新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

组合数学

（第2版）

北京师范大学数学学院◎组编
张秀平◎主编

ZUHE SHUXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

组合数学

（第2版）

北京师范大学数学学院◎组编
张秀平◎主编

ZUHE SHUXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/张秀平主编．—2 版．—北京：北京师范大学出版社，2017.6
(新世纪高等学校规划教材．数学系列)
ISBN 978-7-303-22326-8

Ⅰ.①组…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①组合数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 102665 号

营销中心电话　010-62978190　62979006
北师大出版社科技与经管分社　www.jswsbook.com
电子信箱　jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com
北京市新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：10.75
字　　数：220 千字
版　　次：2017 年 6 月第 2 版
印　　次：2017 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：24.80 元

策划编辑：岳昌庆　刘风娟　　责任编辑：岳昌庆　刘风娟
美术编辑：刘　超　　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　　责任印制：赵非非

前　言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系．2004 年成立北京师范大学数学科学学院．经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验．将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的．

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机．北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版．除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有 5 种版本．第 1 种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 1985 年，由我校出版社编写出版了 1 套(17 部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材．在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要．第 2 种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材．第 3 种是面向 21 世纪课程教材．第 4 种是北京师范大学现代数学课程教材．第 5 种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书．在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版．

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写．计划用几年时间，出版数学及应用数学、数学教育、大学数学基础课程、数学学科硕士研究生 4 个系列的主要课程教材．我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善．

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考．(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

作者的话

2001 年 9 月，教育部颁布了《关于加强高等学校本科教学工作提高教学质量的若干意见》的 4 号文件，要求全国各高等院校积极推广使用外语进行专业课教学，以培养高素质、复合型人才，实现我国高等教育的可持续发展. 本书是在作者从 2002 年开始从事《组合数学》双语教学的基础上改编而成的. 由于国家中英文的双语教学要求使用英文原版教材，所以本书的主线是基于 R. A. Brualdi 的《Combinatorics》一书. 但考虑到中国学生的特点，我们在此基础上增加了一些内容，希望能更适合中国学生学习. 本书不仅可以作为双语教学的中文参考书，也可以作为大学本科数学专业汉语教学以及非数学专业的研究生教学使用.

本书包含了组合数学的基本内容与方法：抽屉原则、排列组合、容斥原理、生成函数、匹配、组合设计. 本书写作力求简练. 若干难度不大，且有利于读者掌握知识方法的证明写得很简略，希望读者能通过一定的独立思考掌握组合数学的内涵.

本书作者由衷地感谢 R. A. Brualdi 的《Combinatorics》一书给本书提供的大量的例子. 由于本书主要是为配合本书作者进行的双语教学而印制的汉语版，所以选用了这些例子. 同时，还要感谢王伯英先生在北京师范大学教学系讲课时印制的《组合数学讲义》，本书引用了部分内容，相信会给本书增色不少.

由于作者水平有限，书中肯定会有若干不到之处，请各位专家和读者多提宝贵意见.

目 录

第1章 什么是组合数学

事实上,每个人都接触过组合数学问题.请看下面两个例子:

1. n 个队进行比赛,总共要比赛多少场?

2. 如何构造一个 n 阶幻方?

虽然第一个问题的条件不够充分,比如,比赛是单循环还是双循环,要不要分组等,但是凡是学过排列组合的人基本都能解决这样的问题.

第二个问题就要复杂得多,困难得多.用我们中学学过的排列组合根本无法解决,甚至和它们似乎没有关系,可是这些问题都是我们组合数学要研究的问题.

组合数学研究的问题遍及物理学、生物学、信息科学以及众多的数学领域.组合数学研究的问题其实就是对已给某些物体如何进行排列的问题.组合数学的两类基本问题是:

(1) 满足某些条件的排列的存在性.

(2) 如果存在,对这些排列计数或者在计数困难的情况下进行分类.

与上面两类问题密切相关的还有下面两类问题:

(1) 研究已知的排列,利用所得的规律和性质构造更多的排列,甚至找到构造所有排列的一般方法.

(2) 构造某种意义下的最优排列.

以上我们对组合数学作了一个概括性的描述.下面我们介绍几个问题来加深对组合数学的理解.

例 1-1 (棋盘的完美覆盖问题)一个 8 行 8 列(以后记作 8×8)的棋盘能否被 32 块多米诺骨牌完全覆盖?

我们这里的骨牌是由两个相邻方格构成的.要求每两个骨牌不能重叠放置,而且都要盖在棋盘上,这样的覆盖称为完美覆盖.

显然,这样的覆盖是存在的.

Fisher 在 1961 年发现所有的完美覆盖共有 $12\,988\,816=2^4\times901^2$(种).

我们对此问题做一些推广.

(1) 将 8×8 的棋盘换成 $m\times n$ 的棋盘.

此时完美覆盖不一定存在了,比如 $m=n=3$. 容易知道此时有完美覆盖的充要条件是 m 和 n 中至少有一个是偶数.

(2) 对 8×8 的棋盘进行修剪.

比如我们去掉对角上相对的两个角上的方格. 如图 1-1(a)所示. 此时没有完美覆盖.

为了证明这个结论,我们将未被去掉的方格染两种颜色,如图 1-1(b)所示. 其中 B 表示染黑色(black),W 表示染白色(white).

每块骨牌必然会盖住一白一黑两个小格. 如果有完美覆盖,那么必然要使用 31 块骨牌,于是图 1-1(b)中必然是 31 块黑色、31 块白色. 然而这里面有 32 块黑色和 30 块白色,矛盾!

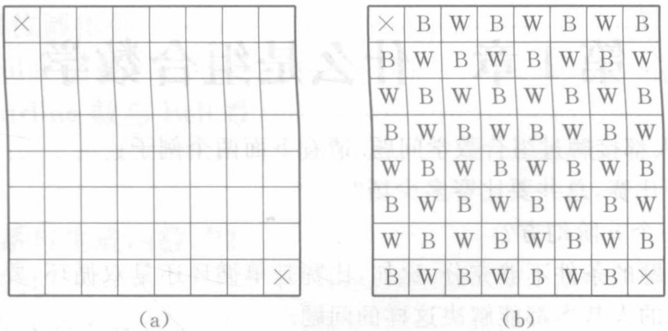

图 1-1

由以上的说明我们得到被修剪的棋盘有完美覆盖的一个必要条件：黑白格的个数相等．然而，这个条件并不是充分的．请读者自己举例说明．

(3)b-米诺骨牌．

b-米诺骨牌就是 b 个方格并排排在一起形成的图形．多米诺骨牌是 2 个方格排在一起的图形，所以 b-米诺骨牌是多米诺骨牌的一种推广．

在推广(1)中，我们得到用多米诺骨牌完美覆盖 $m\times n$ 的棋盘的充要条件是 m 和 n 中至少有一个是偶数，或写成 $2\mid m$ 或 $2\mid n$．

显然，当 $b\mid m$ 或 $b\mid n$ 时，一定有完美覆盖．我们下面证明反之也是成立的．

若 b 是质数，有完美覆盖时 mn 为 b 的倍数，即 $b\mid mn$，由 b 是质数得 $b\mid m$ 或 $b\mid n$．

若 b 不是质数，由带余除法

$$m=pb+r,\ 0\leqslant r\leqslant b-1,$$
$$n=qb+s,\ 0\leqslant s\leqslant b-1.$$

不妨设 $r\leqslant s$，我们来证明 $r=0$．

图 1-2 展示 $m=6$，$n=11$，$b=4$ 时的情况．

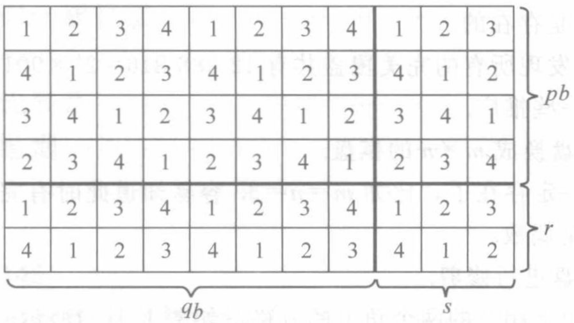

图 1-2

左上角有 $p\times q$ 个 $b\times b$ 的小块，右上角有 p 个 $b\times s$ 的小块，左下角有 q 个 $r\times b$ 的小块，右下角是一个 $r\times s$ 的小块，于是由 $r\leqslant s$ 知这个图中 1 的个数为 $pqb+ps+qr+r$．如果有完美覆盖，那么 b 多米诺骨牌的个数就是图中 1 的个数，从而方格数应为$(pqb+ps+qr+r)b$．另一方面，方格总数为 $mn=(pb+r)(qb+s)$，于是

$$(pqb+ps+qr+r)b=(pb+r)(qb+s)$$

化简以后得 $rb=rs$，由 $b\neq s$ 知 $r=0$.

我们这里使用的方法是算两次的方法：同一个量使用不同的方法计算，得到的结果应该是相同的. 在组合数学中这是一个重要的常用方法.

例 1-2　切割正方体.

考虑一个棱长为 3 的正方体，我们把它切成一些棱长为 1 的小正方体，这些小正方体的个数为 27. 沿三个方向，每个方向都切两刀，肯定可以实现这个目标. 如果切了若干刀以后把这些小块做适当调整，那么所需要的刀数不是不能减少的，比如棱长为 4 的正方体切成 64 个单位正方体时，如果不做任何移动，那么需要 9 刀才能完成这项工作. 很容易知道，我们用 6 刀即可完成.

于是，我们自然产生了一个问题：棱长为 3 的正方体切成 27 个单位正方体时，最少需要几刀？

答案是 6 刀. 不能再少了！

证明如下：考虑中间的那个小正方体，它有 6 个面，每个面都需要一刀，从而至少需要 6 刀. 而 6 刀又能完成这项工作，所以最少要 6 刀.

我们还可以把例 1-1 和例 1-2 结合起来，去切一张棋盘.

考虑用 8 块多米诺骨牌(简称骨牌)覆盖住的 4×4 的棋盘. 证明在 6 条格线中至少能选出一条，使得沿这条格线剪开这张棋盘时，不会剪到任何一张骨牌.

证明　如图 1-3. 若沿直线 r_1 剪开会剪到骨牌，则至少会剪到 2 块骨牌. 同样若沿 r_3 会剪到骨牌的话也会剪到 2 块骨牌. 类似地讨论知道若沿 r_1，r_2，r_3，c_1，c_2，c_3 剪开都会剪到骨牌的话，每条线都会至少剪到 2 块骨牌，这样就会剪到不少于 $2\times 6=12$ 块骨牌. 然而总共只有 8 块骨牌，矛盾！

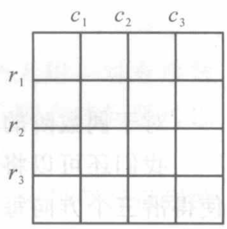

图 1-3

例 1-3　幻方.

给定一个 $n\times n$ 的棋盘，方格数为 n^2. 现将 $1\sim n^2$ 这 n^2 个数填入这 n^2 个方格中，每个数字都要使用且只使用一次. 若每行的行和与每列的列和还有两条对角线的元素之和都是相等的数(这个数称为幻和)，则我们称这个 $n\times n$ 的表格为一个 n 阶幻方.

显然一个 n 阶幻方的幻和为$\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

另一个显然的事实是不存在 2 阶幻方.

奇数阶幻方的构造是由 de la Loubere 在 17 世纪给出的. 构造方法如下：

把 1 放在第一行中间的方格中，以后的数字填入到右上方的方格中. 下列三种情况需要作如下调整：

(1) 当一个数填入到最上面一行时，它的下一个数需要填入到最下面一行，相当于把表格的上、下粘在一起，填入数字后再剪开.

(2) 当一个数填入到最右面一列时，它的下一个数需要填入到最左面一列，相当于把表格的左、右粘在一起，填入数字后再剪开.

(3) 当一个数的右上角的格已经被填上数字时，它的下一个数填入它的下面.

例如图 1-4 是一个 5 阶幻方.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 1-4

在图 1-4 中，只要注意 2，4，6 这三个数的填法，其他的就很容易了.

事实上，对于 3 阶幻方，在我国公元前 23 世纪的神龟背洛书的故事当中就有记载，翻译成现在的阿拉伯数字就是图 1-5.

而它的构造方法和上面的构造方法完全一致. 我们称这个图为九宫图.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 1-5

对于偶数阶的幻方，除了 2 阶的以外，也都有它们的构造方法，这里不再赘述.

我们还可以将幻方推广为幻立方，所谓幻立方就是将 $1\sim n^3$ 填入 $n\times n\times n$ 的立方格中使得沿三个方向每一条中的 n 个数及对角线上的 n 个数的和都相等,这个和我们称为幻立方的幻和. 易知 n 阶幻立方的幻和为

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^3(n^3+1)}{2}=\frac{n^4+n}{2}.$$

显然，2 阶幻立方是不存在的. 我们还能证明 3 阶幻立方也是不存在的. 证明如下：采用反证法. 任意切出一片 3×3 的部分，因为 3 阶幻立方的幻和为 42，如图 1-6，所以

$$a+b+c=42,$$
$$g+h+i=42,$$
$$a+e+i=42,$$
$$c+e+g=42,$$
$$b+e+h=42.$$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图 1-6

将后面三个式子相加再减去前面两个式子的和可得 $e=14$. 即每个 $n\times n$ 的方格表的中间的数字均为 14，但是我们有多个这样的方格表，于是如果 3 阶幻立方存在，就要重复多次填入数字 14，而这是规则不允许的.

例 1-4 四色问题.

为了迅速区分地图上的各个不同的国家，我们会将不同的国家染上不同的颜色，要求相邻的国家不同色.

已经证明了五种颜色可以做到这一点.

在 1850 年左右，Francis Guthrie 在他读研究生的时候首次提出了下面的问题：能够做到上述染色方法最少需要几种颜色？

图 1-7 表明 3 种颜色是不够的.

于是关键的问题就是 4 种颜色到底能否实现上述的染色方法.

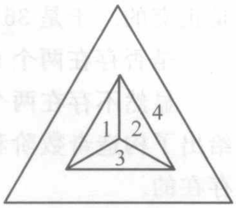

图 1-7

1879 年，A. Kempe 宣称，他证明了 4 种颜色就够了. 然而 1890 年 P. J. Heawood 发现 A. Kempe 的证明是错的. 可是 Kempe 的证明却有很大的启发性，Heawood 利用这个证明思想和方法证明了 5 色定理. 4 色问题在以后很长一段时间都作为难题而未得到解决. 直到 1976 年，由 Appel 和 Haken 宣称他们用计算机花了 1 200 h 证明了 4 色就足够了. 后来，这个证明由 N. Roberson，D. P. Sanders，P. D. Seymour 和 R. Thomas 作了简化. 然而，这种计算机证明到目前尚未被所有的数学工作者所接受. 于是虽然有人把 4 色问题改称为 4 色定理，但有若干学者仍坚持称为 4 色问题. 这个问题的理论证明仍然是遥遥无期的.

例 1-5　36 军官问题.

从 6 个不同的军团中，各选出 6 种不同军衔各 1 人(要求 6 个军衔在每个军团中是一样的)组成一支 36 人的队伍. 将这 36 人排成一个 6×6 的方阵，要求每行每列中的 6 个人都来自于不同的军团，且有不同的军衔，问这样的排法是否存在？

这个问题是由瑞士数学家 L. Euler 在 18 世纪提出来的. 当他把 1 个人用一对有序数 (i,j) 表示的时候 $(i,j=1,2,\cdots,6)$，其中 i 表示军团，j 表示军衔，则上述问题可以表示为：

将 36 个有序数对 $(i,j)(i,j=1,2,\cdots,6)$ 排成一个 6×6 的方阵，使得每行每列的第一个位置的数和第二个位置的数都是由 1 到 6 这 6 个数组成的. 问这样的排列方法是否存在？

为了方便研究这个问题，我们将 6 变成一般的整数 n，并且将两个位置的数分开来讨论. 于是，引入下面的定义：

若一个 $n\times n$ 的矩阵的每一行每一列都是由 $1\sim n$ 这 n 个整数组成，我们就称它是一个 n 阶拉丁方. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$$

分别为一个 2 阶和 3 阶的拉丁方.

将两个拉丁方对应位置的元素做成有序数对，从而形成一个新的矩阵，这个矩阵叫做这两个拉丁方的并置. 例如

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(3,2)&(1,3)&(2,1)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\end{bmatrix}.$$

我们把 $\boldsymbol{B}$ 叫做 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 的并置. 注意 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 的并置和 $\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{A}_1$ 的并置往往是不同的.

上面的 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 并置以后的矩阵中的所有元素都是互不相同的，即$(i, j)(i, j=1, 2, 3)$每个元素都出现且只出现一次，这样的拉丁方我们称为是正交的．一般地，若两个 n 阶拉丁方的并置的 n^2 个元素包含了所有元素$(i, j)(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称这两个拉丁方是正交的．于是 36 军官问题又可以叙述为：

是否存在两个 6 阶正交拉丁方?

显然不存在两个 2 阶正交拉丁方．上面的例子说明存在两个 3 阶正交拉丁方．Euler 给出了构造奇数阶和 4 的倍数阶的正交拉丁方的方法．并猜想 $4k+2$ 阶的正交拉丁方是不存在的．

1901 年，Tarry 证明了当 $k=1$ 即 $n=6$ 时 Euler 的猜想是正确的，即证明了 36 军官问题中的排列方法是不存在的．1960 年左右，Bose，Parker，Shrikhande 证明了当 $n>6$ 时 Euler 的猜想全都是不对的，并给出了当 $n>6$ 时构造 n 阶正交拉丁方的方法．

例 1-6　最短路线问题．

考虑一个城市，有很多街道也有很多路口，当一个人要从 A 到 B 时，他首先要考虑的是怎么走最近．这就是最短路线问题．

当然，随着城市的现代化建设的迅速发展，路程最短可能越来越不重要，人们更关心的是怎么走时间最短．在数学上这是本质相同的问题．这种问题在图论和网络中将会得到彻底的解决．

例 1-7　Nim 游戏．

我们先来简单介绍一下这个游戏的两种容易解决的特例．这两个简单情形在我国中小学生数学竞赛培训题中就能见到．

(1) 给一堆棋子．两个参加游戏的选手 A 和 B 轮流取子，每人每次取 1 到 5 个棋子，谁取走最后一个棋子谁获得游戏的胜利．试找出这个游戏的必胜策略．

答案是：如果棋子的个数是6的倍数，那么第二个取子的人有必胜策略．方法是：若第一个人取 n 个棋子，则第二个人取 $6-n$ 个棋子．于是当棋子的个数不是 6 的倍数时第一个人就有必胜策略，方法是显而易见的．

(2) 给两堆棋子，两个人轮流取子，每人每次可从任一堆中取任意多个棋子(只要这堆中有这么多棋子)，但不允许从两堆中同时取子，谁取走最后一个棋子谁获得胜利．试找出这个游戏的必胜策略．

答案是：若两堆棋子的个数一样多，则第二个取子的人有必胜策略．方法是：第一个人从某堆中取走 n 个棋子，第二个人就从另一堆中取走 n 个棋子．于是当两堆棋子个数不一样多的时候，第一个取子的人的必胜策略就变得显然了．

Nim 游戏是更一般的问题：给 k 堆棋子$(k\geqslant 1)$，棋子的个数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$．两个人轮流取子，每人每次可从任一堆中取走任意多的棋子，但只能从一堆中取子．取走最后一个棋子的人获胜．试找出这个游戏的必胜策略．

这个游戏要复杂很多．需要用到二进制数．设 $n=a_m 2^m+a_{m-1}2^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 2^0$，我们称 a_i 为 n 的第 i 位数．首先将 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 均写成二进制数．例如，有 4 堆棋子，个数分别为 7，9，12，15，将它们写成

$$(111)_2,\ (1001)_2,\ (1100)_2,\ (1111)_2.$$

由于它们的位数不同，我们将位数少的数前面补充若干个0，使得它们变成位数一样多的二进制数，如在上面的数中将第一个变为$(0111)_2$.

然后，将所有二进制的第i位相加，如果全都是偶数，那么称这个游戏是平衡的，否则称之为非平衡的．例如上面的4个二进制

$$\begin{matrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{matrix}$$

第0位的和、第2位的和、第3位的和为奇数，于是这个游戏是非平衡的．如果将第4堆的棋子数改为2，那么这四个数变为

$$\begin{matrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{matrix}$$

这个游戏就是平衡的了.

结论是：若这个游戏是平衡的，则后取子者有必胜策略，若这个游戏是非平衡的，则先取子者有必胜策略．注意到最后把所有子取完后是平衡的，所以，为了证明上面的结论，我们只需证明下面两个结论：

(i) 任何一个平衡游戏在任意一次取子以后一定变成非平衡游戏.

(ii) 任何一个非平衡游戏在适当的取子以后可以变成平衡游戏.

(i) 的证明如下：在经过任意的取子以后，那一堆的数字一定会有变化，它的位置变化的最高位一定由1变为0，于是相应的位的和由偶数变为奇数，从而游戏变成非平衡的.

对于结论(ii)，我们举例来说明这个取法．比如在上面的四个数中：

$$\begin{matrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{matrix}$$

选最高非平衡位是1的那一堆，如果有多个，可从中任选一个．我们选第四堆．取法是：平衡位不动，非平衡位如果是第i位，这个位置是1就取走2^i个棋子，若为0就放回2^i个棋子．上面游戏的非平衡位为第0，2，3位，且均为1，故需取走$2^3+2^2+2^0=13$变成以前讨论过的平衡游戏.

如果选第二堆，那么需取走$2^3-2^2+2^0=5$个棋子变为平衡游戏．若选第三堆，则需取走$2^3+2^2-2^0=11$个棋子.

由二进制数的性质易知不论后面的数是加还是减，上面形如$2^i\pm2^{i-1}\pm\cdots\pm2^0$的数总是大于0的整数．从而证明了上述的必胜策略.

通过上面7个例子，我们能体会到组合数学问题是千变万化的，解决方法也是变幻莫测的．在后面各章中，我们将会研究组合数学问题中的一些常用的技术和方法.

习题

1. 求用多米诺骨牌完美覆盖 3×4 的棋盘的方法数.
2. 设正整数 a 是正整数 b 的因数. 证明用 $a\times b$ 的骨牌可以完美覆盖 $m\times n$ 的棋盘的充要条件是：a 是 m 和 n 的公因数且 b 是 m 或 n 的因数.
3. 构造一个 9 阶幻方.
4. 构造一个 6 阶幻方.
5. 证明将一个 n 阶幻方中的任意的数 a 替换为 n^2+1-a 后仍是一个 n 阶幻方.
6. 构造两个 4 阶正交拉丁方.
7. 一个 6×6 的棋盘被 18 块多米诺骨牌完美覆盖，证明可以找到一条格线，沿此格线剪开可将棋盘剪成非空的两部分，且不会剪到任何一块骨牌.
8. 构造一个 8×8 棋盘的多米诺骨牌的覆盖方法，使得沿任一条格线剪开都会剪到骨牌.
9. 在 Nim 游戏中，有五堆棋子，分别有 10，20，30，40，50 个. 帮助第一个取子的人决定怎样取子才能保证赢.
10. 证明若在 Nim 游戏中含奇数个棋子的堆数是奇数，则第一个取子的人有必胜策略.

第 2 章　抽屉原则

2.1　抽屉原则的简单形式

中学阶段已经学过抽屉原则．我们现在作一总结并加以推广．

定理 2.1.1　若把 $n+1$ 个物体放入 n 个抽屉中，则至少有一个抽屉含有两个或两个以上物体．

这个结果用反证法很容易证明．

用染色的语言可将上面定理写成

若把 $n+1$ 个物体染成 n 种颜色，每个物体只染一种颜色，则至少有两个物体同色．

与抽屉原则密切相关的有以下两个结论

(1) 若将 n 个物体放入 n 个抽屉中，且每个抽屉都是不空的，则每个抽屉都刚好有一个物体．

(2) 若将 n 个物体放入 n 个抽屉中，且每个抽屉都有不多于一个物体，则每个抽屉都刚好有一个物体．

事实上，这两个结论用映射的语言描述就变成：若 f 是 X 到 Y 的映射，且 $|X|=|Y|$，

(1′) 若 f 是满射，则 f 是单射．

(2′) 若 f 是单射，则 f 是满射．

从而，若 $|X|=|Y|$，则由 f 是满射或 f 是单射都能推出 f 是一一映射．

例 2-1　在任意 13 个人中一定有两个人的生日是在同一个月份的．

当我们把 13 个人看成 13 个物体，而把 12 个月份看成 12 个抽屉的时候，就可应用定理 2.1.1 了．

例 2-2　从 n 对夫妻中取出多少人才能保证取出的人中至少有一对是夫妻？

如果我们把一对夫妻看成一个抽屉，那么需要取出 $n+1$ 个人就能保证有一对夫妻．取 n 个人明显是不够的．

例 2-3　设有整数数列 a_1，a_2，…，a_n．证明一定有连续若干项之和能被 n 整除．

证明　设 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$．S_1，S_2，…，S_n 被 n 除的余数有 0，1，…，$n-1$ 这 n 种可能．若有某 S_i 被 n 除的余数为 0，则结论已经成立．否则，n 个数被 n 除的余数有 1，2，…，$n-1$ 这 $n-1$ 种可能．根据抽屉原则，必有两个 S_i 被 n 除的余数相同，从而这两个数的差可被 n 整除．而两个 S_i 的差就是数列 a_1，a_2，…，a_n 的连续若干项之和．

例 2-4　一位国际象棋大师有 11 周的时间准备一场比赛．他准备每天至少下一盘棋，而且为了不让自己太疲劳，连续 7 天不超过 12 盘棋．证明：有连续若干天，他刚好下了 21 盘棋．

证明　设第 i 天下 x_i 盘棋．令 $S_i=x_1+x_2+\cdots+x_i$ $(i=1, 2, \cdots, 77)$，$T_i=S_i+21$．则 $x_i\geqslant 1$．且

$$1\leqslant S_1<S_2<\cdots<S_{77}\leqslant 11\times 12=132,$$
$$22\leqslant T_1<T_2<\cdots<T_{77}\leqslant 132+21=153.$$

于是在 1～153 这 153 个抽屉中放入了 77 个 S_i 和 77 个 T_i 总共 154 个数，于是必有两个数相等. 而这两个数不会同为 S_i，也不会同为 T_i，故有 i，j 使得 $S_i=T_j=S_j+21$，即从第 $j+1$ 天到第 i 天，他总共下了 21 盘棋.

注意到，将 11 周改为大于 11 周时，结果显然是对的，所以有人会问，最少多少周就保证题目中的结论成立？有趣的是：3 周就可以了. 下面的证明是本书作者在北京师范大学数学科学学院授课时，由一个学生给出的：

设每天下 x_i 盘棋，考虑数列 x_1，x_2，…，x_{21}. 由例 3 知，此数列有连续若干项之和可被 21 整除，于是，由任意连续若干项的和都在 1 到 36 之间，可得这个和一定是 21. 而 1 周或 2 周结论显然不成立，因为只需每天一盘棋就是反例.

例 2-5 从整数 1～200 中任取 101 个整数，证明一定存在两个整数，使得其中一个能被另一个整除.

证明 我们将 1～200 中所有整数均写成 $2^r\cdot s$ 的形式，其中 s 为奇数. 则按 s 构造抽屉，有 1，3，…，199 共 100 个抽屉. 101 个整数中必有两整数的奇数部分是相同的. 于是 r 小的整数就能整除 r 大的整数.

例 2-6 （中国余数定理）设 m，n 为互质的正整数，整数 a，b 满足 $0\leqslant a\leqslant m-1$，$0\leqslant b\leqslant n-1$. 证明：存在一个正整数 x，使得 x 被 m 除的余数为 a，被 n 除的余数为 b.

证明 我们只需在被 m 除余 a 的正整数中找到被 n 除余 b 的数即可.

事实上，我们可以证明：

$$a,\ m+a,\ 2m+a,\ \cdots,\ (n-1)m+a$$

被 n 除的余数是互不相同的，反证，若 $km+a$ 和 $lm+a$ 被 n 除的余数相同，且 $0\leqslant l<k\leqslant n-1$，则 $km+a-(lm+a)=(k-l)m$ 也能被 n 整除. 由 m 与 n 互质得 $k-l$ 能被 n 整除，但 $1\leqslant k-l\leqslant n-1$. 矛盾！