杨 洋 潘秉锁 著

微观力学二阶梯度连续理论及黏聚性材料应变软化研究

WEIGUAN LIXUE ERJIE TIDU
LIANXU LILUN JI NIANJUXING CAILIAO
YINGBIAN RUANHUA YANJIU

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

微观力学二阶梯度连续理论及黏聚性材料应变软化研究

WEIGUAN LIXUE ERJIE TIDU LIANXU LILUN JI NIANJUXING CAILIAO YINGBIAN RUANHUA YANJIU

杨 洋 潘秉锁 著

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

微观力学二阶梯度连续理论及黏聚性材料应变软化研究/杨洋,潘秉锁著.—武汉:中国地质大学出版社,2018.10

ISBN 978-7-5625-4379-4

Ⅰ.①微…

Ⅱ.①杨… ②潘…

Ⅲ.①材料力学-研究

Ⅳ.①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第222048号

微观力学二阶梯度连续理论及黏聚性材料应变软化研究 杨 洋 潘秉锁 **著**

责任编辑:王 敏 徐蕾蕾 选题策划:徐蕾蕾 责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮政编码:430074
电 话:(027)67883511 传 真:67883580 E-mail:cbb@cug.edu.cn
经 销:全国新华书店 http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:138千字 印张:5.5
版次:2018年10月第1版 印次:2018年10月第1次印刷
印刷:武汉市华东印务有限责任公司

ISBN 978-7-5625-4379-4 定价:26.00元

前　言

工程中许多常见的黏聚性材料，如金属、合金、复合材料、岩石、胶凝材料等，都具有明显的应变软化特性。实践表明，应变软化的出现往往是材料或其结构完全失效的先兆，不仅直接影响着碎岩机具的使用寿命，是岩石破碎的重要机理之一，更直接影响着工程结构的稳定性。现场路堤和地基的滑动破坏、隧道和地下建筑结构开挖过程中的岩爆与塌方以及山体运动的褶皱、断层等，所有这些工程问题均与材料的应变软化所造成的损伤破坏密切相关。近年来，随着我国经济的飞速发展以及城市基建规模的日益扩大，能源和矿产资源开发、交通建设、水利水电工程和国防工程的建造呈现出规模巨大、速度快、要求高的特点。应变软化的频繁出现无疑给施工的效率、工程结构的安全性及稳定性带来了一系列挑战。

多年来，材料应变软化问题的研究一直是国内外固体材料力学界广泛关注及富有挑战性的基础课题之一。在工程领域已有不少学者采用了试验方法来研究各种应变软化材料的本构关系及变形破坏过程，为揭示应变软化材料的损伤机理提供了宝贵的第一手资料。然而由于受到人力、物力、财力等因素的制约，试验和现场测试工作往往受到不同程度的限制。随着现代计算机技术及固体力学的发展，力学建模的分析方法为揭示应变软化材料的损伤过程和机理提供了重要手段。近年来，学者们纷纷从宏观角度针对岩石、混凝土等特定材料提出了各种不同的应变软化本构模型及数值计算方法，在很大程度上加深了人们对应变软化问题的认识。然而，现有的模型和计算方法大多未考虑应变软化材料的微观结构特点，故难以深层次地反映材料真实的力学损伤机制；此外，现有的力学理论在求解复杂力学模型时依然存在解的不唯一性、非有效性以及网格依赖性等问题，极大地限制了应变软化数值模型在实际工程中的推广应用。

鉴于此，本专著以均质各向同性的黏聚性应变软化材料为研究对象，从微观力学角度建立了适用于多维空间的张量形式的二阶梯度连续理论模型，结合现代无网格伽辽金数值分析方法建立了完整的数值模型，并编写出了 MATLAB 可视化数值模拟程序。最后还选取了 3 种典型的应变软化计算实例，即错位带和剪切带的演化过程、氮化硅陶瓷复合材料的单轴拉伸破坏以及岩石(花岗岩)的静压入破碎过程，验证和对比分析了所建立的模型的适用性和准确性，对二维空间的应变软化材料变形损伤过程和机理进行了系统研究。

本研究借鉴了微观结构散体力学方法来表征应变软化材料模型，不仅使材料的内长度尺度参数具有实际的物理意义，而且将材料的宏观变形潜在机理与微观结构特点有机地结合起来，使模型能够更加真实地揭示实际材料的变形损伤过程和机理；此外，通过将二阶应力-应变

梯度增强型连续介质理论模型与无网格数值分析方法进行耦合，不仅有效地解决了经典连续介质理论在模拟应变软化问题时的弊端，而且还有望获得更加精确的数值计算结果。

本专著的研究有助于深层次地揭示应变软化材料损伤过程的宏观非线性力学行为本质及其破坏机理，从而为施工工艺的改进、工程结构稳定性及安全性评价、结构优化设计、灾害防治措施制定等提供可靠的理论依据。这对于保障我国能源、矿产资源开发及交通、水利和国防工程建设等的顺利进行具有重要的现实意义。

著　者

2018 年 5 月 10 日

目　录

§1 绪 论

1.1 课题背景

工程中经常遇到的材料，如岩石、复合材料、胶凝材料(如水泥、混凝土)、陶瓷、木材、某些金属以及黏土等，都具有应变软化特性。这些材料在受到各种外载作用下产生变形，当变形超过一定限度后，即材料强度达到峰值后，整个材料结构会出现一个承载能力逐渐丧失的阶段，表现出随着材料变形的增加，应力逐渐减小(Zdeněk et al，1984；Sluys et al，1995；Pichler et al，2007)，即产生所谓的应变软化现象。材料发生应变软化后，软化的部分会逐渐局部化到材料内部的一个狭窄区域，而未产生应变软化的剩余部分则仍然保持原有的线性形变模式并出现弹性卸载现象(Sundara et al，2002)。鉴于应变软化材料应用的广泛性以及应变软化现象的巨大影响，对材料的应变软化失效过程的研究已成为国内外固体材料力学界研究的焦点之一。

在钻探工程领域，现有的研究基本上都是围绕着钻井技术、勘探手段以及生产工艺等宏观工程应用方面展开的，用以指导工艺改进及技术革新的资料大都来源于生产经验或试验研究，很少有学者从基础理论方面对制造碎岩机具的材料(如制造钻头工作层的金刚石金属基复合材料)或钻探工作的主要对象——岩石等进行过微观力学建模研究。因此对钻探工程领域相关材料的应变软化行为进行数值模拟研究显得尤为紧迫和重要，它不仅有助于深层次地揭示用于制作钻头、钻机等钻探机具材料的变形失效机理，从而为钻具设计者提供准确可靠的理论依据，而且可以极大地降低因频繁试验而产生的高额成本。此外，通过从力学方面预测和分析不同地层中各类岩石的破碎过程和机理，有助于合理确定钻进工艺参数，有效地揭示碎岩能耗和碎岩效果间的关系，研制安全、经济、高效的钻探或钻掘机具和器材，制定最佳的钻探施工方案。

掌握材料的应力-应变关系是准确预测材料变形和失效行为的关键，因此在岩土工程领域已有不少学者采用了试验观测的方法来研究材料的本构关系及应变软化(van Mier，1986；van Mier et al，1997；Ferretti，2004；Zhou et al，2004)，其中对于各类混凝土的研究尤为系统完善(吴科如等，1997)。其原因可能是混凝土材料的试样制作工艺简单且成本低廉，许多研究机构都具备测试混凝土材料力学性能的基本仪器设备。然而由于材料的本构关系复杂且严格受试验观测样本微观尺度的潜在机制的影响，试验测试的结果仅仅代表的是试样与测试系统之间的作用行为，也就是说测试的是某一特定试样与试验仪器之间的反应结果，而不能代表材料本身的本构关系(Rosati et al，2001)。一些现有的小尺度试验表明，当非均匀塑性变形的特征长度为微米量级时，许多材料往往会呈现出很强的尺寸效应(陈少华等，2003)，如岩石的压入硬度试验。因此，这种基于宏观统计测试的方法显然存在着一定的局限性，不能客观地表征

一类材料的力学特性，且不符合现代经济的要求。随着现代微观力学理论的发展，它已经被广泛应用于各个领域。实践表明，采用微观力学方法从理论上建立材料的力学模型，并结合计算机模拟材料在各种载荷下的变形失效过程是完全可以取代并且超过传统的试验测试方法的。由于兼顾了力学变形潜在机理及材料的微观结构，微观力学建模的方法有助于更加精确透彻地模拟应变软化材料的应力-应变关系。因此，从微观力学角度对材料的应变软化问题进行建模分析，对于掌握材料的微观结构特点及宏观力学性能，从而准确预测材料的变形失效有着极其重要的理论意义和经济价值。

如上所述，对材料的应变软化行为进行微观力学建模研究，旨在通过掌握材料的力学本构关系、模拟材料在各类外载荷作用下的变形失效过程，从而预测材料的相关力学特性。对于材料力学行为的研究，不仅是钻探领域重要工具材料寿命预测及施工对象（地层岩石等）破碎行为预测的关键，从长远角度更有助于具有广泛应用前景的高级材料，如陶瓷基复合材料的研制开发。

1.2　应变软化问题研究现状及存在的问题

试验研究表明，应变软化并非由材料固有的性能所致，而是由材料内部微观结构性能，如微裂隙、节点、杂质、孔洞和微界面的存在所致（Sandler，1984；Read et al，1984；Valanis，1985；Frantziskonis et al，1987）。其物理学作用机理主要在于分布式损伤的不断扩展，如微裂纹的扩散、微孔洞的形成和连通、微颗粒间黏聚力的消失等。正因为如此，应变软化往往是材料完全断裂失效的先兆（Peerlings et al，1996）。在进行力学分析时若不考虑应变软化，往往会使计算出的结构应力和稳定性系数偏于安全（阎金安等，1990）。从数值计算角度来看，发生应变软化时：①材料的切线模量矩阵会失去正定性；②在动力学问题中，系统平衡偏微分方程会失去固有的双曲性而变为椭圆性（Lasry et al，1988），同时应变波的传播速度会变成虚数；③在静力学问题中，系统平衡偏微分方程则会从固有的椭圆性变成双曲性（Rice，1976；Belytschko et al，1988）。这些无疑改变了控制方程的本质属性，导致一系列病态的系统偏微分方程，使得计算结果失去实际物理意义，极大程度地增加了数值计算的难度（Chen et al，2000）。由于这些原因，传统的基于有限元方法的经典连续介质理论不再适用于求解应变软化问题。尤其在弹性或弹塑性领域求解应变软化问题时，由于不能保证网格充分稳定地复制模拟应变局部化（Bažant et al，1980；Belytschko et al，1986），基于有限元方法建立的连续介质模型通常极不稳定，而且严重依赖单元网格的尺寸及方向（Zdeněk et al，1984；Sandler，1984；Frantziskonis et al，1987；Pietruszczak et al，1981；de Borst et al，1993）。此外，在后期的自适应分析中，随着网格的细化，除了带来不稳定的求解外，还会过低地预测材料的峰值强度，而且当应变软化局部化到单一网格内时，将会导致预测出的断裂能量耗散值为零这样毫无物理意义的求解结果（Bažant，1976；Nemes et al，1996；Bažant，1988）。

因此，要掌握材料的本构关系从而准确预测其变形失效，建立一套既精确又不失物理意义的理论模型来模拟材料的应变软化行为至关重要。近年来，为了避免上述经典连续介质理论模拟应变软化时出现的问题，获得具有良好适定性且独立于离散化单元网格的数值解，国内外计算力学界的专家们对此进行了大量的研究，采用不同方法对经典连续介质理论加以正则化继而产生了各类增强型连续介质理论，总结起来共有以下 4 类。

1.2.1 微极理论

这一理论的出现最早可以追溯到 19 世纪(Voigt,1887,1894),但直到 1909 年 Cossera 兄弟才首次得出有效的求解。他们把材料结构视为相互作用的颗粒组成,这些颗粒间不仅存在相对位移还存在着相对旋转自由度,通过 3 个相互正交的单位向量的刚度旋转来描述。随后 Mindlin & Tiersten(1962)、Toupin(1962)、Koiter(1964)相继提出并发展偶应力理论;Eringen & Suhubi(1964)以及 Eringen(1965)提出了微极理论和微形态理论;Green & Rivlin(1964;Green,1965)提出并发展了多极理论。所有这些都属于广义的微极理论,其抽象的理解是通过独立于位移场的附加场变量来描述固体的运动学特性,并为小尺度的运动学理论提供补充信息。Muhulhaus & Vardolakis 于 1987 年首先将微极理论应用于解决应变软化问题。Chang & Ma(1990)通过考虑微观颗粒间的相对旋转,把颗粒状材料(黏土)模拟为宏观连续统一体,同时兼顾材料微观离散性和颗粒间的接触性能,从而描述了材料宏观角度的机械性能。他们的研究为采用连续介质理论的方法研究离散颗粒状材料建立了基础。de Borst & Sluys 于 1991 年推导用于解决弹塑性力学问题的 Cosserat 模型的计算法则。之后 Sluys(1992)在博士论文中采用微极理论研究解决初值问题中材料的应变软化及应变局部化模拟。针对应变软化模拟中网格尺寸的应用,他系统地研究了发生应变软化时材料内部的应变波传播、局部化以及分散过程。Steinmann(1994)研究了几何学线性微极连续体,提出混合变分法则并讨论了离散化以及应用,从而改善了单元尺度的应变局部化行为。Chang et al(2002)研究了混凝土的断裂模型,采用微观结构力学的方法把混凝土材料假定为由格点网络组成的微观结构体,对比两种情况后,即基于微极理论的微观结构模型和非极性微观结构模型性能差异以及对于网格的依赖性问题,他们的研究表明,在模拟单轴拉伸情况下,两种模型能得出几乎一致的结果,其原因是在第一种失效模式(断裂失效)的情况下,尽管采用了微极理论,但额外的旋转自由度处于未激活状态,因此模型等价于非极性模型;然而当加载途径处于第二种失效模式(包含剪切作用)时,比如在剪切盒试验情况下,两种模型所得的结果截然不同。在考虑微极理论模型时,试样的断裂模式受微观格点网络结构尺寸的影响异常显著。他们还从研究结果中惊奇地发现,能够有效制约求解对于网格尺寸依赖性的重要因素是在模型中引入了微观结构而并非微极理论的应用。这种微观结构的引入可以被视为一种有效避免网格敏感性的正则化技术。应用其预测得到的应变局部化区域比经典破坏模型所得的区域要宽,而且不受网格尺寸的影响。

国内将微极理论应用于应变软化或局部化模拟的研究较少。唐洪祥(2007)提出了一个压力相关弹塑性 Cosserat 连续体模型,推导出了基于压力相关弹塑性 Cosserat 理论本构模型的一致性算法,利用所发展的模型和有限元法数值模拟了由应变软化引起的平面应变问题中的应变局部化现象。胡亚元(2005)利用微极理论,把饱和土中多孔固体骨架部分近似地视为微极介质,孔隙中的流体部分视为质点介质,获得饱和多孔微极介质的弹性波动方程。借鉴 Greetsma 理论,建立了饱和多孔微极介质弹性本构方程力学参数与相应单相介质弹性参数的相互关系,使饱和多孔微极介质弹性波动方程中的物理参数具有明确的物理意义,易于在试验中确定。

微极理论由于引入了附加旋转自由度,无疑极大地增加了数学计算的复杂性和难度。此外,Chang et al(2002)、Muhulhaus & Vardolakis(1987)以及 de Borst & Sluys(1991)的研究

表明,经典的微极理论模型只有当应用于破坏模式Ⅱ(剪切带)时才能显示出网格尺寸的独立性,而在用于模拟破坏模式Ⅰ(错位带)时并无任何优势。

1.2.2 率相关理论

Sandler(1984)和Needleman(1988)认为,无论是自然地或是强制地把应变率引入到经典连续介质力学本构模型中,都相当于是引入一个内长度尺度参数(又称特征长度),由此足以消除有限元方法求解所造成的网格依赖性问题。在初值问题的研究中,Sluys(1992)提出一种适用于混凝土材料的弥散裂缝模型,他把断裂应变率(非总应变率)直接引入到裂纹产生后的本构关系中。结果表明,这种模型不仅能使初值保持良好的适定性,而且在高阶应变率存在的应变局部化区域,局部化的宽度不再依赖于有限元的离散方案,实现了网格离散化的独立性。为进一步验证提出的模型的性能,Sluys计算模拟了一维空间单轴拉伸杆件的应变软化过程,将其与Needlman提出的模型计算结果进行对比。结果表明,尽管他所建立的模型和Needlman的模型都能避免网格依赖性问题,但是后者却不是无条件地具备这种特性的。Needlman的模型只有在应变局部化区域的带宽为已知条件时才能获得不依赖于离散网格的计算结果。Sluys提出的针对混凝土材料的模型尽管具有一定的优势,但是它能否适用于其他材料,比如聚合物型复合材料,还是一个未知数。Nemes & Spéciel(1996)用连续损伤模型模拟了层状聚合物复合材料动态应变软化行为,并对横向各向同性层压板的垂直板面方向的一维波传播进行了数值模拟。在合理的波传播时间范围内,模型显示了网格独立性、求解收敛性以及能量耗散非零性。

国内陈江瑛和王礼立(2000)给出了水泥砂浆损伤演化的率型本构方程,与实验结果吻合良好。李静等(2005)采用应变率相关的混凝土非线性损伤模型以及基于拉格朗日乘子的点点接触直接刚度法,同时进行了混凝土材料非线性以及拱坝横缝接触非线性的高拱坝地震响应分析。研究表明,由于在地震过程中的混凝土非线性软化以及局部损伤开裂的影响,非线性拱坝横缝的开度及分布与采用线弹性混凝土本构关系计算结果有明显的不同,这对于横缝止水的设置具有重要影响。白卫峰等(2006)通过在损伤张量中考虑应变率的影响,提出了应变率相关的混凝土弹塑性损伤模型,用来模拟混凝土材料在动力工况下的力学行为。利用此模型对重力坝进行了地震动超载响应分析,分别从损伤断裂程度和层面抗滑稳定两个方面对坝体进行了安全评价。结果表明,由于地震荷载引起的应变率在坝面的分布不同,坝面各处的动态性能变化不一致,由此引起的混凝土强度和刚度的变化对坝体的动力响应和安全评价有重要影响。

尽管还有不少学者提出了不同的应变率相关模型,在求解各种具体问题或不同材料模型时得到了较为理想的结果,但是当材料不具备十分显著的率相关性(也即黏性)而勉强可以归类于率相关问题时,这种情况即使采用了应变率相关模型,仍然无法避免网格敏感性问题。由此可见,应变率相关模型并不能无条件地保证模型的单元网格独立性。此外,率相关模型不适宜于模拟典型的脆性材料应变软化行为。从物理学角度分析,改变材料的性能是不切实际的,因为尽管率相关模型能够较合理地预测材料的整体反应,但计算出的局部应变和破坏分布明显不符合实际(de Vree et al,1995)。

1.2.3 非局部理论

非局部理论的核心思想是在忽略温度效应的条件下，材料中某一点的应力与其周围一定范围内的加权平均后的应变场分布有关，即应力是由此点的变形及其变形历史决定的，特征长度依赖于权函数(Chen et al,2000)。Kroner(1967)、Eringen(1972)等率先在他们的研究中把非局部概念引入到连续介质理论中。随后，Bažant 等(1984)、Belytschko 等(1986)首次将它作为一种正则化技术应用于材料应变软化模型的不稳定性问题分析。他们采用了一种叠瓦状的单元网格划分求解域，不但解决了在应变软化区域零能量耗散的问题，而且使得求解值迅速收敛到问题的真实值。然而，由于所有的状态变量都是非局部变量，需要给定额外的边界条件以及内部界面条件，系统平衡偏微分方程不再以标准形式出现。为了避免周期性的零能量消耗模式，必须采用叠瓦状的单元网格才能应用有限元求解，这些都使得求解过程异常复杂，根本无法将模型应用于大尺度、多维问题的求解。Pijaudier-Cabot & Bažant(1987)在此基础上提出了一个新的局部化损伤模型。他们认为，仅仅把应变软化损伤区域考虑为非局部区域，而其他弹性行为(包括卸载和重新加载)仍然可以被视为局部的。这种局部与非局部混合的模型不再需要叠瓦式的单元网格，很大程度上简化了之前的完全非局部化模型。Bažant 与其合作者们(Bažant et al,1987;Bažant et al,1988;Bažant et al,1988;Bažant & Ozbolt,1990)随后又相继进行了各种不同形式的非局部模型的研究。这些模型所采用的核心思想极其相似。Bažant(1987)在均匀化准周期性微裂纹数组的基础上给出了这种非局部化模型的物理调整。Pisano & Fuschi(2003)采用了通过本构关系体现非局部特点的 Eringen 模型，分析求解了一维空间简单的非局部弹性力学问题。他们在积分型的非局部本构关系中引入了一个衰减函数，目的是捕捉非局部效果的扩散过程。通过求解第二类 Volterra 积分方程得到了应变的封闭解。

在塑性力学领域，Schreyer & Chen(1986)介绍了一种非局部本构关系用以模拟伴随局部化的应变软化过程。本构关系中的极限应力是应变和应变梯度的函数。最后应用一维空间的计算实例对模型进行了验证。Stromberg & Ristinmaa(1996)介绍了一种应用于热力学问题的非局部塑性理论，建立了非关联塑性力学模型。屈服函数中所引入的积分型非局部场变量是根据热力学力定义的，而其他地方的场变量则定义为局部变量。与梯度模型不同的是，该非局部塑性理论模型的相容性条件是一个积分方程而非微分方程。通过研究，他们认为所提出的非局部塑性理论达到了预期的效果，不仅解决了网格细化带来的零能量消耗的问题，而且能够得到独立于有限元离散网格的合理的应变局部化区域。为保持变形过程中波函数的双曲率性，Valanis(1991)开发了全局性(非局部)损伤理论并引入了一套破坏坐标系，这套坐标系是应变场的空间泛函。通过推导细杆件中的轴向波函数，Valanis 发现当杆件经历应变软化时波速等价于割线模量，同时波函数维持其双曲率性。此外，他还分析研究了其他现象，比如均匀变形过程中出现非均匀损坏，以及拉伸状态下轴向试样的损伤破坏总是趋向于发生在中心区域。Murakami 等(1993)在原有的有限元波程序的基础上加入了一个计算本构关系的子程序，将 Valanis 的模型应用于求解初值问题，由此验证了模型的收敛性和网格的独立性。de Vree et al(1995)分别对比了局部连续损伤模型和两种不同的非局部损伤模型在模拟宏观脆性材料结构失效行为时的性能，数值计算采用的依然是有限元方法。结果表明，局部模型方法受网格尺寸及方向的影响极其严重，而另外两种不同的非局部模型求解方案在网格细化后

仍然能得到收敛的解。

国内不少学者利用非局部理论对裂纹扩展方面的相关问题进行了研究，而对于应变软化问题的模拟研究甚少。姚玲和王铎(1994)采用非局部弹性理论研究了三维圆盘状Ⅰ型裂纹问题，给出了轴对称问题的影响函数，推导出了圆盘状Ⅰ型裂纹非局部理论解的对偶积分方程，对具有无界核积分方程的求解问题提出了一种有效的解决方法，使无界核问题转化为有界核问题，给出了圆盘状Ⅰ型裂纹问题裂纹尖端应力场的数值解。结果表明，非局部理论消除了他们研究的三维问题裂纹尖端应力场的奇异性。宋显辉和江冰(1996)利用非局部弹性理论和最大拉应力准则推导了陶瓷材料Ⅰ、Ⅱ型裂纹平面应变断裂韧度的理论计算公式。该公式仅与材料参数有关，而与裂纹的几何形状无关，它将材料的宏观力学性能与微观结构参数联系起来。此外，他们还通过实验得出了断裂动度的理论值是测试值的下限。王忠昶等(2006)比较了不同权函数的性质与影响域及其随内部长度尺度参数变化的规律，采用了含不同权函数的非局部理论分析了Ⅰ—Ⅱ型裂纹尖端的应变场。

尽管以上3种不同的理论分别通过各种方式都对求解误差函数采取了一定的补救措施，使得计算结果都表现出了不同程度的网格独立性，然而这些理论都需要预先给定具体的内部长度尺度参数，而这一长度尺度参数通常是缺乏合理的选择依据的。另外，加权平均的过程往往会带来局部变量和非局部变量的不相容性。例如，对局部应变和非局部应变不平衡的预测会导致应力值的震荡波动。此外，当待求解的问题空间形状复杂时，在模型的边界附近常常会出现各种理论和实际的问题。要想实现一致的数值求解过程，常常需要大幅度地调整之前的计算机程序，而这种改变所带来的不一致的正切矩阵又会严重破坏计算程序的收敛性(Peerlings et al,1996;de Vree et al,1995;Pijaudier - Cabot et al,1991)。

1.2.4 高阶理论

高阶理论的基本思想是将场变量对于空间坐标系的高阶导数(一般是高阶应变导数和高阶应力导数)以某种特定方式引入到系统平衡方程中。与前面介绍的3种正则化理论相比，高阶理论既不似微极理论般需要引入额外的旋转自由度，又不像率相关理论那样需要在模型中增加时间效应，而且不受固体材料内未知缺陷区的影响(Triantafyllidis et al,1993)。尽管高阶理论模型跟非局部模型有诸多联系和相似点，但从数学意义上讲，高阶理论具有严格的局部性优势(Peerlings et al,1996)，而且它还避免了经典非局部理论中卷积积分的影响函数的高难度求解问题。高阶理论正是因为具备了这些其他理论无可匹敌的优势而成为了目前模拟应变软化问题的理想选择。根据引入的高阶导数项的不同，可以将高阶理论模型分为以下两类：

(1)高阶应变理论。在这种理论模型中，系统平衡方程中只含有柯西应力项，而没有高阶应力导数项。柯西应力由对应的柯西应变和高阶应变导数共同决定。高阶应变项一般有两种引入方式：①通过在势能泛函中引入高阶应变导数。如文献(Triantafyllidis et al,1993;Triantafyllidis et al,1986)在超弹性材料问题中通过将一个二阶变形梯度项引入到应变势能密度方程中，使系统平衡偏微分方程始终能够保持其椭圆性，有效解决了边值问题中在变形局部化后的阶段由于控制方程失去椭圆性而无法得到具有物理意义解的问题；②直接把高阶应变导数引入到本构关系中。如Lasry & Belytschko(1988)在应变表达式中加入二阶导数项，使得模型不依赖于网格的细化，在任意细化的网格内都得到了非零的能量耗散值。他们还分别对一维空间杆件的波传播问题及三维空间球对称材料的应变软化进行分析。de Borst

(1992)着重讨论了塑性力学中高阶理论模型解决应变软化局部化的推导和计算法则。Sluys(1992)利用高阶应变理论系统研究了应变软化固体材料中的波传播、局部化以及分散问题。Pamin(1994)研究了塑性力学问题中高阶应变理论模拟应变局部化现象。de Borst et al(1995)回顾了应用梯度增强型破坏模型模拟塑性问题中准脆性材料和摩擦材料的应变软化现象。为了进行大型有限元模拟,分别给出梯度增强破坏模型以及梯度增强塑性模型的计算法则,并对后者进行了离差分析。Peerlings et al(1996)随后又深入研究了准脆性材料的破坏模型。从非局部理论出发推导出高阶应变理论损伤模型,在材料本构关系中引入高阶应变梯度,对一维空间的杆件拉伸问题进行计算模拟,验证了模型的网格独立性问题。

以上分析表明,无论通过什么方式获得的高阶应变理论模型,均能维持控制方程固有的椭圆率,从而获得具有实际物理意义且独立于离散网格的计算结果。此外,这类模型与经典连续介质理论模型的系统平衡方程基本上一致,因此只需对经典连续模型稍作修改就能获得高阶应变理论模型的运算法则。然而,这类模型也存在着固有的缺点,比如势能泛函的定义存在着歧义性,无法保证离散化后的切线刚度矩阵的正定性,以致有时会出现负的势能值(de Borst et al,1995)。

(2)高阶应力-应变理论。与第一类高阶应变理论相比,高阶应力-应变理论模型更加严谨。其原因是在高阶应力-应变理论中,除了柯西应力外,高阶应变和高阶应力项被同时引入到系统平衡方程中。引入的高阶应力项能够起到平衡应变软化发生时出现的非正定的切线模量矩阵的作用,从而保证了正的势能值。然而高阶应力的引入使得原本已较为复杂的高阶理论模型变得更加复杂。到目前为止,国内只有极少数人进行过相关方面的简单研究,赵扬锋和潘一山(2006)采用各向同性应变梯度损伤模型,在平衡方程中引入高阶应力项和损伤内变量,对单轴压缩作用下岩石变形局部化带的宽度进行了研究,得到单轴压缩作用下岩石变形局部化带宽的一维解析解。国外也极少有学者对高阶应力-应变理论模型进行过系统的推导和研究。Chang et al(2002)从势能方程的稳定性、应变波传播的波长实值性方面对两类高阶理论进行了对比分析,证实第二类高阶应力-应变理论可以无条件地维持求解的稳定性,并且能够获得实数值的波长,能够准确地模拟一维空间含缺陷区的杆件的应变软化局部化现象。研究结果显示,高阶应力-应变理论可以避免高阶应变理论所存在的各种问题,是一种模拟材料应变软化局部化问题的理想选择。

以上两种类型的高阶理论都没有考虑材料的微观结构影响,因此,控制方程中高阶导数项的系数矩阵难以识别而且没有明确的物理意义,更无法反应不同材料的微观结构特点。文献(Triantafyllidis et al,1986)建议对与高阶导数项相关的边界条件进行深入研究,将局部化区域尺寸与材料微观结构力学性能联系起来,如颗粒尺寸、微裂纹以及其他微观结构性能等,从而给出高阶项系数合理的物理学解释。因此,文献(Chang et al,1995;Muhulhaus & Oka,1996;Liao et al,1997;Suiker et al,2001)在高阶理论模型中同时采用了微观结构散体力学方法。采用这种方法时,通过泰勒级数展开式将离散系统的控制方程均质化从而得出连续体的控制方程。由此一来,引入的任一高阶导数项便直接与材料微观结构性能产生了联系,这无疑简化了高阶导数项系数的区分与辨识。到目前为止,将微观结构分析方法应用到高阶理论模型的研究大多局限于高阶应变理论模型。如 Triantafyllidis & Bardenhagen(1993)从材料微观角度出发,假定模型具有离散的周期性非线弹性结构,由此在推导出的宏观尺度的连续体模型中二阶位移梯度项被引入到了应变能密度函数中。他们通过研究从微观离散结构到宏观连

续体模型的过程，推导对比了两种不同宏观材料的边值问题。此外，还研究了稳定性问题以及材料中缺陷部分对求解结果的影响。在高阶应力-应变理论模型中的应用仅见于 Chang et al (2002)的基于一维空间的研究中。

1.3　无网格伽辽金法在高阶理论中的应用现状

有限元方法作为 20 世纪 50 年代发展并逐渐成熟起来的一种功能强大的分析模拟技术，已被广泛应用于工程领域解决材料或结构中的各种复杂线性或非线性问题。然而，有限元法却存在许多固有的缺点，极大地限制了它的应用。比如许多有限元的商业软件无法准确地预测应力。有限元方法计算的应力在单元网格的界面处往往是不连续的，其根源在于有限元计算方法假定的位移场从本质上就是分段连续的。为了获得精确的计算应力值，往往需要采用特殊技术，如采用超收敛点或补丁进行后处理。在模拟特大变形过程中，有限元网格的严重扭曲或受压变形不仅需要网格重构而且还使得计算精度受到极大影响。有限元方法对于动态裂纹扩展以及相变的模拟也存在很大困难，裂纹的扩展和相变方向不能事先确定，使得求解问题的不连续性与原始单元网格的界面不匹配，因此在计算过程中需要不断地重新划分网格。此外，由于有限元法是基于连续介质力学理论的，单元网格之间要么保持一个整体不分开，要么完全消失，因此在模拟大量不连续碎片组成的材料问题时，总是会出现严重的错误。

为了解决以上这些问题，许多学者相继进行了自适应分析研究，即在计算模拟问题的每一步对求解区域重新划分单元网格。这在一定程度上可以阻止网格的严重扭曲，使在问题演化的过程中网格线与出现的任意不连续性随时保持一致。目前国内外已有少数虽复杂但通用性较好的网格生成程序，然而由于自适应分析要求在每一个连续的分析阶段将场变量在网格之间进行一次投影，这一投影过程无疑增加了额外的计算强度并且导致了一些逻辑问题甚至计算精度的下降。尽管近年来商用的有限元前后处理软件得到了长足发展，但对于大型复杂的三维问题，有限元网格自动生成仍然是极具挑战性的任务，而且网格的连续重构细化还会极大地增加计算成本。此外，其他一些基于网格的数值方法，如有限差分法、边界元法等也或多或少地存在上述问题。

从以上分析不难看出，造成上述这些问题的根源是单元网格的使用。为了避免必须利用单元网格来离散化求解域的弊端，许多科学工作者致力于研究新的数值方法，于是在 20 世纪 70 年代无网格的方法应运而生。与传统的有限元方法截然不同的是，无网格方法仅需要一系列离散分布的场节点来离散问题域和边界，这些节点可以是随机地也可以是有规律地分布的，而且点与点之间不需要具备任何预知关系。除此以外，无网格方法和有限元方法中形函数的建立也是截然不同的。有限元方法采用预设的元素来构造形函数，且每个元素的形函数都是相同的。无网格方法的形函数则是对当前研究的某一节点基于特定的局部区域通过插值建立的，插值选取的局部区域不同，节点与节点的形函数也因此会不同。表 1-1 从不同方面对比了有限元方法和无网格方法。

从以上对比可以看出，无网格方法不仅可以获得高于有限元的计算精度，而且其自适应分析过程也明显胜过有限元方法，比如无网格方法在未知场变量高度非线性的地方，只需灵活地增加场节点数量从而减小计算难度。这些优势使得无网格方法成为求解复杂的三维问题、线性和非线性应力分析、含有动态边界或不连续性问题（比如相变或裂纹扩展）的理想选择。

表 1-1 有限元方法与无网格方法对比

项目	有限元方法	无网格方法
离散网格	需要	不需要
形函数构造	基于预设元素	基于局部支撑域
离散的系统刚度矩阵	带状、对称	带状,对称性视具体方法而定
边界条件施加	简单、标准	需特殊处理,视具体方法而定
计算速度	快	比有限元慢
精度	比有限差分法精确	比有限元法精确
自适应分析	较困难	较简单
发展阶段	成熟	早期,尚存在问题
可用商业软件	多,且成熟	个别,且不成熟

无网格方法的种类很多,关于各种无网格方法的产生及发展,国外的 Belytschko et al (1996)及国内学者(张熊等,2009;曹小青等,2009)均进行过系统总结,在此不再赘述。在诸多的无网格方法中,极具代表性的一种是无网格伽辽金法(Element - free Galerkin,简称 EFG)。无网格伽辽金法的前身是由 Nayroles et al(1992)提出的扩散元法(Diffuse Element Method),Belytschko et al(1994)对扩散元法进行改进提出了无网格伽辽金法。作为有限元方法及边界元法的理想替代,无网格伽辽金法除了具有其他无网格方法的共同优点外,还具有以下特性:

(1)离散后的系统刚度矩阵是稀疏、带状、对称的,且具有小的条件数。

(2)因变量及其梯度在整个问题域都是连续的,无需任何后处理过程即可获得平滑的梯度场。

(3)对于各向异性材料具有良好的适用性。

(4)在计算静力学椭圆性问题时能够获得高度精确的求解。

(5)在断裂力学问题中,无需网格重构便能够准确地计算应力强度因子并捕捉应力奇异性,且自适应分析过程简单。

(6)由于无需格林方程,因此在应用于求解非线性及其他含复杂本构关系问题方面具有简单的优势。

(7)适用于求解大变形问题,并易于扩展用于圆柱壳体问题。

鉴于无网格伽辽金法的诸多优势,近年来已被国内外的研究者们广泛应用于求解固体力学领域中。Belytschko et al(1995,1996)成功利用无网格伽辽金法模拟二维空间静态裂纹产生及动态裂纹的扩展问题。Krysl & Belytschko(1997,1999)分析研究了三维空间动态裂纹扩展问题,通过使用无网格伽辽金法避免了裂纹生长过程中的网格重构。Sukumar et al (1997)通过在裂纹生长区域使用无网格伽辽金法和在其他区域使用有限元方法,研究了三维空间的平面断裂问题。王雪(2008)利用无网格伽辽金法研究了二维线弹性断裂力学问题,成功求解单边裂纹有限板和单边斜裂纹有限板的位移场和应力场,其结果与有限元方法的计算结果吻合良好。Cheng & Ge(2009)利用无网格伽辽金法求解二维空间的两种线性双曲方程问题,获得了与精确解完全吻合的结果。Li & Belytschko(2001)则利用无网格伽辽金法计算大变形中的接触-碰撞问题。此外,他们还利用无网格伽辽金法模拟含大扭曲变形的金属挤

压、滚动成形过程，结果表明，无网格伽辽金法可以分析计算的大变形问题远远超过拉格朗日有限元方法所能计算的范围。周晖和李勇(2009)利用无网格伽辽金法求解二维土体沉降问题，获得了与有限元法吻合较好的计算结果。此外，还有许多的研究者对无网格伽辽金法进行了其他方面问题的研究，如寇明龙(2007)就无网格伽辽金法中的不连续问题进行了较系统的研究。

然而到目前为止，很少有学者将无网格伽辽金法应用于求解基于高阶理论的应变软化问题。相关的研究包括：Askes et al(2000)将无网格伽辽金法应用于高阶梯度损伤模型，计算了一维空间受单轴拉伸的杆件因几何缺陷而导致的应变局部化问题，研究了模型对无网格伽辽金离散方案的独立性问题。此外，Chang et al(2002)在对比两种高阶理论时也采用了无网格伽辽金法求解。Pamin et al(2003)利用无网格伽辽金法分别研究了应力空间梯度塑性理论及应变空间梯度塑性理论。通过一维受拉杆件及二维空间双轴压缩的薄板算例研究了无网格伽辽金法的离散方案的敏感性问题。Jirásek(1998)对无网格伽辽金法在应变软化问题中的适用性进行了研究，结果证实在描述连续场时，对于正则化的局部化问题无网格伽辽金法具有显著优势。以上这些研究均表明，就梯度增强型连续介质理论而言，无网格伽辽金法具有一项远胜于有限元方法的优势，即无需增加求解问题的尺寸维数，无网格伽辽金法中形函数自身的高阶连续性便足以满足梯度增强理论中的高阶导数项对于连续性的要求。

1.4 课题研究目的、研究内容及意义

从以上的分析可以看出，无论从理论方面还是应用方面，对于高阶应力-应变理论的研究都很薄弱。目前国内的相关研究只是获得了一维空间的局部化带宽的解析解，并未进行过任何数值模拟计算，更未考虑材料的微观结构影响；国外现有的研究也仅局限于一维空间离散背景下的颗粒材料的应变软化模拟，而且缺乏在应用方面的研究。因此，为深入挖掘该理论在复杂连续体材料方面的应用潜力，很有必要建立适用于多维空间的高阶应力-应变理论模型，并从综合性能和应用方面对其进行更加系统的研究。本专著的研究目的是建立适用于模拟多维空间材料应变软化损伤过程的基于无网格伽辽金法的高阶应力-应变理论模型，以解决当前基于有限元方法的经典连续介质理论在模拟应变软化问题时存在的严重的网格依赖性、零能量耗散以及求解不稳定性等因素。

本专著以高阶应力-应变理论模型的推导为主，以数值算例验证为辅，并以解决实际问题为目标。归纳起来，本专著主要进行了以下几个方面的理论研究：①高阶应力-应变理论的本构关系研究，借鉴微观结构散体力学方法将宏观连续体与微观离散结构联系起来；②高阶应力-应变理论模型的建立，研究包括强形式和弱形式系统平衡方程的推导、无网格伽辽金法的离散化过程、本质边界条件的施加以及 MATLAB 计算程序的编写；③模型的算例验证和具体应用研究。针对引起材料断裂或破碎失效的错位带及剪切带这两类主要的应变软化模式，采用不同的计算实例分别研究模型的求解合理性和稳定性；采用不同的节点离散方案研究模型对于节点间距和分布的敏感性；采用不同的内长度尺度参数研究了其对于局部化带宽度的影响。此外，还采用含微观结构缺陷的氮化硅陶瓷作为人造岩石，系统研究模型在用于模拟岩石类材料破碎过程时的适用性。最后将模型应用于钻探领域中的岩石压入破碎过程的模拟。为了更直观，图 1-1 给出了本专著的研究技术路线。