

九章
丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·华东师大数学系编

你用更多的自信面对未来!

数学分析

(第四版·上册)

同步辅导及习题全解

主 编 杨 阳

一书三用

同步辅导+考研复习+教师备课

习题超全解

名师一线经验大汇集, 解题步骤超详细, 方法技巧最实用

新版



扫码在线阅读电子书,
让你的学习更简单!



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第四版·上册）

同步辅导及习题全解

主 编 杨 阳



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

本书是为了配合高等教育出版社出版,华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版·上册)一书而编写的配套辅导书。

本书共 11 章,分别介绍实数集与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、不定积分、定积分、定积分的应用、反常积分等内容。本书按教材内容安排全书结构,各章基本都包括本章导航、各个击破、课后习题全解、走进考研四部分内容;对各章的重点、难点作了较深刻的分析,并针对各章节全部习题给出详细解题过程,并附以知识点窍和逻辑推理,思路清晰、逻辑性强,循序渐进地帮助读者分析并解决问题。各章还附有典型例题与解题技巧,以及历年考研真题评析。

本书可作为数学专业学生学习“数学分析”课程的辅导材料和复习参考用书,也可作为数学专业考研学生强化复习的指导书及“数学分析”课程教师的教学参考书。

由于时间仓促及编者水平有限,书中难免存在疏漏甚至错误之处,恳请广大读者和专家批评指正。如有疑问,请联系我们(微信:JZCS15652485156 或 QQ:753364288)。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第四版·上册)同步辅导及习题全解 /
杨阳主编. — 北京:中国水利水电出版社, 2018.9
(高校经典教材同步辅导丛书)
ISBN 978-7-5170-6834-1

I. ①数… II. ①杨… III. ①数学分析—高等学校—
教学参考资料 IV. ①017

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第207930号

策划编辑:杨庆川 责任编辑:张玉玲 加工编辑:焦艳芳 王玉梅 封面设计:李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析(第四版·上册)同步辅导及习题全解 SHUXUE FENXI (DI-SI BAN · SHANGCE) TONGBU FUDAO JI XITI QUANJIE
作 者 出版发行	主 编 杨 阳 中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)、82562819 (万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版 刷 印 规 格 版 次 印 数 定 价	北京万水电子信息有限公司 三河市祥宏印务有限公司 170mm×240mm 16 开本 19.5 印张 518 千字 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷 0001—7000 册 38.80 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

前言

“数学分析”是数学专业最重要的一门专业基础课。大学本科乃至研究生阶段的很多后续课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用,至于它的基本概念、思想和方法,更可以说是无处不在。数学专业后续专业课程如“微分方程”“实变函数和复变函数”“概率论”“统计及泛函分析”“微分几何”等都要以“数学分析”为基础。同时,“数学分析”也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。

华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版·上册)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本配套辅导书。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到“数学分析”这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

- 1. 本章导航。**以图文的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容有一个清晰的了解。
- 2. 各个击破。**对每章知识点作了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。
- 3. 课后习题全解。**教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促使其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。
- 4. 走进考研。**精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题,并对其进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

编者
2018年7月

前言

第一章 实数集与函数	1
本章导航	1
各个击破	2
课后习题全解	6
第二章 数列极限	26
本章导航	26
各个击破	27
课后习题全解	31
走近考研	52
第三章 函数极限	56
本章导航	56
各个击破	57
课后习题全解	63
走近考研	83
第四章 函数的连续性	88
本章导航	88
各个击破	89
课后习题全解	95
走近考研	106
第五章 导数和微分	112
本章导航	112
各个击破	113
课后习题全解	120
走近考研	140

目录

contents

第六章 微分中值定理及其应用	146
本章导航	146
各个击破	147
课后习题全解	157
走近考研	186
第七章 实数的完备性	192
本章导航	192
各个击破	193
课后习题全解	195
第八章 不定积分	201
本章导航	201
各个击破	202
课后习题全解	209
走近考研	227
第九章 定积分	229
本章导航	229
各个击破	230
课后习题全解	237
走近考研	256
第十章 定积分的应用	265
本章导航	265
各个击破	266
课后习题全解	271
走近考研	282
第十一章 反常积分	285
本章导航	285
各个击破	286
课后习题全解	289

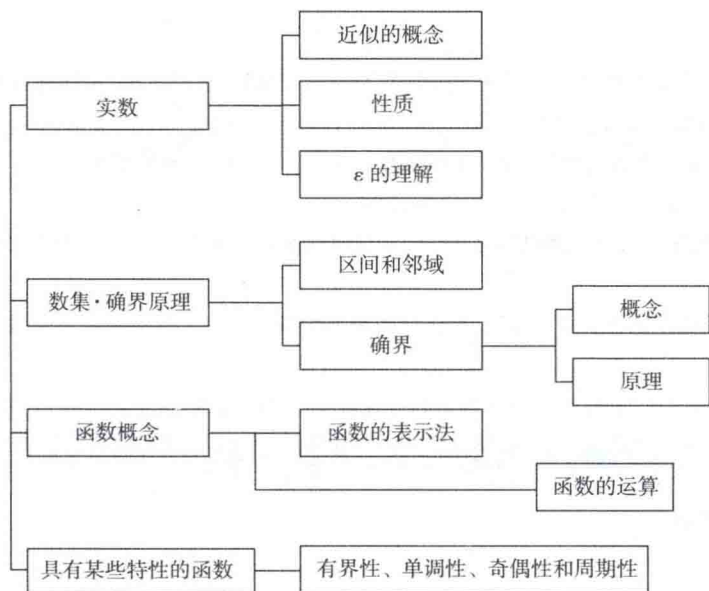
第一章

实数集与函数

本章导航

在“数学分析”这门学科中,基本研究对象就是定义在实数集上的函数;了解实数和函数的基本概念以及性质是我们继续走下去的第一步.在初高中阶段,大家对实数的概念已经很熟悉了;本章中实数的内容就是建立在中学知识的基础上,使学习者更加系统地认知实数.函数是数学分析中重要的概念,研究函数的性质(包括单调性、奇偶性等)从而得到具体问题的解决方案是数学分析中的基本方法;在本章中我们将给出函数性质的准确定义,毕竟严格是数学的魅力所在.

本章知识结构图如下:



实数

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 由有理数和无理数组成, 任何实数都可用一个确切的无限小数或者有限小数来表示.

2. 实数的序关系

(1) 传递性: 若实数 a, b, c 有 $a < b, b < c$, 则 $a < c$;

(2) 对任意实数 a, b , 两者的大小关系有三种:

$$a < b, a = b, a > b$$

并且这三种中有且只有一种成立.

3. 实数的 n 位不足近似和 n 位过剩近似

设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数, 称有理数 $x = a_0.$

$a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似, 而有理数 $\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ 为

实数 x 的 n 位过剩近似.

命题: 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 为两实数, 则 $x > y \Leftrightarrow \exists n$ 为正整数, 使得 $x_n > \bar{y}_n$.

4. 实数性质

(1) 封闭性. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的, 即任意两个实数的和、差、积、商(分母不为 0) 仍是实数.

(2) 有序性. 实数集是有序的, 即任意两实数 a, b 必满足下述三个关系之一: $a < b, a > b, a = b$.

(3) 传递性. 实数的大小关系具有传递性, 即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.

(4) 阿基米德性. 实数具有阿基米德性, 即对任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $na > b$.

(5) 稠密性. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性, 即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数, 且既有有理数也有无理数.

(6) 一一对应关系. 实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系.

例 1 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 求代数 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ 的最小值.

分析 该题利用了算术平均不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) &= (1 + \frac{a+b}{a})(1 + \frac{a+b}{b}) = (2 + \frac{b}{a})(2 + \frac{a}{b}) \\ &= 5 + 2(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) \geq 5 + 2 \times 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 9 \end{aligned}$$

则此代数的最小值为 9.

小提示 实数 x 的 n 位不足近似 x_n 当 n 增大时不减, 即 $\bar{x}_0 \leq \bar{x}_1 \leq \cdots \leq \cdots$
而过剩近似 $\bar{x}_n$ 当 n 增大时不增, 即 $\bar{x}_0 \geq \bar{x}_1 \geq \cdots \geq \cdots$

数集·确界原理

区间	有限区间	开区间	设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b)
	有限区间	闭区间	数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$
		半开半闭区间	数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$
	无限区间		$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$. 这几类数集称为无限区间
邻域	邻域		设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 满足绝对值不等式 $ x - a < \delta$ 的全体实数 x 的集合, 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a; \delta)$ 或 $U(a)$ 即有 $U(a; \delta) = \{x \mid x - a < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$
	空心邻域		点 a 的空心邻域为 $U^O(a; \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$
	右邻域		点 a 的 δ 右邻域为 $U_+(a; \delta) = [a, a + \delta)$, 记为 $U_+(a)$
	左邻域		点 a 的 δ 左邻域为 $U_-(a; \delta) = (a - \delta, a]$, 记为 $U_-(a)$
确界	上确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集, 若数 η 满足: (1) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界; (2) 对任何 $a < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > a$, 即 η 又是 S 的最小上界, 则称 η 为数集 S 的上确界, 记作 $\eta = \sup S$
	下确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集, 若数 ξ 满足: (1) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界; (2) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大下界, 则称 ξ 为数集 S 的下确界, 记作 $\xi = \inf S$
(确界原理) 设 S 为非空数集, 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界			

例 2 讨论数集 $N_+ = \{n \mid n \text{ 为正整数}\}$ 的有界性.

分析 任取 $n_0 \in N_+$, 显然有 $n_0 \geq 1$, 所以 N_+ 有下界 1;

假设 N_+ 有上界 M , 则 $M > 0$, 按定义, 对任意 $n_0 \in N_+$, 都有 $n_0 \leq M$, 这是不可能的, 如取 $n_0 = [M] + 1$ (符号 $[M]$ 表示不超过 M 的最大整数), 则 $n_0 \in N_+$, 且 $n_0 > M$.

综上所述知: N_+ 是有下界无上界的数集, 因而是无界集.

例 3 试证明: 设数集 A 有上(下)确界, 则这上(下)确界必是唯一的.

分析 设 $\eta = \sup A, \eta' = \sup A$ 且 $\eta \neq \eta'$, 则不妨设 $\eta < \eta'$

由上确界定义可知, 对一切 $x_0 \in A$, 有 $x_0 \leq \eta$,

同理, 有 $\eta' = \sup A$, 又因为 $\eta < \eta'$,

所以 $\exists x_0 \in A$ 使 $\eta < x_0$,

这与上确界定义矛盾, 所以假设不正确, 所以有 $\eta = \eta'$.

同理可证明下确界的唯一性.

小提示 同学们, 这个命题可以直接拿来用哦!

名称	定义	重点	备注
函数	给定集合 X , 若存在某种对应规则 f , 对于 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 称 f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数, 记为 $y = f(x)$; X 称为定义域, x 称为自变量, y 为因变量, $\{f(x), x \in X\}$ 为值域	对应规则; 定义域	
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$, 即为 g 与 f 的复合函数, 记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则; 定义域; 值域	结合律成立, 也即 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, 但没有交换律
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 Y , $\forall y \in Y$, 有满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$, 就称为原函数 $y = f(x)$ 的反函数	一一对应	$f: X \rightarrow Y$ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X$ $f(f^{-1}) = I_Y: Y \rightarrow Y$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow Y$ I_X 表示 X 上恒同变换, I_Y 同理
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后得到的函数	有限次复合	

例 4 求函数 $y = \frac{x^2+7}{\sqrt{x^2+3}}$ 的值域.

分析 利用换元法, 令 $t = x^2 + 3$, 则有 $y = \frac{t+4}{\sqrt{t}}$,

$$\text{所以 } y = \sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{t} \cdot \frac{4}{\sqrt{t}}} = 4,$$

故函数的值域为 $[4, +\infty)$.

例 5 求函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2^x, & x > 4 \end{cases}$ 的反函数.

分析 反函数的条件是: 定义域与值域一一映射.

$$(1) x < 1 \text{ 时, } f(x) = x \quad \therefore f^{-1}(x) = x$$

$$(2) 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ 时, } f(x) = x^2$$

$$x \in [1, 4], f(x) \in [1, 16] \quad \therefore x = \sqrt{f(x)}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$(3) x > 4 \text{ 时, } f(x) = 2^x, f(x) \in (6, +\infty)$$

同样满足定义域与值域一一映射的条件

$$\therefore x = \log_2 f(x)$$

$$\text{即 } f^{-1}(x) = \log_2 x$$

综上所述

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & x > 16 \end{cases}$$

例 6 设 $f(x) = \frac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{49-x^2}$, 求 $f(x)$ 的定义域和 $f(f(-7))$.

分析 由题意可知

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ 49-x^2 \geq 0 \\ 3-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -7 \leq x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3.$$

$\therefore$ 定义域为 $[-7, 2) \cup (2, 3)$.

$$\therefore f(-7) = \frac{1}{\lg 10} = 1$$

$$\therefore f(f(-7)) = f(1) = \frac{1}{\lg 2} + 4\sqrt{3}.$$

具有某些特性的函数

名称	定义	相关性质
有界函数	设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数, 若存在正数 M , 使得每一个 $x \in D$ 有 $ f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数	$\inf_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\},$ $\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$
单调函数	设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数, 若对任何 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 (1) $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的增函数, 特别当严格不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立时, 称 $f(x)$ 为 D 上的严格增函数; (2) $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的减函数, 特别当严格不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立时, 则称 $f(x)$ 为 D 上的严格减函数	严格单调函数必有反函数
奇函数和偶函数	设 D 为对称于原点的数集, $f(x)$ 为定义在 D 上的函数, 若对每一个 $x \in D$ 有 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇)函数	
周期函数	设 $f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数, 若存在 $\sigma > 0$, 使得一切 $x \in D$, 有 $f(x \pm \sigma) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, σ 称为 $f(x)$ 的一个周期	周期函数不一定有基本周期, 如 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷函数

例 7 证明 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 有界的充要条件为: $\exists M, m$, 使得对 $\forall x \in X, m \leq f(x) \leq M$.

分析 (1) 如果 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 有界, 由定义可得

$$\exists M > 0, \forall x \in X \text{ 有 } |f(x)| \leq M, \text{ 即 } -M \leq f(x) \leq M,$$

取 $m = -M, M = M$ 即可.

(2) 反之如果 $\exists M, m$ 使得 $\forall x \in X, m \leq f(x) \leq M$, 令 $M_0 = \max\{|M| + 1, |m|\}$, 则 $|f(x)| \leq M_0$, 即 $\exists M_0 > 0$, 使得对 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M_0$, 即 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 有界.

例 8 验证函数 $f(x) = \frac{5x}{2x^2+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

分析 解法一 由 $2x^2+3 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3})^2 \geq 2|\sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}| = 2\sqrt{6}|x|$, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$|f(x)| = \left| \frac{5x}{2x^2+3} \right| = \frac{5|x|}{2x^2+3} \leq \frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \leq 3.$$

$$|f(0)| = 0 \leq 3,$$

$\therefore$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 总有 $|f(x)| \leq 3$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

解法二 令 $y = \frac{5x}{2x^2+3} \Rightarrow$ 关于 x 的二次方程 $2yx^2 - 5x + 3y = 0$ 有实数根.

$$\therefore \Delta = 5^2 - 24y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{25}{24} \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2.$$

即 $-2 \leq f(x) \leq 2$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

解法三 令 $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 对应 $x \in (-\infty, +\infty)$. 于是

$$f(x) = \frac{5x}{2x^2+3} = \frac{5\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} t}{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} t\right)^2 + 3} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{5}{\sqrt{6}} \frac{\sin t}{\cos t} \frac{1}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{6}} \sin 2t \Rightarrow |f(x)| = \left| \frac{5}{2\sqrt{6}} \sin 2t \right| \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

例 9 证明: $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增函数.

分析 设 $x_1 < x_2, x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

如 $x_1x_2 < 0$, 则 $x_2 > 0 > x_1 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

如 $x_1x_2 > 0$, 则 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

当 $x_1x_2 = 0$, 不妨设 $x_2 = 0$, 则 $x_1^3 < x_2^3 = 0$

同理 $x_1 = 0, x_1^3 < x_2^3$ 仍成立

综上 $x_1^3 - x_2^3 < 0$, 结论得证.

课后习题全解

实数(教材上册 P4)

1. **知识点窍** 有理数的定义; 反证法.

逻辑推理 利用有理数的定义表示出 $a+x$, 再根据 a 为有理数, 推出 x 的表达式, 而 x 为无理数, 可得到矛盾的结论, 所以命题得证.

解题过程 (1) $a+x$ 是无理数.

假设 $a+x$ 是有理数, 则存在整数 $p_1, q_1, q_1 \neq 0$, 使得

$$a+x = \frac{p_1}{q_1}$$

a 是有理数, 则存在整数 $p_2, q_2, q_2 \neq 0$, 使得

①

$$a = \frac{p_2}{q_2} \quad ②$$

将式②代入式①得 $x = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}$

$p_1 q_2 - p_2 q_1, q_1, q_2$ 均为整数, $q_1 q_2 \neq 0$, 因此 x 是有理数, 与题设矛盾.
所以, $a+x$ 是无理数.

(2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

采用与(1)类似方法, $a = \frac{p_2}{q_2}, ax = \frac{p_1}{q_1}, p_2, q_2, q_1$ 均不为零.

得 $x = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}$

$p_1 q_2, p_2 q_1$ 均为整数, 且 $p_2 q_1 \neq 0$, 因此 x 是有理数, 与题设矛盾.
所以, ax 是无理数.

2. **知识点窍** 对不等式化简, 找出零点, 再在实数轴上表示出来.

逻辑推理 (1) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

(2) 将不等式两边同时平方, 去绝对值.

(3) 由平方根特性可知 $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq 0$, 对不等式两边同时平方, 再化简.

解题过程 (1) 分解因式得 $x(x+1)(x-1) > 0$

考虑方程 $x(x+1)(x-1)$ 的零点 0, -1, 1 将数轴分为 4 部分, 分别考虑 $x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, x > 1$.

经检验, $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 满足不等式.
因此该不等式的解为

$$\{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$$

在数轴上表示, 如图 1-1 所示.

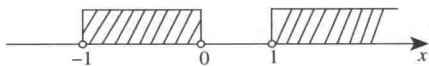


图 1-1

小提示 对不等式化简时, 平方根下的式子是否满足大于 0, 分母是否不等于 0, 移项是否要变号, 这些都是易错的地方.

(2) 将不等式两边同时平方, 得

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &< (x-3)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 &< x^2 - 6x + 9 \\ 4x &< 8 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

在数轴上表示, 如图 1-2 所示.

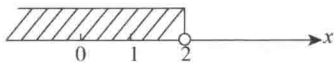


图 1-2

(3) 平方, 得

$$\begin{aligned} 3x - 2 - 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} &\geq 3x - 2 \\ \Rightarrow \sqrt{(x-1)(2x-1)} &= 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

又 $\because 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$

在数轴上表示, 如图 1-3 所示.

综上,将 $x=1$ 代入原式得 $-1>1$

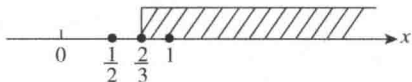


图 1-3

$\therefore x$ 无解

3. 知识点窍 实数集的有序性.

逻辑推理 若 $a \neq b$, 则必有 $|a-b|>0$, 又由题目可知, $\forall \epsilon>0$, 有 $|a-b|<\epsilon$, 所以 $a \neq b$ 不成立.

解题过程 不妨设 $a \neq b$, 由实数有有序性可知

$$|a-b|>0, \text{ 令 } \epsilon_1 = |a-b|,$$

又 $\because \forall \epsilon>0$, 有 $\epsilon_1 < \epsilon$, 这明显不成立.

$\therefore a \neq b$ 不成立

$\therefore a = b$, 命题得证.

4. 知识点窍 可用多种方法解决.

逻辑推理 ① 将不等式平方后展开, 即可证明; ② 细心观察可发现当 $x=1$ 时, 不等式两边相等, 考虑利用函数来解决问题.

解题过程 方法一: 因 $0 \leq (|x|-1)^2 = x^2 + 1 - 2|x|$, 则 $x^2 + 1 \geq 2|x|$, 所以

$$\frac{x^2+1}{|x|} = \left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$$

当且仅当 $|x|=1$, 即 $x=\pm 1$ 时, 等号才成立.

方法二: 令 $y = x + \frac{1}{x}, x>0$

对 y 求导, $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$,

当 $x \in [0, 1)$ 时, $\frac{1}{x^2} > 1. \therefore y' < 0, \therefore y$ 在 $[0, 1]$ 为减函数.

当 $x=1$ 时, $y=2$.

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{1}{x^2} < 1. \therefore y' > 0, \therefore y$ 在 $(1, +\infty)$ 为增函数.

$\therefore y=2$ 为极小值点

$$\therefore x + \frac{1}{x} \geq 2, x>0$$

当 $x<0$ 时, 同理可证.

5. 知识点窍 $|a|+|b|+\cdots+|n| \geq |a+b+\cdots+n|$

逻辑推理 直接由定理即可得.

解题过程 (1) $|x-1|+|x-2| \geq |(x-1)-(x-2)|=1$

当且仅当 $x \in [1, 2]$ 时, 等式成立.

$$(2) \begin{aligned} |x-1|+|x-2|+|x-3| &\geq |x-1|+|x-3| \\ &\geq |(x-1)-(x-3)|=2 \end{aligned}$$

当且仅当 $x=2$ 时, 等式成立.

6. 解题过程 欲证 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|$,

只需证 $(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2})^2 \leq (b-c)^2$. 即证 $2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \leq -2bc$,

只需证 $a^2+bc \leq \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$, 即 $(a^2+bc)^2 \leq (a^2+b^2)(a^2+c^2)$,

即证 $2a^2bc \leq a^2(b^2 + c^2)$.

由于 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 所以 $2bc \leq b^2 + c^2, a^2 > 0$, 所以有 $2a^2bc \leq a^2(b^2 + c^2)$ 成立.

所以原不等式成立.

几何意义: 二维平面上两点 $A(a, b), B(a, c), A, B$ 到原点的距离分别为

$\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2}$, A, B 两点间距离为 $|b - c|$, 原不等式等价于

$|OA - OB| \leq |AB|$, 即两边之差小于第三边.

在坐标系中的表示如图 1-4 所示.

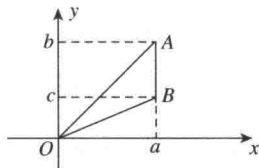


图 1-4

7. **解题过程** 若 $a < b$, 因 $x > 0, b > 0$

所以
$$\begin{cases} a + x < b + x, \\ ax < bx, \end{cases}$$

由此可得
$$\begin{cases} a + x < b + x, \\ ab + ax < ab + bx, \end{cases}$$

变形得
$$\begin{cases} \frac{a+x}{b+x} < 1, \\ \frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}, \end{cases}$$

即
$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} < 1;$$

若 $a > b$, 因 $x > 0, b > 0$.

所以
$$\begin{cases} a + x > b + x, \\ ab + ax > ab + bx, \end{cases}$$

即得
$$1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}.$$

综合上述结果, 结论成立.

8. **知识点窍** 反证法; 有理数 a 满足 $a = \frac{m}{n}, mn > 0$ 且 m, n 互质.

逻辑推理 该题的证明完全从有理数和质数的定义上去考虑, 活用定义.

解题过程 不妨设 $\sqrt{p}$ 为有理数.

$\therefore \exists$ 整数 $m, n, mn > 0$, 且 m, n 互质,

使得 $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, 即 $p = \frac{m^2}{n^2}$.

$\therefore p$ 为正整数 $\therefore pn^2 = m^2$

即 $np(n) = m^2$

$\therefore n$ 与 m^2 互质矛盾 $\therefore n$ 与 m 不互质

这与假设矛盾

$\therefore \sqrt{p}$ 为无理数.

9. **知识点窍** 注意考虑 a, b 的正负.

逻辑推理 分情况讨论, 去掉绝对值符号, 化为一般不等式.

解题过程 (1) $\because |x - a| < |x - b|$, 若 $x = b$, 则无解.

$\therefore \left| \frac{x-a}{x-b} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-a}{x-b} < 1$

小提示 若一个数能表示成某个自然数的平方的形式, 则称这个数为完全平方数.

$$\text{即} \begin{cases} \frac{x-a}{x-b} + 1 > 0 \\ -\frac{x-a}{x-b} + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > b \\ b-a < 0 \\ 2x-a-b > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < b \\ b-a > 0 \\ 2x-a-b < 0 \end{cases}$$

1) 若 $a = b$, 不等式无解

2) 若 $a > b$, $x > \frac{a+b}{2}$

3) 若 $a < b$, $x < \frac{a+b}{2}$

(2) $\because |x-a| < x-b$

$$\therefore x > b$$

由(1)可知,

当 $b \geq a$ 时, $x < \frac{b+a}{2}$, 又 $\because x > b$, $\therefore$ 无解.

当 $b < a$ 时, $x > \frac{b+a}{2}$, 满足 $x > b$, $\therefore x > \frac{b+a}{2}$

(3) 当 $b \leq 0$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$.

当 $b > 0$ 时, 原不等式等价于: $a-b < x^2 < a+b$. 因此有

1) 当 $a+b \leq 0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

2) 当 $a+b > 0$ 时,

(i) 如果 $a > b$, 则解为 $\sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}$,

即 $\sqrt{a-b} < x < \sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b} < x < -\sqrt{a-b}$;

(ii) 如果 $a < b$, 则解为 $|x| < \sqrt{a+b}$,

即 $-\sqrt{a+b} < x < \sqrt{a+b}$.

数集·确界原理(教材上册 P9)

1. 解题过程 (1) 当 $1-x \geq 0$ 时, 不等式化为 $1-x \geq x$, 解为 $x \leq \frac{1}{2}$;

当 $1-x < 0$ 时, 不等式化为 $x-1 \geq x$, 无解.

综上所述, 原不等式的解为 $x \leq \frac{1}{2}$.

用区间表示为 $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

(2) 两边同时平方, 得 $(x + \frac{1}{x})^2 \leq 36$,

化简, 得 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 34 \leq 0$,

分解因式得

$$\left[x - (17 + 12\sqrt{2}) \frac{1}{x}\right] \left[x - (17 - 12\sqrt{2}) \frac{1}{x}\right] \leq 0$$

即 $\frac{1}{x^2} [x^2 - (17 + 12\sqrt{2})][x^2 - (17 - 12\sqrt{2})] \leq 0$

$$17 - 12\sqrt{2} \leq x^2 \leq 17 + 12\sqrt{2}$$

$$-3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -3 + 2\sqrt{2} \quad \text{或} \quad 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

用区间表示为 $x \in [-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

(3) 作函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x \in \mathbf{R}$. 则由 $a < b < c$ 知

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{当 } x \in (-\infty, a) \cup (b, c); \\ = 0, & \text{当 } x = a, b, c; \\ > 0, & \text{当 } x \in (a, b) \cup (c, +\infty). \end{cases}$$

因此 $f(x) > 0$, 当且仅当 $x \in (a, b) \cup (c, +\infty)$.

故原不等式的解集为

$$x \in (a, b) \cup (c, +\infty).$$

(4) 该不等式的解为 $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

用区间表示为 $x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

2. **知识点窍** 根据上确界的定义来模仿写出 S 无上界的定义.

解题过程 (1) 设 S 为非空数集, 若对任意的正数 M , 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$, 则称数集 S 无上界.

(2) 设 S 为非空数集, 若对任意的正数 M , 存在 $x_0 \in S$, 使得 $|x_0| > M$, 则称数集 S 无界.

3. **解题过程** (1) 对任何 $x \in \mathbf{R}, y = 2 - x^2 \leq 2$, 任何一个大于 2 的实数都是 S 的上界, 故数集 S 有上界.

(2) 对任意的 $M > 0$, 取 $x_0 = \sqrt{3+M} \in \mathbf{R}$, 存在 $y_0 = 2 - x_0^2 = 2 - 3 - M = -1 - M \in S$ 而 $y_0 < -M$, 因此数集 S 无下界.

4. **知识点窍** 根据上下界的定义去证明.

逻辑推理 根据数集计算出 x 的范围, 确定上下界, 再利用定义证明.

解题过程 (1) $\because x^2 < 2, \therefore -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$\therefore S = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 即上、下确界分别为 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

对 $\forall \epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < \sqrt{2}$.

取 $x_0 = \sqrt{2} - \frac{\epsilon}{2}$, 平方得

$$x_0^2 = 2 + \frac{\epsilon^2}{4} - \sqrt{2}\epsilon < 2.$$

$\therefore x_0 \in S$, 且 $x_0 \geq \sqrt{2} - \epsilon$

$\therefore \sqrt{2}$ 为 S 的上确界.

同理可证得 $-\sqrt{2}$ 为 S 的下确界.

(2) $\because x = n!, n \in \mathbf{N}_+, \therefore S$ 的上、下确界分别为 $+\infty$ 和 1.

对 $\forall M > 0$, 取 $n = [M] + 1 \in \mathbf{N}_+$, 则 $x = n! \geq M$

$\therefore S$ 的上确界为 $+\infty$.

对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ 均有 $x = n! \geq 1$, 且对 $\forall \beta > 1, \exists 1 \in \mathbf{N}_+$ 及 $x_0 = 1! = 1 \in S$,

有 $x_0 < \beta \therefore S$ 的下确界为 1.

(3) 由题意得 S 的上、下确界分别为 1, 0.

设 $\alpha < 1$, 且 $\alpha > 0$, 由无理数稠密性可得 $\exists x_0 \in (0, 1)$.

$\therefore 1$ 是 S 的上确界.

同理可证, 0 是 S 的下确界.

(4) $\sup S = 1, \inf S = \frac{1}{2}$, 下面依定义验证. 对任意的 $x \in S$, 有 $\frac{1}{2} \leq x < 1$, 所以 $1, \frac{1}{2}$ 分别是 S 的