国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普通高等教育“十三五”规划教材

# 微积分

# Calculus

主　编　马　军　许成锋

副主编　孔祥文

“互联网+”创新型教材

北邮智信

北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普通高等教育“十三五”规划教材

# 微 积 分

主 编 马 军 许成锋

副主编 孔祥文

本书资源操作说明

北京邮电大学出版社

· 北京 ·

# 内容简介

本书是“互联网+”视角下的创新型立体化教材. 借助于 APP 平台提供的微课、交互动画等资源辅助“微积分”课程的教与学.

本书以培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象能力为出发点，并要求会应用理论知识解决相应的实际问题. 在编写过程中，我们反复推敲，始终贯彻与高中新课程衔接这一条主线：以函数为研究对象，以极限为基本工具，主要讨论函数的微分和积分问题以及无穷级数、常微分方程及差分方程.

本书内容包括：第 1 章函数的极限与连续；第 2 章导数与微分；第 3 章中值定理与导数的应用；第 4 章不定积分；第 5 章定积分；第 6 章空间解析几何与向量代数；第 7 章多元函数微分学及其应用；第 8 章多元函数积分学；第 9 章无穷级数；第 10 章微分方程与差分方程简介.

本书通俗易懂，例题、思考题、练习题搭配合理，方便学生边学边练巩固知识.

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/马军，许成锋主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2018.8

ISBN 978－7－5635－5506－2

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①马…　②许…　Ⅲ.①微积分—高等学校—教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 167652 号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 微积分 |
| **主　　编** | 马　军　许成锋 |
| **责任编辑** | 沙一飞 |
| **出版发行** | 北京邮电大学出版社 |
| **社　　址** | 北京市海淀区西土城路 10 号(100876) |
| **电话传真** | 010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真) |
| **网　　址** | www.buptpress3.com |
| **电子信箱** | ctrd@buptpress.com |
| **经　　销** | 各地新华书店 |
| **印　　刷** | 北京泽宇印刷有限公司 |
| **开　　本** | 787 mm×1 092 mm　1/16 |
| **印　　张** | 20 |
| **字　　数** | 496 千字 |
| **版　　次** | 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷 |

ISBN 978－7－5635－5506－2　　定价：49.00 元

# 前 言

教材改革作为我国高等学校改革的一项重要内容正在不断深入.本书是“互联网+”视角下的创新型立体化教材,借助于APP平台提供的微课、交互动画等资源,促进“微积分”课程的教与学.

针对国家教育部提出的部分高等院校向应用型高校转型,重点培养“地方性、应用型、高素质”人才的精神,本书在“理论够用,适度延展”的前提下,设置内容深度、广度适中,符合新的应用型人才培养方案和教学需求.本书结合当前高中新课程及高等学校微积分教学的现状和教学对象,由多年从事本课程教学、经验丰富的一线教师编写而成.

在编写过程中,我们认真分析研究了高中新课程的相关内容,参照历年来我们使用过的各种教材,结合自己的教学体会,反复推敲,始终贯彻与高中新课程衔接这一条主线:教材以函数为研究对象,以极限为基本工具,主要讨论函数的微分和积分问题以及无穷级数、常微分方程和差分方程,并要求学会应用理论知识解决相应的实际问题.

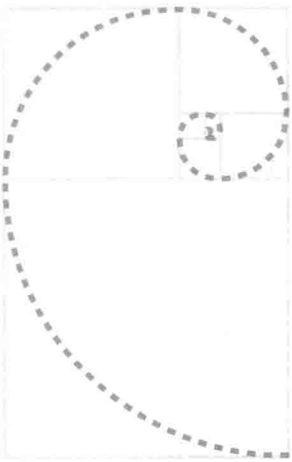
本书由马军、许成锋担任主编,孔祥文担任副主编.第1章、第8章由许成锋编写,第2章、第3章由孔祥文编写,第4章、第5章由马军、李琦编写,第6章、第7章由杨曲编写,第9章由尹志刚编写,第10章由付香英编写.本书由周金贵教授担任主审.由于编者水平有限,书中难免出现不妥、错漏之处,恳请专家、同行与广大读者提出宝贵意见.

编 者

2018年4月

# CONTENTS 目 录

# 第 1 章　函数的极限与连续



微积分以函数作为主要的研究对象,即考察变量的变化规律及各量之间的相互依存关系.研究时所采用的方法就是考察各量在特定过程中的变化趋势,揭示其内在的运动规律,这种规律称为极限理论.

# §1.0 预备知识

在中学,我们学习过集合、实数和简单的极限以及微积分基础知识,这为进一步学习高等数学奠定了一定的基础.本节将对中学学过的实数、代数式和数列等知识做一些总结和延伸.

## 一、实数

### 1.有理数

人类历史上最先认识的数是自然数 $0,1,2,\cdots$. 全体自然数的集合叫作自然数集,记作 $\mathbf{N}$. 随着人类文明的发展,数的范围也在不断扩展. 自然数集对加法和乘法运算是封闭的,即两个自然数的和或积仍为自然数. 但是自然数对减法或除法运算不封闭. 人们为使减法运算封闭便引进了负数,这便从自然数集扩展为整数集,记作 $\mathbf{Z}$,其中把正整数集记作 $\mathbf{Z}^+$. 在整数范围内,加法、减法和乘法运算是封闭的,但对除法运算不是封闭的,从而引出了有理数的概念,这便从整数集扩展为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

任意一个有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式,其中 $p,q \in \mathbf{Z}$,且 $q \neq 0$. 同整数比较,有理数具有整数所没有的良好的性质. 例如,设 $a,b(a<b)$ 是任意给定的两个有理数,则在 $a$ 与 $b$ 之间至少存在一个有理数 $c$,即 $a<c<b$(如取 $c=\frac{a+b}{2}$ 就可);类似,在 $a$ 与 $c$ 之间至少存在一个有理数 $d$,即 $a<d<c$. 如此类推,无论 $a$ 与 $b$ 相差多么小,总可以在 $a$ 与 $b$ 之间找到无穷多个有理数,这就是有理数的**稠密性**,这是整数所不具备的.

### 2.无理数

有理数在数轴上均可以找到唯一的一点和它相对应(该点称为有理点),所以反映在数轴上,任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点,即有理点在数轴上是稠密分布的,但它并没有铺满整个数轴. 如 $\sqrt{2}$ 在数轴上就找不到一个有理点和它相对应.

例

**例 1** 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

**证明**(反证法) 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,令

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}(p、q\text{ 互质}),$$

两边平方得 $2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 2q^2=p^2$，

故 $p^2$ 为偶数，从而 $p$ 必为偶数．令 $p=2m$，则 $p^2=4m^2$，于是，

$$2q^2=4m^2\Rightarrow q^2=2m^2,$$

于是 $q^2$ 为偶数，从而 $q$ 必为偶数．

综上，$q$ 和 $p$ 都是偶数，这与 $p$、$q$ 互质矛盾，故$\sqrt{2}$ 不是有理数．

由例 1 知，数轴上除了有理点外，还会留下许多空隙，同时也说明有理点尽管“很稠密”，但不具有连续性，我们把这些空隙处的点称为无理点，无理点所对应的数叫作无理数．无理数是无限不循环小数，如$\sqrt{2}$，e，π，等等．

3．无理数 e 和 π

e 是自然对数的底数，是一个无限不循环小数，其值是 2.718 28…，在本章第六节给出了它的具体定义：数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限为 e，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$．这个数列每一项都是有理数，但是它的极限却是无理数，所以高等数学中研究的数域是实数域．在第 9 章无穷级数中我们可以得到无理数 e 的表达式：

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots,$$

其中，$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$，表示 1 到 $n$ 的连乘积，而 $0!=1$．

π 是一个无理数，众所周知它是圆周率．我们都知道圆周率就是圆的周长和同一圆的直径的比，这个比值是一个常数，现在通用希腊字母“π”来表示．圆周率是一个永远除不尽的无穷小数，它不能用分数、有限小数或循环小数完全准确地表示出来．通过第 9 章傅里叶级数的学习我们可以得到无理数 π 的表达式为

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

数学大师欧拉给出的欧拉公式：$\mathrm{e}^{xi}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，把指数和三角函数有机地联系在一起，给人统一和谐之美．当 $x=\pi$ 时，得到 $\mathrm{e}^{\pi i}+1=0$．这个公式把数学中最重要的五个常数 0、1、π、e、i 联系起来，使“五朵金花”组成了一个瑰丽的花环．被世人称为科学史上最美的公式，激励着无数人为了数学华章的更加华美而不懈地探索和追求．

4．实数

有理数和无理数统称为实数．实数是高等数学研究的数域．

实数与数轴上的点是一一对应的，就是说所有的实数都可以用数轴上的点来表示；反之，数轴上的每一个点都表示一个实数.

数轴上表示数 $a$ 的点离原点的距离就叫作数 $a$ 的绝对值，记作 $|a|$.

绝对值及其运算有如下性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$.

注意　这一性质在实际计算中经常会遇到，但也是最容易疏忽的，如 $\sqrt{1-\sin 2x} = |\sin x - \cos x|$，在进一步计算时需要对绝对值内的表达式进行讨论，从而去掉绝对值.

(2) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(3) 对任意实数 $x$ 及 $y$，有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \text{ 及 } ||x| - |y|| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|.$$

(4) $x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|$.

5. 区间

区间是常用的一类数集. 下面四种区间称为有限区间. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$.

开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

半开区间 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

符号“$+\infty$”与“$-\infty$”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”. 除有限区间外，还有无限区间，例如 $[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$，$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$，$(-\infty, +\infty) = \{x \mid |x| < +\infty\}$.

6. 邻域

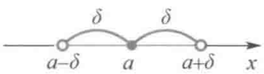



图 1-1

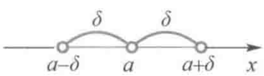



图 1-2

对任意正数 $\delta$，开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 即 $U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$，如图 1-1 所示. 其中 $a$ 称为该邻域的中心，$\delta$ 称为该邻域的半径. 有时研究某一变化过程中，不需要特别指明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$. 而集合 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为去心邻域，如图 1-2 所示.

在实际中，有时会用到左邻域与右邻域.

$a$ 点的左邻域：$U_-(a) = \{x \mid a - \delta < x < a\}$；

$a$ 点的右邻域：$U_+(a) = \{x \mid a < x < a + \delta\}$.

## 二、代数式

由数和表示数的字母经有限次加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算所得的式子，或含有字母的数学表达式，称为代数式. 在实数范围内，代数式分为有理式和无理式.

有理式包括整式（除数中没有字母的有理式）和分式（除数中有字母且除数不为 0 的有理式）. 这种代数式中对于字母只进

行有限次加、减、乘、除和整数次乘方这些运算. 含有字母的根式或字母的非整数次乘方的代数式叫作无理式. 在有理分式分解和无理式有理化时，下面是常用的一些公式：

(1)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2)$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(3)$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(4)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$；

(5)$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$；

(6)$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

(7)$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^k a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$.

例 2 将分式$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}}$分母有理化.

解 分子、分母同乘以$\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}$，得

$$原式=\frac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}{(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}{3n-1}.$$

注意 对分子或分母有理化是求解无理式极限的常用方法.

例 3 化$\dfrac{1}{x(1+x^2)}$为部分分式.

解
$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$
$$=\frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)}$$
$$=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}.$$

由分子相同得：

$$\begin{cases}A+B=0,\\ C=0,\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ C=0.\end{cases}$$

故

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}.$$

例 4　将有理假分式$\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^2+1}$表示成一个多项式和一个真分式的和.

解

$$
\begin{array}{r}
x+3 \\
x^2+0\cdot x+1\overline{\big)\,x^3+3x^2+2x-1} \\
\underline{x^3+0\quad +x\quad\ } \\
3x^2+x-1 \\
\underline{3x^2+0+3} \\
x-4
\end{array}
$$

$$\frac{x^3+3x^2+2x-1}{x^2+1}=x+3+\frac{x-4}{x^2+1}.$$

注意　例 3、例 4 是有理函数积分常用的方法.

## 三、数列

### 1. 数列的概念

按一定的次序排列的一列数，称为数列，如 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1$ 称为数列的首项，$a_n$ 称为数列的通项. 实际上数列是项数 $n$ 的函数，其定义域为正整数集或其子集.

例 5　$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$；

例 6　$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$；

例 7　$1,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$；

例 8　$1,2,3,\cdots,30$.

按照数列的项数分，数列分为有穷数列和无穷数列，如例 8 的数列为有穷数列，而例 5、例 6、例 7 中的数列称为无穷数列.

按照项与项之间的大小关系，数列分为递减数列和递增数列，两者统称为单调数列. 例 5 为递减数列，例 7、例 8 为递增数列.

对于一个数列，如果每一项的绝对值都小于某个正数，称为有界数列，如例 5、例 6、例 8；否则称为无界数列，如例 7.

### 2. 等差数列和等比数列

如果一个数列从第二项起，每一项减去它前一项所得的差等于一个常数，这个数列就叫作等差数列. 该常数称为公差，通常用字母 $d$ 表示，通项 $a_n=a_1+(n-1)d$. 等差数列的前 $n$ 项和：$s_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$.

如果一个数列从第二项起，每一项和它前一项的比等于一

个常数，这个数列就叫作等比数列. 该常数称为公比，通常用字母 $q$ 表示，通项 $a_n = a_1 q^{n-1}$. 当 $q \neq 1$ 时，等比数列的前 $n$ 项和：$s_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

常见数列前 $n$ 项和公式：

(1) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$；

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$；

(4) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = 1-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

# §1.1 函 数

## 一、函数概念

在生产实践和科学研究中，会碰到各种各样的量，例如温度、时间、路程、重量、体积、速度等. 在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量. 例如，研究自由落体的运动中，其变化规律为 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$，那么，对同一地点，重力加速度 $g$ 就是常量，而时间 $t$ 和路程 $s$ 都是变量，但 $t$ 和 $s$ 变量并不是孤立地在变，而是按照一定的规律相互联系着，当 $t$ 变时，$s$ 也跟着变，而且 $t$ 值一确定，则 $s$ 也随之而唯一确定，这种变量之间的对应关系就是函数的本质.

**定义 1.1 设实数集中有两个变量 $x, y$，其中 $x$ 属于非空实数集合 $D$. 如果存在一个法则 $f$，使得对于每个 $x \in D$，必存在唯一的 $y$ 与之对应，则称这个对应法则 $f$ 为定义在集合 $D$ 上的一个函数，记作 $y = f(x)$，其中 $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，$D$ 称为定义域，记作 $D(f)$，函数全体取值的集合称为 $f$ 的值域，记作 $Z(f)$，即**

$$Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}.$$

函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，我们称这两个函数是相同的函数.

根据函数的定义，我们知道，对于每一个自变量的值都有唯一的函数值与之对应. 反过来，对于每一个函数值，不一定只有唯一的自变量的值与之对应，如思考 1，当 $y = 1$ 时，就有 $x = \pm 1$ 与之对应. 但对于 $y = x^3$，情况有所不同，在它们的值域中任取

练习 1　函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系.

思考 1　对于函数 $y = x^2$，$x \in \mathbf{R}$，是否可称 $x$ 是 $y$ 的函数(反函数)?

反函数

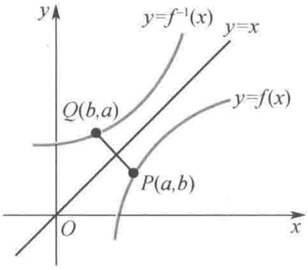



图 1-3

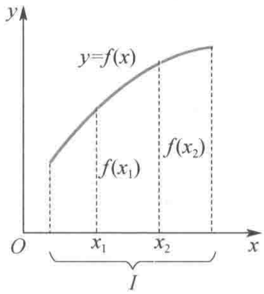



图 1-4

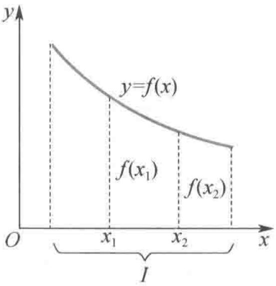



图 1-5

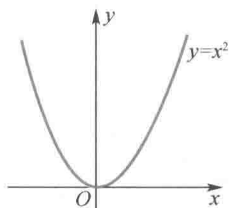



图 1-6

一个数，有唯一的一个自变量值与它对应. 这种不同的自变量对应不同函数值的函数称为一一对应的函数.

**定义 1.2** **设 $f(x)$ 是定义在 $D$ 上的一一对应函数，值域为 $Z$，若对应关系 $g$ 使得对任意的 $y \in Z$，都有唯一的 $x \in D$ 与之对应，且 $f(x) = y$，则称 $g$ 是 $f$ 的反函数，记为 $g = f^{-1}$.**

习惯上将自变量用 $x$ 表示，因变量用 $y$ 表示，因此 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$. 所以两个函数 $y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$ 互为反函数，其中任意一个函数的值域就是另一个函数的定义域，而且 $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.

$y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的，如图 1-3 所示. 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点，则有 $b = f(a)$. 按反函数的定义，有 $a = f^{-1}(b)$，故 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y = x$ 对称的.

## 二、具有某种特性的函数

### 1. 有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$. 如果存在数 $k_1$，使对任一 $x \in D$，有 $f(x) \leqslant k_1$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有上界，而称 $k_1$ 为函数 $f(x)$ 在 $D$ 上的一个上界. 图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = k_1$ 的下方.

如果存在数 $k_2$，使对任一 $x \in D$，有 $f(x) \geqslant k_2$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有下界，而称 $k_2$ 为函数 $f(x)$ 在 $D$ 上的一个下界. 图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = k_2$ 的上方.

如果存在正数 $M$，使对任一 $x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有界；如果这样的 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上无界. 有界函数图形特点是，函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 $M$，总存在 $x_0 \in X$，使 $|f(x_0)| > M$.

例如，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 内是无上界的，但在 $(1, +\infty)$ 内有界.

### 2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$. 区间 $I \subset D$，如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加的（图 1-4）；如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减少的（图 1-5）.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0, +\infty)$