国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

HAMILTON-CAYLEY THEOREM

Hamilton-Cayley 定理

刘培杰数学工作室　编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

HAMILTON-CAYLEY THEOREM

Hamilton-Cayley 定理

刘培杰数学工作室 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书详细介绍了哈密尔顿－凯莱定理的相关知识. 全书共分为五章,分别为:引言、基础篇、应用篇、人物篇与进一步的讨论. 在附录中详细介绍了哈密尔顿－凯莱定理的另一证法.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

Hamilton－Cayley 定理/刘培杰数学工作室编译. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.7
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978－7－5603－6697－5

Ⅰ.①H… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①哈密顿原理 Ⅳ.①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147266 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 牡丹江邮电印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 13.25 字数 148 千字
版 次 2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－6697－5
定 价 68.00 元

代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理.浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭.吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了.屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看.封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢，且往下看.第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）.那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片.

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此. 一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材. 这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍. 从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》. 我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全. 即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等)，这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利. 其中"秋水""解牛"诸篇，诚绝唱也.《论语》束身严谨，勇于面世，"己所不欲，勿施于人"，有长者之风. 司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究. 我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说. 我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句："人生自古谁无死，留取丹心照汗青""休言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣". 唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心. 不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信. 以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

◎目录

第1章 引言

1.1 一个高中联赛试题的两个初等解法

设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_0=1,b_0=0$且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

证明:$a_n(n=0,1,2,\cdots)$是完全平方数.(2000年,全国高中数学联赛)

证法一 由假设得$a_1=4,b_1=4$且当$n\geqslant 1$时

$$\begin{aligned}&(2a_{n+1}-1)+\sqrt{3}b_{n+1}\\=&(14a_n+12b_n-7)+\sqrt{3}(8a_n+7b_n-4)\\=&[(2a_n-1)+\sqrt{3}b_n](7+4\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2a_n-1)+\sqrt{3}b_n\\=&(7+4\sqrt{3})^{n-1}(2a_1-1+\sqrt{3}b_1)\\=&(7+4\sqrt{3})^n\end{aligned}$$

同理

$$(2a_n-1)-\sqrt{3}b_n=(7-4\sqrt{3})^n$$

从而 $a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$

由于 $7\pm4\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^2$

所以 $a_n=[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n]^2$

由二项式展开得

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k}\cdot 3^k\cdot 2^{n-2k} \end{aligned}$$

显然 c_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数.

证法二 由已知得

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 7a_n+6b_n-3 \\ &= 7a_n+6(8a_{n-1}+7b_{n-1}-4)-3 \\ &= 7a_n+48a_{n-1}+42b_{n-1}-27 \end{aligned}$$

由 $a_n=7a_{n-1}+6b_{n-1}-3$

得 $42b_{n-1}=7a_n-49a_{n-1}+21$

从而

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 7a_n+48a_{n-1}+7a_n-49a_{n-1}+21-27 \\ &= 14a_n-a_{n-1}-6 \end{aligned}$$

由 $a_0=1=1^2,a_1=4=2^2,a_2=49=7^2$

设 $c_{n+1}=4c_n-c_{n-1},c_0=1,c_1=2,c_2=7$

由归纳法易知数列 $\{c_n\}$ 是唯一确定的正整数数列.

令 $d_n = c_n^2$，则

$$
\begin{aligned}
d_{n+1} &= c_{n+1}^2 \\
&= (4c_n - c_{n-1})^2 \\
&= 16c_n^2 - 8c_n c_{n-1} + c_{n-1}^2 \\
&= 14c_n^2 - c_{n-1}^2 - 6 - 2(4c_n c_{n-1} - c_n^2 - c_{n-1}^2 - 3)
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
& 4c_n c_{n-1} - c_n^2 - c_{n-1}^2 - 3 \\
= & 4c_n c_{n-1} - c_n(4c_{n-1} - c_{n-2}) - c_{n-1}^2 - 3 \\
= & c_n c_{n-2} - c_{n-1}^2 - 3 \\
= & (4c_{n-1} - c_{n-2}) c_{n-2} - c_{n-1}(4c_{n-2} - c_{n-3}) - 3 \\
= & c_{n-1} c_{n-3} - c_{n-2}^2 - 3 \\
= & \cdots \\
= & c_2 c_0 - c_1^2 - 3 \\
= & 0
\end{aligned}
$$

故 $\qquad d_{n+1} = 14d_n - d_{n-1} - 6, d_0 = 1, d_1 = 4$

由唯一性得

$$a_n = d_n = c_n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

故 a_n 是完全平方数.

1.2 高等解法

递推关系可改写成矩阵形式，从而求数列通项的问题转化为求矩阵方幂的问题，然后利用矩阵对角化思想求矩阵方幂，此时容易联想到特征理论，而哈密尔

顿 - 凯莱(Hamilton-Cayley)定理是矩阵特征多项式的一个重要性质.

定义 1 若递推关系改写成矩阵形式后,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则称递推关系是可对角化的;否则称为不可对角化的.

引理 1 (哈密尔顿 - 凯莱定理)设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的 n 阶矩阵,$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$.

该定理告诉我们,任给数域 P 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以找到数域 P 上的一个多项式使得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

1.2.1 用哈密尔顿 - 凯莱定理求解可对角化双线性递推数列通项

例 1 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0=1,b_0=0$,且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

证明:$a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是完全平方数.(2000 年,全国高中数学联赛)

证明 将递推关系用矩阵表示:$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\8&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&6\\8&7\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{B}$$

$$=\boldsymbol{A}^{n}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & -6\\-8 & \lambda-7\end{vmatrix}=\lambda^{2}-14\lambda+1$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1=7-4\sqrt{3}$,$\lambda_2=7+4\sqrt{3}$. 由哈密尔顿－凯莱定理得 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$. 于是令 $\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$,$\boldsymbol{D}=\dfrac{-\boldsymbol{A}+\lambda_1\boldsymbol{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$,则

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{DC}=\boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{C}+\lambda_2\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{C}^{2}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C}^{3}=\boldsymbol{C}^{2}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{2}=\boldsymbol{C}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{C}^{n}=\boldsymbol{C}$$

同理 $\boldsymbol{D}^{n}=\boldsymbol{D}$,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n}&=(\lambda_1\boldsymbol{C}+\lambda_2\boldsymbol{D})^{n}\\&=(\lambda_1\boldsymbol{C})^{n}+\mathrm{C}_n^1(\lambda_1\boldsymbol{C})^{n-1}(\lambda_2\boldsymbol{D})+\cdots+\mathrm{C}_n^n(\lambda_2\boldsymbol{D})^{n}\\&=\lambda_1^n\boldsymbol{C}^{n}+\lambda_2^n\boldsymbol{D}^{n}\\&=\lambda_1^n\boldsymbol{C}+\lambda_2^n\boldsymbol{D}\\&=\lambda_1^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\lambda_2^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) & \frac{\sqrt{3}}{4}(\lambda_2^n-\lambda_1^n) \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(\lambda_2^n-\lambda_1^n) & \frac{1}{2}(\lambda_1^n+\lambda_2^n) \end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{I}^n-\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1})$$

所以

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n)$$

又

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) & \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_2^n \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_2^n & 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) \end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) & \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda_2^n \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_2^n & 1-\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n+\frac{1}{2}\lambda_2^n\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$