



国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育“十三五”规划教材

微 积 分

Calculus

主 编 马 军 许成锋

副主编 孔祥文



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育“十三五”规划教材

微 积 分

主 编 马 军 许成锋
副主编 孔祥文



本书资源操作说明

北京邮电大学出版社
• 北京 •

内 容 简 介



本书是“互联网+”视角下的创新型立体化教材,借助于 APP 平台提供的微课、交互动画等资源辅助“微积分”课程的教与学。

本书以培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象能力为出发点,并要求会应用理论知识解决相应的实际问题。在编写过程中,我们反复推敲,始终贯彻与高中新课程衔接这一条主线:以函数为研究对象,以极限为基本工具,主要讨论函数的微分和积分问题以及无穷级数、常微分方程及差分方程。

本书内容包括:第 1 章函数的极限与连续;第 2 章导数与微分;第 3 章中值定理与导数的应用;第 4 章不定积分;第 5 章定积分;第 6 章空间解析几何与向量代数;第 7 章多元函数微分学及其应用;第 8 章多元函数积分学;第 9 章无穷级数;第 10 章微分方程与差分方程简介。

本书通俗易懂,例题、思考题、练习题搭配合理,方便学生边学边练巩固知识。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/马军,许成锋主编.——北京:北京邮电大学出版社,2018.8

ISBN 978-7-5635-5506-2

I. ①微… II. ①马… ②许… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 167652 号

书 名	微积分
主 编	马 军 许成锋
责任编辑	沙一飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社 址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010 62282185(发行部) 010-82333009 62283578(传真)
网 址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经 销	各地新华书店
印 刷	北京泽宇印刷有限公司
开 本	787 mm×1 092 mm 1/16
印 张	20
字 数	496 千字
版 次	2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5506-2

定价:49.00 元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有 侵权必究

前言

教材改革作为我国高等学校改革的一项重要内容正在不断深入.本书是“互联网+”视角下的创新型立体化教材,借助于 APP 平台提供的微课、交互动画等资源,促进“微积分”课程的教与学.

针对国家教育部提出的部分高等院校向应用型高校转型,重点培养“地方性、应用型、高素质”人才的精神,本书在“理论够用,适度延展”的前提下,设置内容深度、广度适中,符合新的应用型人才培养方案和教学需求.本书结合当前高中新课程及高等学校微积分教学的现状和教学对象,由多年从事本课程教学、经验丰富的一线教师编写而成.

在编写过程中,我们认真分析研究了高中新课程的相关内容,参照历年来我们使用过的各种教材,结合自己的教学体会,反复推敲,始终贯彻与高中新课程衔接这一条主线:教材以函数为研究对象,以极限为基本工具,主要讨论函数的微分和积分问题以及无穷级数、常微分方程和差分方程,并要求学会应用理论知识解决相应的实际问题.

本书由马军、许成锋担任主编,孔祥文担任副主编.第1章、第8章由许成锋编写,第2章、第3章由孔祥文编写,第4章、第5章由马军、李琦编写,第6章、第7章由杨曲编写,第9章由尹志刚编写,第10章由付香英编写.本书由周金贵教授担任主审.由于编者水平有限,书中难免出现不妥、错漏之处,恳请专家、同行与广大读者提出宝贵意见.

编者
2018年4月

CONTENTS 目录



第1章 函数的极限与连续 /1

§ 1.0 预备知识 /2

- 一、实数 /2
- 二、代数式 /4
- 三、数列 /6

§ 1.1 函数 /7

- 一、函数概念 /7
- 二、具有某种特性的函数 /8
- 三、基本初等函数 /9
- 四、函数运算 /12
- 五、函数构建 /14

§ 1.2 数列的极限 /14

- 一、数列 /14
- 二、数列极限的定性描述 /15
- * 三、数列极限的定量描述 /16
- 四、收敛数列的性质 /18

§ 1.3 函数的极限 /20

- 一、 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限 /20
- 二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限 /21

§ 1.4 无穷小量与无穷大量 /23

- 一、无穷小量 /23
- 二、无穷大量 /24
- 三、无穷小量的阶 /25

§ 1.5 函数极限的性质及运算法则 /26

- 一、极限的性质 /26
- 二、极限运算法则 /26

§ 1.6 两个极限判定准则和两个重要极限 /29

- 一、夹逼准则及重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ /30
- 二、单调有界收敛准则及重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ /32
- 三、复利与贴现 /34
- 四、利用等价无穷小代换求极限 /35

§ 1.7 函数的连续性 /36

- 一、函数的改变量 /36
- 二、函数的连续性 /37
- 三、函数的间断点 /38
- 四、初等函数的连续性 /39
- 五、闭区间上连续函数的性质 /40

第2章 导数与微分 /42

§ 2.1 导数的概念 /43

- 一、引例 /43
- 二、导数的定义 /45
- 三、导数的几何意义 /48
- 四、左导数和右导数 /48

五、可导与连续的关系 /49

§ 2.2 函数的求导法则 /49

一、函数的和、差、积、商的求导法则 /49

二、反函数的求导法 /51

三、复合函数的求导法 /52

四、导数公式 /53

五、综合杂例 /54

§ 2.3 高阶导数 /55

§ 2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 /56

一、隐函数的导数 /56

二、由参数方程所确定的函数的导数 /58

§ 2.5 函数的微分 /60

一、微分的定义 /60

二、微分的几何意义 /62

三、微分法则 /63

四、微分形式的不变性 /64

五、微分的应用 /65

第 3 章 中值定理与导数的应用 /67

§ 3.1 微分中值定理 /68

一、罗尔定理 /68

二、拉格朗日定理 /70

三、柯西定理 /72

§ 3.2 洛必达法则 /73

§ 3.3 函数的增减性 /78

一、问题的提出 /78

二、函数单调增减性的判定 /79

§ 3.4 函数的极值 /81

§ 3.5 最大值与最小值,极值的应用问题 /84

一、最大值与最小值 /84

二、极值的应用问题举例 /86

§ 3.6 曲线的凹向与拐点 /87

§ 3.7 函数图形的作法 /90

一、曲线的渐近线 /90

二、函数图形的作法 /92

§ 3.8 曲率 /94

一、弧微分 /94

二、曲率及其计算公式 /95

三、曲率圆与曲率半径 /98

* § 3.9 变化率及相对变化率在经济中的应用——边际分析与弹性分析介绍 /99

一、函数变化率——边际函数 /99

二、成本 /99

三、收益 /100

四、函数的相对变化率——函数的弹性 /101

五、需求函数与供给函数 /103

六、需求弹性与供给弹性 /104

七、用需求弹性分析总收益(或市场销售总额)的变化 /105

第 4 章 不定积分 /107

§ 4.1 不定积分的概念与性质 /108

一、原函数的概念 /108

二、不定积分 /108

三、基本积分公式 /109

四、不定积分的性质 /109

五、直接积分法 /110

§ 4.2 换元积分法 /111

一、第一类换元积分法(凑微分法) /112

二、第二类换元积分法 /117

§ 4.3 分部积分法 /119

§ 4.4 有理函数的积分 /122

一、有理函数的积分 /122

二、可化为有理函数的积分举例 /124

第5章 定积分 /127

§ 5.1 定积分的概念与性质 /128

一、定积分问题举例 /128

二、定积分的定义 /130

三、定积分的几何意义 /132

四、定积分的性质 /132

§ 5.2 微积分基本公式 /134

一、积分上限的函数及其导数 /134

二、牛顿-莱布尼茨公式 /135

§ 5.3 定积分的换元积分法和分部积分法 /137

一、定积分的换元积分法 /137

二、定积分的分部积分法 /139

§ 5.4 广义积分 /140

一、无穷区间上的广义积分 /140

二、无界函数的广义积分 /142

§ 5.5 定积分的应用 /144

一、定积分的元素法 /144

二、定积分在几何学中的应用 /145

* 三、经济应用举例 /151

* 四、物理应用举例 /152

§ 6.1 空间直角坐标系 /154

一、空间直角坐标系 /154

二、空间两点间的距离 /154

§ 6.2 向量及其线性运算 /155

一、向量的概念 /155

二、向量的线性运算 /156

三、向量的坐标表示 /157

§ 6.3 向量的数量积与向量积 /160

一、向量的数量积 /160

二、向量的向量积 /161

§ 6.4 平面及其方程 /163

一、平面的点法式方程 /163

二、平面的一般方程 /164

三、两平面的夹角 /165

四、点到平面的距离 /166

§ 6.5 空间直线及其方程 /167

一、空间直线的一般方程 /167

二、空间直线的对称式方程与参数方程 /167

三、两直线的夹角 /169

四、直线与平面的夹角 /169

§ 6.6 曲面及其方程 /171

一、曲面方程的概念 /171

二、旋转曲面 /172

三、柱面 /174

四、二次曲面 /174

§ 6.7 空间曲线及其方程 /177

一、空间曲线的一般方程 /177

二、空间曲线的参数方程 /177

三、空间曲线在坐标面上的投影 /178

第7章 多元函数微分学及其应用 /180

第6章 空间解析几何与向量代数 /153

§ 7.1 多元函数的基本概念 /181

- 一、区域 /181
- 二、多元函数的定义 /182
- 三、多元函数的极限 /183
- 四、多元函数的连续性 /184

§ 7.2 偏导数 /185

- 一、偏导数 /185
- 二、高阶偏导数 /187

§ 7.3 全微分及其应用 /188

- 一、全微分的定义 /188
- 二、全微分在近似计算中的应用 /190

§ 7.4 复合函数的微分法与隐函数的微分法 /191

- 一、复合函数的微分法 /191
- 二、全微分形式不变性 /194
- 三、隐函数的微分法 /195

*§ 7.5 微分法在几何上的应用 /196

- 一、空间曲线的切线与法平面 /196
- 二、曲面的切平面与法线 /198

*§ 7.6 方向导数与梯度 /200

- 一、方向导数 /200
- 二、梯度 /202

§ 7.7 二元函数的极值 /204

- 一、二元函数的极值 /204
- 二、条件极值与拉格朗日乘数法 /207

第 8 章 多元函数积分学 /209

§ 8.1 二重积分的概念与性质 /210

- 一、二重积分的概念 /210
- 二、二重积分的性质 /211

§ 8.2 二重积分的计算 /213

- 一、直角坐标系下计算二重积分 /213
- 二、交换二次积分次序的步骤 /216
- 三、利用对称性和奇偶性化简二重积分的计算 /216
- 四、极坐标系下计算二重积分 /217

*§ 8.3 第一类曲线积分 /219

- 一、引例 /219
- 二、第一类曲线积分的定义与性质 /220
- 三、第一类曲线积分的计算 /221

*§ 8.4 第二类曲线积分 /222

- 一、引例 /222
- 二、第二类曲线积分的定义与性质 /223
- 三、第二类曲线积分的计算 /224

*§ 8.5 格林公式及其应用 /226

- 一、格林公式 /226
- 二、平面上曲线积分与路径无关的条件 /227

第 9 章 无穷级数 /230

§ 9.1 常数项级数的概念和性质 /231

- 一、常数项级数的概念 /231
- 二、收敛级数的基本性质 /233

§ 9.2 正项级数的审敛法 /236

- 一、正项级数收敛的基本定理 /236
- 二、比较审敛法 /237
- 三、比值审敛法 /240
- 四、根值审敛法 /241

§ 9.3 任意项级数及其审敛法 /242

- 一、交错级数及其审敛法 /242
- 二、绝对收敛与条件收敛 /244

§ 9.4 幂级数 /247

- 一、函数项级数的概念 /247
- 二、幂级数及其收敛性 /248

三、幂级数的运算 /252

§ 9.5 函数展开成幂级数 /255

一、泰勒(Taylor)中值定理 /255

二、泰勒级数 /257

三、函数展开成幂级数的方法 /260

* § 9.6 函数的幂级数展开式的应用 /265

* § 9.7 傅里叶(Fourier)级数 /268

一、三角函数系的正交性 /268

二、以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数 /269

三、正弦级数与余弦级数 /273

四、以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数 /276

第 10 章 微分方程与差分方程简介 /279

§ 10.1 微分方程的基本概念 /280

一、引例 /280

二、微分方程的定义 /282

三、微分方程的解 /283

§ 10.2 一阶微分方程 /283

一、可分离变量的微分方程 /283

二、齐次微分方程 /285

三、一阶线性微分方程 /287

四、伯努利方程 /288

§ 10.3 可降阶的高阶微分方程 /289

一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程 /290二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 /290三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 /290

§ 10.4 二阶常系数线性微分方程 /291

一、二阶常系数线性齐次微分方程 /291

二、二阶常系数线性非齐次微分方程 /294

* § 10.5 欧拉方程 /297

* § 10.6 差分方程简介 /298

一、差分的概念与性质 /298

二、差分方程的一般概念 /299

三、一阶常系数线性差分方程 /300

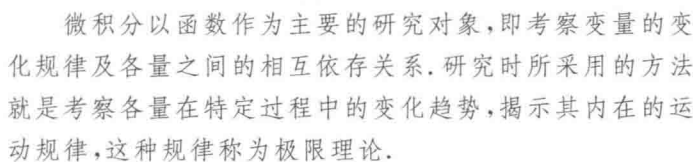
四、二阶常系数线性差分方程 /303

* § 10.7 微分方程与差分方程的简单应用 /307

一、微分方程的应用举例 /307

二、差分方程在经济学中的应用 /309

限与连续

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

§1.0 预备知识

在中学,我们学习过集合、实数和简单的极限以及微积分基础知识,这为进一步学习高等数学奠定了一定的基础.本节将对中学学过的实数、代数式和数列等知识做一些总结和延伸.



一、实数

1. 有理数

人类历史上最先认识的数是自然数 $0, 1, 2, \dots$. 全体自然数的集合叫作自然数集, 记作 $\mathbf{N}$. 随着人类文明的发展, 数的范围也在不断扩展. 自然数集对加法和乘法运算是封闭的, 即两个自然数的和或积仍为自然数. 但是自然数对减法或除法运算不封闭. 人们为使减法运算封闭便引进了负数, 这便从自然数集扩展为整数集, 记作 $\mathbf{Z}$, 其中把正整数集记作 $\mathbf{Z}^+$. 在整数范围内, 加法、减法和乘法运算是封闭的, 但对除法运算不是封闭的, 从而引出了有理数的概念, 这便从整数集扩展为有理数集, 记作 $\mathbf{Q}$.

任意一个有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式, 其中 $p, q \in \mathbf{Z}$, 且 $q \neq 0$. 同整数比较, 有理数具有整数所没有的良好的性质. 例如, 设 $a, b (a < b)$ 是任意给定的两个有理数, 则在 a 与 b 之间至少存在一个有理数 c , 即 $a < c < b$ (如取 $c = \frac{a+b}{2}$ 就可); 类似, 在 a 与 c 之间至少存在一个有理数 d , 即 $a < d < c$. 如此类推, 无论 a 与 b 相差多么小, 总可以在 a 与 b 之间找到无穷多个有理数, 这就是有理数的稠密性, 这是整数所不具备的.

2. 无理数

有理数在数轴上均可以找到唯一的一点和它相对应(该点称为有理点), 所以反映在数轴上, 任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点, 即有理点在数轴上是稠密分布的, 但它并没有铺满整个数轴. 如 $\sqrt{2}$ 在数轴上就找不到一个有理点和它相对应.



例+

例1 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.证明(反证法) 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 令

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} (p, q \text{ 互质}),$$

两边平方得 $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$,

故 p^2 为偶数, 从而 p 必为偶数. 令 $p = 2m$, 则 $p^2 = 4m^2$, 于是,

$$2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2,$$

于是 q^2 为偶数, 从而 q 必为偶数.

综上, q 和 p 都是偶数, 这与 p, q 互质矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

由例1知, 数轴上除了有理点外, 还会留下许多空隙, 同时也说明有理点尽管“很稠密”, 但不具有连续性, 我们把这些空隙处的点称为无理点, 无理点所对应的数叫作无理数. 无理数是无限不循环小数, 如 $\sqrt{2}, e, \pi$, 等等.

3. 无理数 e 和 π

e 是自然对数的底数, 是一个无限不循环小数, 其值是 2.718 28..., 在本章第六节给出了它的具体定义: 数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限为 e , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. 这个数列每一项都是有理数, 但是它的极限却是无理数, 所以高等数学中研究的数域是实数域. 在第9章无穷级数中我们可以得到无理数 e 的表达式:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

其中, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, 表示 1 到 n 的连乘积, 而 $0! = 1$.

π 是一个无理数, 众所周知它是圆周率. 我们都知道圆周率就是圆的周长和同一圆的直径的比, 这个比值是一个常数, 现在通用希腊字母“ π ”来表示. 圆周率是一个永远除不尽的无穷小数, 它不能用分数、有限小数或循环小数完全准确地表示出来. 通过第9章傅里叶级数的学习我们可以得到无理数 π 的表达式为

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

数学大师欧拉给出的欧拉公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 把指数和三角函数有机地联系在一起, 给人统一和谐之美. 当 $x = \pi$ 时, 得到 $e^{i\pi} + 1 = 0$. 这个公式把数学中最重要的五个常数 0、1、 π 、 e 、 i 联系起来, 使“五朵金花”组成了一个瑰丽的花环. 被世人称为科学史上最美的公式, 激励着无数人为了数学华章的更加华美而不懈地探索 and 追求.

4. 实数

有理数和无理数统称为实数. 实数是高等数学研究的数域.

实数与数轴上的点是一一对应的,就是说所有的实数都可以用数轴上的点来表示;反之,数轴上的每一个点都表示一个实数.

数轴上表示数 a 的点离原点的距离就叫作数 a 的绝对值,记作 $|a|$.

绝对值及其运算有如下性质:

$$(1) |x| = \sqrt{x^2}.$$

注意 这一性质在实际计算中经常会遇到,但也是最容易疏忽的,如 $\sqrt{1 - \sin 2x} = |\sin x - \cos x|$,在进一步计算时需要对绝对值内的表达式进行讨论,从而去掉绝对值.

$$(2) -|x| \leq x \leq |x|.$$

(3) 对任意实数 x 及 y ,有

$$|x+y| \leq |x|+|y| \text{ 及 } ||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|.$$

$$(4) x^2 + y^2 \geq 2|xy|.$$

5. 区间

区间是常用的一类数集. 下面四种区间称为有限区间. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$.

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

符号“ $+\infty$ ”与“ $-\infty$ ”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”.

除有限区间外,还有无限区间,例如 $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x | |x| < +\infty\}$.

6. 邻域

对任意正数 δ , 开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 即 $U(a, \delta) = \{x | |x-a| < \delta\}$, 如图 1-1 所示. 其中 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 有时研究某一变化过程中, 不需要特别指明邻域的半径时, 可简记为 $U(a)$. 而集合

$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为去心邻域, 如图 1-2 所示.

在实际中, 有时会用到左邻域与右邻域.

a 点的左邻域: $U_-(a) = \{x | a-\delta < x < a\}$;

a 点的右邻域: $U_+(a) = \{x | a < x < a+\delta\}$.

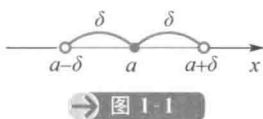


图 1-1

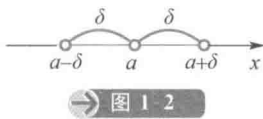


图 1-2



二、代数式

由数和表示数的字母经有限次加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算所得的式子,或含有字母的数学表达式,称为代数式. 在实数范围内,代数式分为有理式和无理式.

有理式包括整式(除数中没有字母的有理式)和分式(除数中有字母且除数不为 0 的有理式). 这种代数式中对于字母只进

行有限次加、减、乘、除和整数次乘方这些运算. 含有字母的根式或字母的非整数次乘方的代数式叫作无理式. 在有理分式分解和无理式有理化时, 下面是常用的一些公式:

$$(1) a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$(2) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(3) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$(4) a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$(5) x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q);$$

$$(6) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(7) (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

例2

将分式 $\frac{1}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1}}$ 分母有理化.

解 分子、分母同乘以 $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}$, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}}{(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}}{3n-1}. \end{aligned}$$

注意 对分子或分母有理化是求解无理式极限的常用方法.

例3

化 $\frac{1}{x(1+x^2)}$ 为部分分式.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\ &= \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)}. \end{aligned}$$

由分子相同得:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=0. \end{cases}$$

故

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$



例4 将有理假分式 $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ 表示成一个多项式和一个真分式的和.

解

$$\begin{array}{r} x^2+0 \cdot x+1 \overline{) x^3+3x^2+2x-1} \\ \underline{x^3+0 \quad +x} \\ 3x^2+x-1 \\ \underline{3x^2+0+3} \\ x-4 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = x + 3 + \frac{x - 4}{x^2 + 1}.$$

注意 例3、例4是有理函数积分常用的方法.



三、数列

1. 数列的概念

按一定的次序排列的一列数,称为数列,如 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, 简记为 $\{a_n\}$, 其中 a_1 称为数列的首项, a_n 称为数列的通项. 实际上数列是项数 n 的函数, 其定义域为正整数集或其子集.



例5 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

例6 $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots;$

例7 $1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots;$

例8 $1, 2, 3, \dots, 30.$

按照数列的项数分, 数列分为有穷数列和无穷数列, 如例8的数列为有穷数列, 而例5、例6、例7中的数列称为无穷数列.

按照项与项之间的大小关系, 数列分为递减数列和递增数列, 两者统称为单调数列. 例5为递减数列, 例7、例8为递增数列.

对于一个数列, 如果每一项的绝对值都小于某个正数, 称为有界数列, 如例5、例6、例8; 否则称为无界数列, 如例7.

2. 等差数列和等比数列

如果一个数列从第二项起, 每一项减去它前一项所得的差等于一个常数, 这个数列就叫作等差数列. 该常数称为公差, 通常用字母 d 表示, 通项 $a_n = a_1 + (n-1)d$. 等差数列的前 n 项和:

$$s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

如果一个数列从第二项起, 每一项和它前一项的比等于一

一个常数,这个数列就叫作等比数列.该常数称为公比,通常用字母 q 表示,通项 $a_n = a_1 q^{n-1}$. 当 $q \neq 1$ 时,等比数列的前 n 项和:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

常见数列前 n 项和公式:

$$(1) 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1);$$

$$(2) 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(3) 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$(4) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

§1.1 函 数



一、函数概念

在生产实践和科学研究中,会碰到各种各样的量,例如温度、时间、路程、重量、体积、速度等.在某个问题的研究过程中,保持不变的量称为常量,可以取不同数值的量称为变量.例如,研究自由落体的运动中,其变化规律为 $s = \frac{1}{2}gt^2$,那么,对同一地点,重力加速度 g 就是常量,而时间 t 和路程 s 都是变量,但 t 和 s 变量并不是孤立地在变,而是按照一定的规律相互联系着,当 t 变时, s 也跟着变,而且 t 值一确定,则 s 也随之而唯一确定,这种变量之间的对应关系就是函数的本质.

定义 1.1 设实数集中有两个变量 x, y , 其中 x 属于非空实数集合 D . 如果存在一个法则 f , 使得对于每个 $x \in D$, 必存在唯一的 y 与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 $D(f)$, 函数全体取值的集合称为 f 的值域, 记作 $Z(f)$, 即

$$Z(f) = \{y | y = f(x), x \in D(f)\}.$$

函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同, 我们称这两个函数是相同的函数.

根据函数的定义, 我们知道, 对于每一个自变量的值都有唯一的函数值与之对应. 反过来, 对于每一个函数值, 不一定只有唯一的自变量的值与之对应, 如思考 1, 当 $y = 1$ 时, 就有 $x = \pm 1$ 与之对应. 但对于 $y = x^3$, 情况有所不同, 在它们的值域中任取

练习 1 函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系.

思考 1 对于函数 $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, 是否可称 x 是 y 的函数(反函数)?



反函数

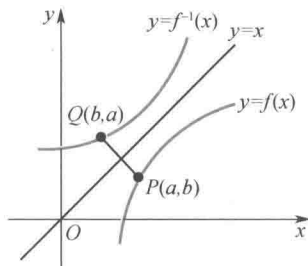


图 1-3

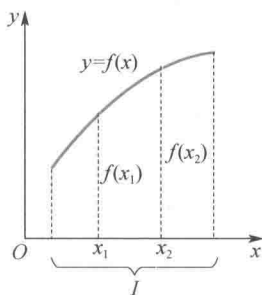


图 1-4

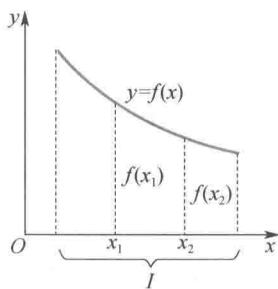


图 1-5

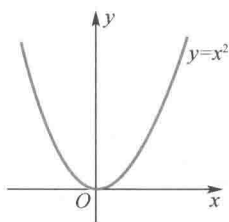


图 1-6

一个数,有唯一的一个自变量值与它对应.这种不同的自变量对应不同函数值的函数称为一一对应的函数.

定义 1.2 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的一一对应函数,值域为 Z ,若对应关系 g 使得对任意的 $y \in Z$,都有唯一的 $x \in D$ 与之对应,且 $f(x) = y$,则称 g 是 f 的反函数,记为 $g = f^{-1}$.

习惯上将自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,因此 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$.所以两个函数 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数,其中任意一个函数的值域就是另一个函数的定义域,而且 $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.

$y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的,如图 1-3 所示.这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点,则有 $b = f(a)$.按反函数的定义,有 $a = f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点.而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y = x$ 对称的.



二、具有某种特性的函数

1. 有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D .如果存在数 k_1 ,使对任一 $x \in D$,有 $f(x) \leq k_1$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界,而称 k_1 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = k_1$ 的下方.

如果存在数 k_2 ,使对任一 $x \in D$,有 $f(x) \geq k_2$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界,而称 k_2 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = k_2$ 的上方.

如果存在正数 M ,使对任一 $x \in X$,有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.有界函数图形特点是,函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

函数 $f(x)$ 无界,就是说对任何 M ,总存在 $x_0 \in X$,使 $|f(x_0)| > M$.

例如,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 内是无上界的,但在 $(1, +\infty)$ 内有界.

2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D .区间 $I \subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-4);如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-5).

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0, +\infty)$