 1.1.9, f 是闭映射, 于是 $f^{-1} : Y \to X$ 是映射. 故 f 是同胚. □

紧空间的重要性之三是紧空间具有优美的积空间性质, 即 Tychonoff 定理. 回忆 1930 年 A. Tychonoff (苏, 1906–1993) 定义的积空间的概念. 设 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是一族拓扑空间. 让 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是笛卡儿积集 (或直积集), 每一 $p_\alpha : X \to X_\alpha$ 是**投影函数**, 即对于 $x = (x_\alpha) \in X$, $p_\alpha(x) = x_\alpha$. 记 $\mathscr{S} = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha,\ \alpha \in A\}$, 则 $\mathscr{S}$ 是集 X 上某拓扑 τ 的一个子基, 即 $\mathscr{S}$ 中任意有限个元交的全体构成的集族 $\mathscr{B}$ 是 X 上某拓扑 τ 的一个基. 记

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha,\ \text{且除有限个 } \alpha \text{ 外 } U_\alpha = X_\alpha \right\}.$$

$\mathscr{S}$ 称为 X 的**基本子基**, $\mathscr{B}$ 中的元称为 X 的**基本开集**. 拓扑空间 (X, τ) 称为拓扑空间族 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 的**积空间或 Tychonoff 积空间**, 拓扑 τ 称为**积拓扑或 Tychonoff 拓扑**. 这时每一投影函数 $p_\alpha : X \to X_\alpha$ 是开映射. 上述积拓扑简称以投影方式产生的拓扑.

Tychonoff 定理的证明依赖 E. Zermelo (德, 1871–1953) 提出的选择公理[293]. 下面介绍的 Tukey 引理是选择公理的一种等价形式. 称集族 $\mathscr{F}$ 具有有限特征, 如果 $F \in \mathscr{F}$ 当且仅当若 G 是 F 的有限子集, 则 $G \in \mathscr{F}$.

引理 1.1.11 (Tukey 引理[272]) 若集族 $\mathscr{F}$ 具有有限特征, 则 $\mathscr{F}$ 存在极大元, 即存在 $F_0 \in \mathscr{F}$ 满足: 对于每一 $F \in \mathscr{F}$, 如果 $F_0 \subseteq F$, 那么 $F = F_0$. □

定理 1.1.12 (Tychonoff 定理[273]) 一族紧空间的积空间是紧空间.

证明 设 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是紧空间族. 让 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是积空间. 记

$$\Phi = \{\mathscr{P} \text{ 是 } X \text{ 的子集族} : \mathscr{P} \text{ 具有有限交性质}\},$$

则 Φ 具有有限特征. 若 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的具有有限交性质的闭集族, 则 $\mathscr{F} \in \Phi$, 且由 Tukey 引理, 存在 Φ 的极大元 $\mathscr{F}_0 \supseteq \mathscr{F}$. 为了证明 $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$, 只需证明 $\bigcap \overline{\mathscr{F}}_0 \neq \varnothing$.

由 $\mathscr{F}_0$ 的极大性, 有

(12.1) 若 X 的子集 G 使得对于每一 $F \in \mathscr{F}_0$ 有 $F \cap G \neq \varnothing$, 则 $G \in \mathscr{F}_0$.

(12.2) $\mathscr{F}_0$ 具有有限交性质.

因 $\mathscr{F}_0$ 具有有限交性质, 对于每一 $\alpha \in A$, X_α 的子集族 $\{p_\alpha(F) : F \in \mathscr{F}_0\}$ 具有有限交性质, 于是 X_α 的闭集族 $\{\overline{p_\alpha(F)} : F \in \mathscr{F}_0\}$ 也具有有限交性质. 由定理 1.1.2, 存在 $x_\alpha \in \bigcap \{\overline{p_\alpha(F)} : F \in \mathscr{F}_0\}$. 设 U_α 是 x_α 在空间 X_α 中的任一开邻域, 则对于每一 $F \in \mathscr{F}_0$, $U_\alpha \cap p_\alpha(F) \neq \varnothing$, 即 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap F \neq \varnothing$. 由 (12.1), $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{F}_0$. 又由 (12.2), 对于 A 的任何有限子集 Λ 有 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{F}_0$, 从而 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 与 $\mathscr{F}_0$ 中的每一元相交. 令 $x = (x_\alpha)$. 由于

$$\Big\{ \bigcap_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \Lambda \text{ 是 } A \text{ 的有限子集, 且对于每一 } \alpha \in \Lambda, \\ U_\alpha \text{ 是 } x_\alpha \text{ 在 } X_\alpha \text{ 中的开邻域} \Big\}$$

是点 x 在 X 中的邻域基, 所以 x 的任何邻域与 $\mathscr{F}_0$ 中的每一元相交, 即对于每一 $F \in \mathscr{F}_0$ 有 $x \in \overline{F}$. 故 X 是紧空间. □

Tychonoff 定理的证明使用了选择公理, 而 J.L. Kelley (美, 1917–1999)[129] 证明了 Tychonoff 定理也蕴含选择公理.

对于空间 X 及非空集 A, 定义积空间 $X^A = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, 其中每一 $X_\alpha = X$, $\alpha \in A$. 若 λ 是非零基数, 定义空间 X 的 λ 次积空间 $X^\lambda = X^A$, 其中 $|A| = \lambda$. 在同胚意义下, X^λ 是良好定义的. 积空间 $\mathbb{I}^A$ 称为 Tychonoff *方体*. Tychonoff 方体是紧空间.

练 习

1.1.1 空间 X 称为*正则空间*①, 若 F 是 X 的闭集且 X 中的点 x 不属于 F, 则 x 和

① 1921 年 L. Vietoris (奥地利, 1891–2002) 定义了正则空间.

F 在 X 中存在不相交的邻域. 设 X 是正则空间, A 和 B 分别是 X 的不相交的紧集和闭集, 则 A 和 B 在 X 中存在不相交的开邻域.

1.1.2 设 U 是空间 X 的开集, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的闭集族, 其中至少有一个 F_α 是紧的. 如果 $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \subseteq U$, 则存在 A 的有限子集 Λ 使得 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \subseteq U$.

1.1.3 设 $f(x)=\sin x$. 证明: $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ 是开映射, 但不是闭映射.

1.1.4 利用有限补空间说明: (1) 每一 T_1 空间是紧 T_1 空间在连续单射下的逆像; (2) 紧空间到 T_1 空间上的连续单射未必是闭映射.

1.1.5 证明: n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 K 是紧的当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集.

1.1.6 设 A_1 和 A_2 分别是空间 X_1 和 X_2 的紧子集. 若 W 是 $A_1\times A_2$ 在积空间 $X_1\times X_2$ 中的邻域, 则分别存在 A_1 和 A_2 在 X_1 和 X_2 中的邻域 U_1 和 U_2 使得 $U_1\times U_2\subseteq W$.

1.1.7 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是非空的有限集列. 若对于每一正整数 $n<m$, 存在函数 $p_n^m: X_m\to X_n$ 满足每一 $p_n^m=p_n^k\circ p_k^m$ $(n<k<m)$, 则存在 $(x_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 使得每一 $p_n^m(x_m)=x_n$①.

1.2 可数紧空间

本节介绍紧性的推广 —— 可数紧性, 以及在分析学中广泛应用的与序列的聚点和有界函数相关的几种拓扑性质之间的关系.

定义 1.2.1 空间 X 称为*可数紧空间*或*列紧空间*, 若 X 的每一可数开覆盖具有有限的子覆盖.

显然, 紧空间是可数紧空间. 但是可数紧空间未必是紧空间 (例 1.2.7). 利用定理 1.1.2 同样的方法可知, 空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的可数闭集族的交不空.

紧空间和可数紧空间都是通过覆盖定义的. 历史上对于紧性起源贡献最大的是 1877 年 K. Weierstrass (德, 1815–1897) 在柏林大学讲学时提到的数学分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理②: 有界数列含有收敛的子数列. 可数紧性与序列的聚点或集的聚点密切相关. 设 $\{x_n\}$ 是空间 X 的序列, X 中的点 x 称为序列 $\{x_n\}$ 的*聚点*, 若 x 在 X 中的任意邻域含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项; x 称为序列 $\{x_n\}$ 的*极限点*或序列 $\{x_n\}$ *收敛于* x, 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 则 $X\setminus U$ 仅含有序列 $\{x_n\}$ 的有限项. 设 A 是 X 的子集, X 中的点 x 称为 A 在 X 中的*聚点* (*ω 聚点*), 若 x 在 X 中的每一邻域含有 A 的不同于 x 的点 (含有 A 的无限个点). 对于 X 的序列 $\{x_n\}$, 应注意区别序列 $\{x_n\}$ 的聚点与集 $\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$ 的聚点.

定理 1.2.2 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是可数紧空间.

① 这结果称为 G. König 引理[134]. G. König (匈牙利, 1849–1913) 的儿子 D. König (匈牙利, 1884–1944) 也是数学家.

② 1817 年 B. Bolzano (捷克, 1781–1848) 最早提出这定理 (常称聚点定理), 但未引起人们的重视.

(2) X 的每一序列有聚点.

(3) X 的每一无限子集有 ω 聚点.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{x_n\}$ 是可数紧空间 X 的序列. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n = \overline{\{x_i : i \geqslant n\}}$. 则 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集列, 于是存在 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 那么对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $i \geqslant n$ 使得 $x_i \in U$, 所以 U 中含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项. 从而 x 是序列 $\{x_n\}$ 的聚点.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 X 的每一序列有聚点. 若 A 是 X 的无限子集, 选取 A 中互不相同点组成的序列 $\{x_n\}$, 那么序列 $\{x_n\}$ 的聚点也是集 A 的 ω 聚点.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 的每一无限子集有 ω 聚点. 若 X 存在可数的开覆盖 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使其没有有限的子覆盖, 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $V_n = \bigcup_{i\leqslant n} U_i$, 则 X 的递增的开覆盖 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 没有有限的子覆盖. 不妨设每一 $V_{n+1} \setminus V_n \neq \varnothing$, 取定 $x_n \in V_{n+1} \setminus V_n$, 则 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是无限集. 设 x 是 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的 ω 聚点, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in V_m$ 且 V_m 中含有无限项 x_n. 然而, 当 $n \geqslant m$ 时 $x_n \notin V_m$, 矛盾. □

P. Alexandroff[1] 引入了局部有限集族的概念. 通过局部有限集族可刻画可数紧性.

定义 1.2.3 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的**局部有限集族**, 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 $\mathscr{P}$ 中有限个元相交.

显然, 空间 X 的有限集族是局部有限集族, 但是 X 的局部有限集族未必是有限集族. 如实数空间 $\mathbb{R}$ 的无限集族 $\mathscr{P} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限集族, 因为对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 $\mathbb{R}$ 中的邻域 U 使得 U 至多与 $\mathscr{P}$ 中的 3 个元相交, 见图 1.2.1.

图 1.2.1 无限的局部有限集族

定理 1.2.4 空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的每一局部有限集族是有限的.

证明 若可数紧空间 X 存在无限的局部有限集族, 则 X 有由非空集组成的局部有限集族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 取定 $x_n \in A_n$. 由定理 1.2.2, 序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x. 由于 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与有限个 A_n 相交, 从而 U 中仅含有序列 $\{x_n\}$ 的有限项, 矛盾.

反之, 设空间 X 的每一局部有限集族是有限的. 若 A 是 X 的无限子集, 令 $\mathscr{A} = \{\{x\} : x \in A\}$, 则 $\mathscr{A}$ 不是 X 的局部有限集族, 于是存在 X 的点 z 使得 z 在 X 中的任意邻域必与 $\mathscr{A}$ 中的无限个元相交, 即 z 是集 A 的 ω 聚点. 由定理 1.2.2, X 是可数紧空间. □

定义 1.2.5　空间 X 称为*序列紧空间*或*序列式紧空间*, 若 X 中的每一序列存在收敛的子序列.

显然, 序列紧空间是可数紧空间. 在适当的附加条件下, 可数紧空间可以是序列紧空间. 空间 X 称为*第一可数空间*或满足*第一可数公理*, 若 X 的每一点具有可数的邻域基.

定理 1.2.6　第一可数的可数紧空间是序列紧空间.

证明　设 X 是第一可数的可数紧空间. 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, 由定理 1.2.2, 设 x 是序列 $\{x_n\}$ 在 X 中的聚点. 由于 X 是第一可数空间, 存在 x 在 X 中的邻域基 $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $V_{k+1}\subseteq V_k$. 这时每一 V_k 中含有序列 $\{x_n\}$ 中的无限项, 于是存在序列 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得每一 $x_{n_k}\in V_k$, 则子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x (练习 1.2.5). 故 X 是序列紧空间. □

下述两个例子说明紧性与序列紧性互不蕴含.

回忆序拓扑的定义. 设 $(X,<)$ 是至少含有 2 个元素的线性序集. 记

$$\mathscr{S}=\{\{x\in X:y<x\}:y\in X\}\bigcup\{\{x\in X:x<z\}:z\in X\}.$$

X 上的*序拓扑*是以 $\mathscr{S}$ 作为子基生成的拓扑. 对于 $y,z\in X$, 区间 $(y,z)=\{x\in X: y<x<z\}$ 是序拓扑空间 X 的开集.

例 1.2.7　序数空间 $[0,\omega_1)$[252]: 非紧的序列紧空间.

ω_1 是第一个不可数序数. 对于每一 $\beta<\alpha<\omega_1$, 由于 $(\beta,\alpha]=(\beta,\alpha+1)$, 所以在小于 ω_1 的序数所成集 $[0,\omega_1)$ 上, 以 $\{(\beta,\alpha]:\beta<\alpha<\omega_1\}\cup\{\{0\}\}$ 为基生成 $[0,\omega_1)$ 的拓扑就是序拓扑. $[0,\omega_1)$ 赋予序拓扑称为*序数空间*. $[0,\omega_1)$ 是第一可数空间. 由于 $[0,\omega_1)$ 的开覆盖 $\{[0,\alpha]:\alpha<\omega_1\}$ 没有有限子覆盖, 所以 $[0,\omega_1)$ 不是紧空间. 对于 $[0,\omega_1)$ 中的任意序列 $\{x_n\}$, 由于每一 $x_n<\omega_1$, 存在 $\beta<\omega_1$ 使得所有的 $x_n\leqslant\beta$. 因为 $[0,\beta]$ 是第一可数的紧空间, 由定理 1.2.6, 序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列. 故 $[0,\omega_1)$ 是序列紧空间. □

在集论中, 集 $[0,\omega_1)$, $[0,\omega_1]$ 常分别记为 ω_1, ω_1+1.

例 1.2.8　Čech-Stone 紧化 $\beta\mathbb{N}$[58]: 非序列紧的紧空间.

考虑正整数空间 $\mathbb{N}$ 的 Čech-Stone 紧化 $\beta\mathbb{N}$①. 关于紧化的一些基本概念及性质见 1.3 节. 本书要用到的 $\beta\mathbb{N}$ 的知识仅如下两点:

(8.1) $\beta\mathbb{N}$ 是 T_2 的紧空间, $\mathbb{N}$ 是 $\beta\mathbb{N}$ 的稠密的开子空间.

(8.2) $\beta\mathbb{N}$ 中不存在非平凡的收敛序列, 即 $\beta\mathbb{N}$ 中的收敛序列仅构成有限集.

由 (8.2), $\beta\mathbb{N}$ 的序列 $\{n\}$ 不存在收敛的子序列 (这事实的一个证明见例 1.3.14), 所以 $\beta\mathbb{N}$ 不是序列紧空间. □

---

① $\beta\mathbb{N}$ 的构造较复杂, 较详细的性质可参考 R. Engelking[74] 的 § 3.6.

定义 1.2.9 空间 X 称为*伪紧空间*, 若 X 上的每一实值连续函数是有界函数.

定理 1.2.10 可数紧空间是伪紧空间.

证明 设 X 是可数紧空间, $f: X \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 若 f 无界, 则存在 X 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $|f(x_{n+1})| > |f(x_n)| + 1$, 于是序列 $\{f(x_n)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中无聚点. 由于 f 连续, 所以序列 $\{x_n\}$ 在 X 中无聚点, 矛盾. 因而 f 是有界的. 故 X 是伪紧空间. □

Tietze-Urysohn *扩张定理*① 表明正规空间的每一闭集上的有界实值连续函数可以扩张为整个空间上的有界实值连续函数. 它与 Urysohn *引理*[274] 是等价的, 即若 A, B 是正规空间 X 的不相交闭集, 则存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$. 下述引理说明 Tietze-Urysohn 扩张定理也适用于无界的实值连续函数. 本书提到的连续函数的*扩张*均指连续扩张.

引入函数*限制*的记号. 设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f: X \to Y$. 对于 $A \subseteq X$, f 在 A 的限制 $f|_A: A \to f(A)$ 定义为对于每一 $x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$. 对于 $B \subseteq Y$, f 在 B 的限制 $f|_{f^{-1}(B)}: f^{-1}(B) \to B$.

引理 1.2.11 (Tietze-Urysohn 扩张定理) 设 F 是正规空间 X 的闭集. 若函数 $f: F \to \mathbb{R}$ 连续, 则存在 f 到 X 上的扩张.

证明 复合函数 $\arctan \circ f: F \to \mathbb{R}$ 是连续函数且满足 $|\arctan \circ f| < \pi/2$. 由有界形式的 Tietze-Urysohn 扩张定理, 存在连续函数 $g: X \to \mathbb{R}$ 使得 $g|_F = \arctan \circ f$ 且 $|g| \leqslant \pi/2$. 置 $G = \{x \in X : |g(x)| = \pi/2\}$, 则 F 与 G 是 X 的不相交的闭集. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $h: X \to [0,1]$ 使得 $h(F) \subseteq \{1\}$ 且 $h(G) \subseteq \{0\}$. 令 $\tilde{g} = h \cdot g$, $\tilde{f} = \tan \circ \tilde{g}$, 则 $\tilde{g}: X \to \mathbb{R}$ 连续, $|\tilde{g}| < \pi/2$, 所以 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 连续, 且 $\tilde{f}|_F = f$. □

空间 Y 称为*离散空间*, 若 Y 的每一子集是 Y 的开集. 这一拓扑称为*离散拓扑*. 空间 X 的子集 F 在 X 中没有聚点当且仅当 F 是 X 的闭离散子空间.

定理 1.2.12 T_1 正规的伪紧空间是可数紧空间.

证明 设空间 X 是 T_1 正规的伪紧空间. 若 X 不是可数紧空间, 由定理 1.2.2, 存在 X 的可数无限子集 $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 F 在 X 中没有 ω 聚点. 因为 X 是 T_1 空间, 所以 F 在 X 中没有聚点 (练习 1.2.1), 于是 F 是 X 的闭离散子空间. 定义函数 $f: F \to \mathbb{R}$ 使得每一 $f(x_n) = n$, 则 f 是连续函数. 由引理 1.2.11, 存在连续函数 $g: X \to \mathbb{R}$ 使得 $g|_F = f$, 则 g 是 X 上的无界实值连续函数, 矛盾. 故 X 是可数紧空间. □

例 1.2.13 右序拓扑空间[252]: 非可数紧的正规伪紧空间.

① 国内书籍常称为 Tietze *扩张定理*. 其实, 1915 年 H. Tietze[266] 对度量空间证明了他的扩张定理, 而后在发表于 1925 年的一篇论文中, P. Urysohn[274] 对正规空间证明了他的扩张定理, 所以这定理本书称为 Tietze-Urysohn 扩张定理.