内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目　项目计划编号：NJZY14305

Q_K型空间理论

Q_K XING KONGJIAN LILUN

韩金桩　周继振　瑛瑛　著

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目 项目计划编号：NJZY14305

Q_K 型空间理论

韩金桩 周继振 瑛瑛 著

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Qk型空间理论/韩金桩，周继振，瑛瑛著.—赤峰：内蒙古科学技术出版社，2015.2

ISBN 978-7-5380-2512-5

Ⅰ.①Q… Ⅱ.①韩… ②周… ③瑛… Ⅲ.①函数空间 Ⅳ.①0177.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第043063号

出版发行：内蒙古出版集团　内蒙古科学技术出版社
地　　址：赤峰市红山区哈达街南一段4号
邮　　编：024000
电　　话：(0476)8225264　8224848
邮购电话：(0476)8224547
网　　址：www.nm-kj.com
责任编辑：那　明
封面设计：满都拉
印　　刷：赤峰金源彩色印刷有限责任公司
字　　数：210千
开　　本：880×1230　1/32
印　　张：6.25
版　　次：2015年2月第1版
印　　次：2015年2月第1次印刷
定　　价：25.00元

前 言

函数空间理论的研究有悠久的历史，其丰富而优美的结果，为复分析、傅立叶分析、调和分析、位势理论以及泛函分析等领域提供了最基础的研究对象.

函数空间的研究始于对 Hardy 空间，即对 H^p 空间的研究.Hardy 空间中的解析函数构成了 Banach 空间中最经典的一类，有着极为广泛的应用.随后对 Bloch 空间的研究逐渐引起数学家的兴趣，Bloch 函数的出现是与 Bloch 定理紧密联系的.Bloch 空间是最大的 Mobius 不变空间.有界平均振动解析函数空间BMOA是Bloch空间的一个重要子空间，该空间由所有的 $f\left(e^{i\theta}\right)$ 属于 BMO 且在单位圆盘上解析的函数 f 组成. BMO 是 1961 年由 John 和 Nirenberg 首先引入的并用来解决偏微分方程问题.1971 年，Fefferman 和 Stein 发现 BMO 空间中的函数在调和分析中有重要的价值.

20 世纪 90 年代以后，一些新的函数空间的提出使得数学家对复函数空间研究的范围进一步扩大，所获得的结果也更加广泛，这无论是对该方向的发展还是对其他的一些相关领域的研究都有很大的推动作用，主要包括 1993 年 Aulaskari 与 Lappan 引入的 Q_p 空间，1996 年赵如汉提出的 $F\left(p,q,s\right)$ 空间，2001 年乌兰哈斯、伍鹏程、Matts Essen 引入的 Q_K 空间等.其中，Q_p 空间在其提出后的数年时间里，迅速引起了众多研究函数空间数学家的关注. 这是因为当 $p>1$ 时，Q_p 就是 Bloch 空间，见参考文献[1]；当 $p=1$ 时，Q_p 和 BMOA 是一致的；当 $0<p<1$ 时，Q_p 空间也有它独立研究的价值，见参考文献[2–4].

目前，Q_p 空间的研究成果已经被应用到调和分析、小波、算子

等领域. 数学家从两个方面对 Q_p 空间进行了推广，一个是向多变量函数空间推广，包括 C^n 和 R^n 上的 Q_p 空间；另一个是向更广泛的解析函数空间推广，例如 Q_K 空间、$F(p,q,s)$ 空间以及 Q_K 型空间. 需要提一下 Q_K 型空间，该空间是由乌兰哈斯和周继振在文献[5]中首次提出的，通过选择不同的参数，可得到 Q_K，$F(p,q,s)$ 等.

本书介绍了 Q_K 型空间的一些研究结果. 第 1 章介绍了 Q_K 型空间的基本性质、高阶导数、缺项级数以及和 Lipschitz 空间之间的关系. 第 2 章讨论了从 Bloch 型空间到 Q_K 型空间的复合算子以及 Bloch 型空间到 Q_K 型空间的叠加算子的性质.第 3 章内容较多，主要介绍了一些特殊的 Q_K 型空间的性质.有 Q_K 空间的预对偶和几何性质、$F(p,q,s)$ 空间的 Hadamard 乘积、D_K 空间的分解定理、对数 Bloch 型空间、解析 Besov 型空间等.第 4 章介绍了亚纯函数族 $Q_K^{\#}$ 的特征.

参加本书编写的有韩金桩（第 2，3 章）、周继振（第 4 章）、瑛瑛（第 1 章）.本书的出版得到了呼伦贝尔学院数学科学学院、安徽理工大学数学系的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢.

著 者
2015 年 1 月

目 录

第 1 章 Q_K 型空间

本章讨论 Q_K 型空间 $Q_K(p,q)$ 的基本性质，包括该类空间和 Bloch 型空间的关系、高阶导数特征、缺项级数以及系数乘子的特征等.

§1.1 Q_K 型空间的基本性质

1. 引言

令 D 表示单位圆盘 $\{z:|z|<1\}$，∂D 表示 D 的边界单位圆周. 则单位圆盘上奇点在 $a\in D$ 的格林函数定义为

$g(z,a)=-\log|\varphi_a(z)|$，其中

$$\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$

是单位圆盘 D 上的 Mobius 变换. $H(D)$ 表示在 D 上解析函数的全体组成的集合.

定义 1.1 设 $0\leqslant p<\infty$，若单位圆盘 D 上的解析函数 f 满足

$$\|f\|_{K,p,q}^p=\sup_{a\in D}\iint_D|f'(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^q K(g(z,a))\,\mathrm{d}A(z)<\infty, \quad (1.1)$$

则称 $f\in Q_K(p,q)$ 空间，$Q_K(p,q)$ 空间也简称 Q_K 空间，其中 $\mathrm{d}A(z)$ 是欧式面积测度，满足 $\mathrm{d}A(z)=\pi^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

当 $p>1$ 时，若在 $Q_K(p,q)$ 空间中定义范数

$$\|f\|=|f(0)|+\|f\|_{K,p,q},$$

则$Q_K(p,q)$是一个巴拿赫空间. 如果$q+2=p$，那么$Q_K(p,q)$是Mobius不变的，即对任意的$a\in D$，恒有$\|f\circ\varphi_a\|_{K,p,q}=\|f\|_{K,p,q}$. 现在可以考虑一些特殊的情形. 当$p=2$，$q=0$，则有$Q_K(p,q)=Q_K$，见文献[6]. 如果$K(t)=t^s$，那么$Q_K(p,q)=F(p,q,s)$[7]. 根据文献[7]可得$F(p,q,s)$是$(q+2)/p-$Bloch空间的子空间.

定义 1.2 设$0<\alpha<\infty$. 若$f\in H(D)$且满足

$$\|f\|_{B^\alpha}=\sup_{a\in D}\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|f'(z)\right|<\infty, \tag{1.2}$$

则称$f\in B^\alpha$空间. B^α空间也称作$\alpha-$Bloch 空间. 所有的这类空间也称作Bloch型空间.

在本节中，需要恒假设非递减函数K满足条件

$$\int_0^1\left(1-r^2\right)^q K\left(\log\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r<\infty, \tag{1.3}$$

否则，$Q_K(p,q)$空间仅仅包含常函数. 下面将给予证明. 实际上，若条件（1.3）不成立，设f是一个非常数函数. 由假定至少有一个点$a\in D$使得$f'(a)\neq 0$. 则

$$\left(1-|a|^2\right)^p\left|f'(a)\right|^p\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left(f\circ\varphi_a\right)'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\mathrm{d}\theta,\quad 0<r<1,$$

因此可得

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left|f'(z)\right|^p \left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z) \\
&=\iint_D \left|\left(f\circ\varphi_a\right)'(z)\right|^p \left|\varphi_a{}'(z)\right|^{-p} \\
&\quad\times\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^{q+2}\left(1-|z|^2\right)^{-2} K\left(\log\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}A(z) \\
&\geqslant C\left(1-|a|^2\right)^{|q+2-p|}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left|\left(f\circ\varphi_a\right)'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)\left(1-r^2\right)^q K\left(\log\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}r \\
&\geqslant C\left(1-|a|^2\right)^{|q+2-p|}\left|f'(a)\right|^p\int_0^1\left(1-r^2\right)^q K\left(\log\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}r \\
&=\infty.
\end{aligned}$$

这就给出了 $f\notin Q_K(p,q)$.

2. $Q_K(p,q)$ 空间

有关 Q_K 型空间与 Bloch 型空间的关系，主要结果如下.

定理 2.1 设 $0<p<\infty$，$-2<q<\infty$. 那么

（1）$Q_K(p,q)\subset B^{\frac{q+2}{p}}$.

（2）$Q_K(p,q)=B^{\frac{q+2}{p}}$ 当且仅当

$$\int_0^1\left(1-r^2\right)^{-2} K\left(\log\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}r<\infty. \qquad (2.1)$$

证明 （1）对于固定的 $r\in(0,1)$，设

$$E(a,r)=\left\{z\in D, |z-a|<r\left(1-|a|\right)\right\}.$$

容易看到 $E(a,r)\subset D(a,r)$，其中 $D(a,r)=\left\{z\in D, \left|\varphi_a(z)\right|<r\right\}$ 是单位圆盘上中心在 $a\in D$，半径为 r 的伪双曲圆盘. 对任意的 $z\in E(a,r)$，有

$$(1-r)(1-|a|) \leqslant 1-|z|(1+r)(1-|a|),$$

这就意味着对任意的$z \in E(a,r)$，$1-|a| \approx 1-|z|$. 因为$|f'(z)|^p$是次调和的，所以对任意的$a \in D$，有

$$\begin{aligned}
&\iint_D |f'(z)|^p (1-|z|^2)^q K(g(z,a)) \mathrm{d}A(z) \\
&\geqslant K\left(\log\frac{1}{r}\right) \iint_{D(a,r)} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^q \mathrm{d}A(z) \\
&\geqslant K\left(\log\frac{1}{r}\right) \iint_{E(a,r)} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^q \mathrm{d}A(z) \\
&\geqslant \pi r^2 K\left(\log\frac{1}{r}\right)\left(1-|a|^2\right)^{q+2} |f'(a)|^p .
\end{aligned}$$

如果$f \in Q_K(p,q)$，由上面的估计式可得

$$\sup_{a \in D}\left(1-|a|^2\right)^{q+2} |f'(a)|^p < \infty .$$

（2）假设（2.1）成立，若能证明$B^{\frac{q+2}{p}} \subset Q_K(p,q)$，则可得$Q_K(p,q) = B^{\frac{q+2}{p}}$. 设$f \subset B^{\frac{q+2}{p}}$，注意到

$$\begin{aligned}
&\iint_D |f'(z)|^p (1-|z|^2)^q K(g(z,a)) \mathrm{d}A(z) \\
&\leqslant \|f\|^p_{B^{(q+2)/p}} \iint_D (1-|z|^2)^{-2} K(g(z,a)) \mathrm{d}A(z) \\
&= \|f\|^p_{B^{(q+2)/p}} (1-|z|^2)^{-2} K(g(z,0)) \mathrm{d}A(z) \\
&= 2\pi \|f\|^p_{B^{(q+2)/p}} \int_0^1 (1-r^2)^{-2} K\left(\log\frac{1}{r}\right) r \mathrm{d}r \\
&< \infty .
\end{aligned}$$

这就证明了 $B^{\frac{q+2}{p}} \subset Q_K(p,q)$.

需要下面的引理来证明后面的结论.

引理2.1 设 $\alpha \in (0,\infty)$. 那么存在两个单位圆盘上的解析函数 f_1 和 f_2 使得

$$\left|f_1(z)\right| + \left|f_2(z)\right| \approx \left(1-|z|^2\right)^{-\frac{q+2}{p}}.$$

证明见文献[8]的定理 2. 1.

下面假设 $Q_K(p,q) = B^{\frac{q+2}{p}}$，需要证明条件（2. 1）成立. 由引理 2. 1 可得存在 $f, g \in B^{\frac{q+2}{p}}$ 使得

$$\left|f(z)\right| + \left|g(z)\right| \approx \left(1-|z|^2\right)^{-\frac{q+2}{p}}.$$

所以可得 $f_1, f_2 \in Q_K(p,q)$ 和

$$\begin{aligned}
\infty &> 2^p \int_D \left(\left|f'(z)\right|^p + \left|g'(z)\right|^p\right)\left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z) \\
&\geqslant \int_D \left(\left|f'(z)\right| + \left|g'(z)\right|\right)^p \left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,0)\right)\mathrm{d}A(z) \\
&\approx \int_D \left(1-|z|^2\right)^{-2} K\left(g(z,0)\right)\mathrm{d}A(z) \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{-2} K\left(\log\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

所以（2. 1）式成立. 证毕.

定义 2. 1 设 $0 \leqslant p < \infty$，若单位圆盘 D 上的解析函数 f 满足

$$\lim_{|a|\to 1} \int_D \left|f'(z)\right|^p \left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z) < \infty, \tag{2. 2}$$

则称 $f \in Q_{K,0}(p,q)$ 空间.

定义 2.2 设$0<\alpha<\infty$．若$f\in H\left(D\right)$且满足

$$\left\|f\right\|_{B^{\alpha}}=\lim_{|a|\to 1}\left(1-\left|z\right|^{2}\right)^{\alpha}\left|f'\left(z\right)\right|<\infty,\qquad(2.3)$$

则称 $f\in B_0^{\alpha}$ 空间.

注意到$Q_{K,0}\left(p,q\right)\subset Q_{K}\left(p,q\right)$和$B_0^{\alpha}\subset B^{\alpha}$，下面的定理成立是显然的.

定理 2.2 设$0<p<\infty$，$-2<q<\infty$．那么

（1）$Q_{K,0}\left(p,q\right)\subset B_0^{\frac{q+2}{p}}$．

（2）$Q_{K,0}\left(p,q\right)=B_0^{\frac{q+2}{p}}$ 当且仅当（2.1）式成立.

证明 （1）不失一般性，可以假设$K\left(1\right)>0$，由定理 2.1 的证明过程可得

$$\begin{aligned}&\pi\left(\frac{1}{e}\right)^{2}K\left(1\right)\left(1-\left|a\right|^{2}\right)^{q+2}\left|f'\left(a\right)\right|^{p}\\&\leqslant K\left(1\right)\int\limits_{E(a)}\left|f'\left(z\right)\right|^{p}\left(1-|z|^{2}\right)^{q}\mathrm{d}A\left(z\right)\\&\leqslant K\left(1\right)\int\limits_{D(a,1/e)}\left|f'\left(z\right)\right|^{p}\left(1-|z|^{2}\right)^{q}\mathrm{d}A\left(z\right)\\&\leqslant\int\limits_{D}\left|f'\left(z\right)\right|^{p}\left(1-|z|^{2}\right)^{q}K\left(g\left(z,a\right)\right)\mathrm{d}A\left(z\right),\end{aligned}$$

其中$E\left(a\right)=\left\{z\in D,\left|z-a\right|<\frac{1}{e}\left(1-\left|a\right|\right)\right\}$．如果$f\in Q_{K,0}\left(p,q\right)$，则有

$$\lim_{|a|\to 1}\left(1-\left|z\right|^{2}\right)^{\alpha}\left|f'\left(z\right)\right|=0.$$

（2）下面需要证明$B_0^{\frac{q+2}{p}}\subset Q_{K,0}\left(p,q\right)$．假设

$$A=\int_0^1\left(1-r^2\right)^{-2}K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r<\infty .$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$r_1, 0<r_1<1$，使得

$$\int_{r_1}^1\left(1-r^2\right)^2K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r<\varepsilon . \tag{2.4}$$

那么有

$$\begin{aligned}
&\int_{D\backslash D(a,r_1)}\left|f'(z)\right|^p\left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z)\\
&\leqslant\|f\|_{B^{(q+2)/p}}^p\int_{D\backslash D(a,r_1)}\left(1-|z|^2\right)^{-2}K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z)\\
&=\|f\|_{B^{(q+2)/p}}^p\int_{r_1<|w|<1}\left(1-|w|^2\right)^{-2}K\left(\log\frac{1}{|w|}\right)\mathrm{d}A(w) \qquad (2.5)\\
&=2\pi\|f\|_{B^{(q+2)/p}}^p\int_{r_1}^1\left(1-r^2\right)^{-2}K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r\\
&\leqslant 2\pi\|f\|_{B^{(q+2)/p}}^p .
\end{aligned}$$

类似的，令$f\in B_0^{\frac{q+2}{p}}$和$|w|\leqslant r$，当$|a|\to 1$时，有
$\left|f'\left(\varphi_a(w)\right)\right|\left(1-\left|\varphi_a(w)\right|^2\right)^{(q+2)/p}\to 0$是一致的，其中$r\in(0,1)$是固定的常数. 那么则有

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{D(a,r_1)}\left|f'(z)\right|^p\left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z)$$

$$=\lim_{|a|\to 1}\int_{|w|\leqslant r_1}\left|f'\left(\varphi_a(w)\right)\right|^p\left(1-\left|\varphi_a(w)\right|^2\right)^{q+2} \times\left(1-|w|^2\right)^{-2}K\left(\log\frac{1}{|w|}\right)\mathrm{d}A(w) \tag{2.6}$$

$$\leqslant A\lim_{|a|\to 1}\sup_{|w|\leqslant r_1}\left|f'\left(\varphi_a(w)\right)\right|^p\left(1-\left|\varphi_a(w)\right|^2\right)^{q+2}=0.$$

由（2.5）和（2.6）式，容易得到

$$\lim_{|a|\to 1}\int_D\left|f'(z)\right|^p\left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z)<\infty. \tag{2.7}$$

相反的，假设（2.1）式不成立，即

$$\int_0^1\left(1-r^2\right)^2 K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r=\infty.$$

因此，能找到一个严格递减的函数 $h:[0,1)\to[0,\infty)$ 使得 $\lim_{r\to 1}h(t)=0$ 但

$$\int_0^1 h(r)\left(1-r^2\right)^2 K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r=\infty. \tag{2.8}$$

容易得到

$$r^{2^{k+1}-2}\geqslant\exp\left\{-2^{k+2}(1-r)\right\},\ r\in\left[\frac{1}{2},1\right).$$

注意到当 $\alpha>0$ 时，函数 $t^{2\alpha}\exp\{-4t\}$ 在区间 $\left[\alpha/2,(\alpha+1)/2\right]$ 上是递减的且满足

$$\sup_{t>0}t^{2\alpha}\exp\{-4t\}=t^{2\alpha}\exp\{-4t\}\Big|_{t=\frac{\alpha}{2}}=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2\alpha}e^{-2\alpha}. \tag{2.9}$$

当 $3/4<r<1$ 时，存在着一个整数 k 使得

$\alpha/2 \leqslant 2^k(1-r) \leqslant (\alpha+1)/2$ 和

$$
\begin{aligned}
&2^{2\alpha k}\exp\left\{-2^{k+2}(1-r)\right\} \\
&=(1-r)^{-2\alpha}\left[2^k(1-r)\right]^{2\alpha}\exp\left\{-4\cdot 2^k(1-r)\right\} \\
&\geqslant\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{2\alpha}e^{-2(\alpha+1)}(1-r)^{-2\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

当 $3/4<r<1$ 和 k 如上所述时，定义

$$
f_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j 2^{\frac{j(q+2-p)}{p}}z^{2^j},
$$

其中 $a_j=\left(h\left(1-\dfrac{p+q+2}{p}2^{-j-1}\right)\right)^{1/p}$，$j=0,1,2\cdots$. 根据（2.9）和（2.10）式易得

$$
\begin{aligned}
M_2^2\left(r,f_0'\right)&=\int_0^{2\pi}\left|f_0'\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\mathrm{d}\theta=2\pi\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2 2^{\frac{2j(q+2-p)}{p}}r^{2^{k+1}-2} \\
&\geqslant 2\pi h^{\frac{p}{2}}(r)2^{\frac{2k(q+2-p)}{p}}\exp\left\{-2^{k+2}(1-r)\right\} \\
&\geqslant Ch^{\frac{p}{2}}(r)(1-r)^{\frac{-2k(q+2-p)}{p}}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

因为 f_0 是用 Hadamard 条件定义的缺项级数，所以

$$
M_2\left(r,f_0'\right)\approx M_p\left(r,f_0'\right),
$$

其中

$$
M_p\left(r,f_0'\right)=\left(\int_0^{2\pi}\left|f_0'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{a\in D}\int_D\left|f_0'(z)\right|^p\left(1-|z|^2\right)^q K\left(g(z,a)\right)\mathrm{d}A(z)\\
&\geqslant\int_0^1 M_p^p\left(r,f_0'\right)\left(1-r^2\right)^q K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r\\
&\approx\int_0^1 M_2^p\left(r,f_0'\right)\left(1-r^2\right)^q K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r\\
&\geqslant C\int_{3/4}^1 h(r)\left(1-r^2\right)^{-2} K\left(\log\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}r\\
&=\infty.
\end{aligned}
$$

这就意味着 $f\in B_0^{\frac{q+2}{p}}\setminus Q_{K,0}(p,q)$，与已知 $B_0^{\frac{q+2}{p}}=Q_{K,0}(p,q)$ 相矛盾. 因此（2.1）式成立.

3. 基本性质

下面的结果表明核函数 K 可以被取成是有界的.

定理 3.1 设 $K(1)>0$. 令 $K_1(r)=\inf\left(K(r),K(1)\right)$，那么 $Q_K(p,q)=Q_{K_1}(p,q)$.

证明 因为 $K_1\leqslant K$ 和 K_1 是非递减的，容易得到 $Q_K(p,q)\subset Q_{K_1}(p,q)$. 下面需要证明 $Q_{K_1}(p,q)\subset Q_K(p,q)$. 注意到

$$
\begin{aligned}
&g(z,a)>1, && z\in D(a,1/e).\\
&g(z,a)\leqslant 1, && z\in D\setminus D(a,1/e).
\end{aligned}
$$

因而，当 $z\in D\setminus D(a,1/e)$ 时，$K\left(g(z,a)\right)=K_1\left(g(z,a)\right)$. 现在需要处理在 $D(a,1/e)$ 上的积分. 若 $f\in Q_K(p,q)$，由定理 3.1 可得 $f\in B^{(q+2)/p}$. 这就给出了