高等师范院校数学教育类课程教学参考书

高考数学研究方法

赵思林 著

科学出版社

高等师范院校数学教育类课程教学参考书

高考数学研究方法

赵思林 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书主要介绍高考数学研究方法，对高考数学中几个重点专题（函数、三角与向量、数列、不等式、排列组合、导数、概率与统计、立体几何、解析几何等）进行探讨。

本书可作为高等师范院校本科生、硕士研究生、高中数学教师、高中生、数学爱好者的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学研究方法 / 赵思林著. — 北京：科学出版社，2018.9
高等师范院校数学教育类课程教学参考书
ISBN 978-7-03-058737-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①中学数学课-教学研究-高中
Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 204228 号

责任编辑：冯 铂/ 责任校对：韩雨舟
封面设计：墨创文化 / 责任印制：罗 科

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 9 月第一次印刷 印张：13
字数：308 千字

定价：59.00 元

前　　言

“研究”是指用科学的方法探求事物的本质和规律。“高考数学研究”是指用系统科学的方法探求高考数学的本质和规律的过程。高考的本质是选拔有培养潜质的人才，著名高校如“双一流”大学、“985”大学等选拔的是有培养潜质的创新型人才。数学是充满创造和发现的一门科学。一般而言，数学中的很多基本概念，如集合、函数、映射、对数、向量、极限、导数、微分、积分、矩阵、变换、概率、群、环、域、格、拓扑、泛函以及公理系统等，都是通过数学家的长期思考和研究创造出来的；有了基本概念和公理系统后，数学家用推理的方法就可以发现数学命题(包括公式、定理、性质、法则、推论、引理等)。数学命题的正确性需要进行严格的数学证明。高考数学肩负测试并选拔创新型人才的任务。因此，高考数学必然会出现一批创新型试题，这些创新型试题理所当然是研究的重要内容。

研究是从多种不同角度看待问题、分析问题、探究问题和解决问题的过程。对高考数学的研究，既需要横向的多角度研究，又需要纵向的多层次研究；既需要着眼于宏观层面的研究，如命题理念和命题原则的研究，又需要着眼于微观层面的研究，如一道题的研究。

高考数学研究内容包括研究高考数学命题的理念、原则与规律，高考数学的解题方法，数学思想方法的应用，高考数学问题的推广与深化，高考数学试题的分析、评价、欣赏，高考数学试题的创作与改编，高考试题的研究性学习，应考对策，答题技巧等。本书探讨了高考数学命题的原则，并偏重于对高考数学试题的分析、解答、评价、推广、研究性学习等方面进行研究。

本书的主要内容包括高考数学研究方法，高考数学的重点专题、疑难专题和热点专题。

本书在撰写过程中力求体现如下特点：

(1)介绍高考数学研究方法。多角度、多层次地解读高考、分析高考、研究高考。

(2)强调实用性。书中的不少内容可以直接或稍微改动后搬进课堂，并对高中一线教师和高中学生的教学具有较好的效果。

(3)突出重点专题的研究。对函数、三角与向量、不等式、数列、排列组合、导数、概率与统计、立体几何、解析几何等内容作了探讨。这些专题属于高考数学的主干内容和疑难课题。

(4)关注高考热点问题。对近年高考中出现的热点问题，如“立德树人”“核心素养”“多想少算”“数学文化”等给予了关注与研究。

(5)倡导高考数学教学引入研究性学习。选取了几个研究性学习案例。

(6)重视解题中的思路发现。思路发现是数学问题解决的关键性任务，数学问题解决

简称为数学解题。教会学生发现解题思路是布鲁纳倡导的发现教学法在数学解题教学中的体现与应用。数学解题的思路发现一般需要扎实的知识、娴熟的方法、丰富的经验、深刻的思想(一些难题往往含有高等数学思想)，需要原型的联想、大胆的猜想，还需要试算与估计、创意与灵感等。对一些高考压轴题给出了较详细的思路发现过程。

(7)每节内容具有相对的独立性。很多内容保留了论文的规范格式，但都省去了摘要和关键词，为读者撰写高考数学研究论文提供了一些案例。本书中发表的论文绝大多数是在赵思林教授指导下完成的，赵思林系这些论文的通信作者即视为第一作者。

(8)对多数题目都给了点评或评注或评析。其目的是培养高考研究者的高级认知能力。

(9)对比较难的内容打上了*号，初学者可以忽略它。

(10)吸收了《数学教育学报》《高中数学教与学》《数学通报》《教学与管理》《中国数学教育》《中学数学》《内江师范学院学报》《中学数学教学参考》《数学通讯》《中学数学杂志》《数学教学通讯》《上海中学数学》等期刊的一些最新研究成果。

为本书出版提供有力支持和资助的内江师范学院数学与信息科学学院、科技与学科建设处、学校教务处，教育部“本科教学工程”四川省地方属高校本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学“专业综合改革试点”项目(ZG0464)，四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001)，内江师范学院2016年度校级学科建设特色培育项目(T160009，T160010，T160011)，内江师范学院教材出版基金等；为本书出版付出辛勤劳动的科学出版社的编辑们；为本书出版提供热情帮助的讲师刘成龙、讲师余小芬，著作者的研究生徐小琴、李秀萍、王佩、李雪梅、崔静静、胡生兵等，著者指导的本科学生黄成世、王先义、李雪莲、吴佳、薛世林、彭玉灵、陈香君、许静、钟梦圆、罗斯渝、罗东等；对赵思林数学思练工作室专家裴光亚先生等，致以衷心的谢意，同时也深深感谢关心、支持本书出版的所有同行和朋友们。限于水平和时间，本书难免存在一些不足之处，敬请广大读者批评指正。

著　者

2018年7月

目　录

第一章　命题原则与研究视角

“研究”是指用科学的方法探求事物的本质和规律．因此，高考数学研究是指用系统科学的方法探求高考数学的本质和规律的过程．高考数学研究内容非常广泛，本章侧重于对高考数学命题理念、命题原则等宏观层面的研究．

第一节　高考数学命题原则

教育部考试中心在《2009 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明(理科)》中用了 10 页对高考数学命题原则作了说明[1]．

强化主干知识，从学科整体意义上设计试题．高中数学的主干知识包括函数、数列、三角、向量、不等式、导数、概率与统计、立体几何、解析几何等．

淡化特殊技巧，强调数学思想方法．数学思想是对数学知识的本质认识，也是对数学规律的理性认识，是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点．它在认识活动中被反复运用，带有普遍的指导意义，是建立数学和用数学解决问题的指导思想，包含化归思想、分类思想、模型思想、极限思想、统计思想、最优化思想等．而数学方法则是指从数学角度提出问题、解决问题(包括数学内部问题和实际问题)的过程中所采用的各种方式、手段、途径等．二者是紧密联系的，一般来说强调指导思想时称数学思想，强调操作过程时称为数学方法，因此，二者常常合称为数学思想方法[2]．高考中对数学思想方法的考查占据了一个非常重要的地位．高考重视考查函数与方程思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想、特殊与一般思想、必然与或然思想以及有限与无限思想等．

深化能力立意，突出考查能力与素质的导向．几年前的考试大纲规定高中数学能力主要是指五大能力，即思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识．该五大能力的核心是数学思维能力．因此，我们提出这样的理念：为数学思维而教；为数学思维而学；为数学思维而考；为数学思维而研究．简言之，为思维而教；为思维而学；为思维而考；为思维而研．

坚持数学应用，考查应用意识．数学应用的极端广泛性是数学的三大特征之一．课改之后，高考已明显加大了对数学应用意识的考查力度．高考重视考查概率与统计应用问题、

---

1 教育部考试中心．2009 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明(理科)[M]．北京：高等教育出版社，2009．

2 钱珮玲．中学数学思想方法[M]．北京：北京师范大学出版社，2001．

函数应用问题、数列应用问题、三角测量问题等.

开放探索，考查探究精神，开拓展现创新意识的空间. 该原则的深刻意蕴在于中学教学应适当增加研究性学习或探究性教学. 数学探究是培养学生探究精神和创新意识的重要途径，在近十多年的高考中已充分体现.

体现要求层次，控制试卷难度. 试题设计有梯度，试卷难度的理想值为 0.55，即平均得分为 82.5 分. 平均得分控制在 75～90 分都是可以接受的. 全国卷的压轴题一般采用多题把关的做法，即通过选择题的最后 1～3 个题，填空题的最后 1 个题，解答题的最后 1～2 个题来控制高分段人数.

上述高考命题原则可以作一些简化，提出高考数学命题的六条原则[1]：①考查主干知识；②强调数学思想方法；③深化能力立意；④考查应用意识；⑤考查探索创新意识；⑥体现要求层次.

这些命题原则仍然是高考命题遵循的基本原则，会长期坚持下去. 当下，高考命题原则可以增加“立德树人”、“核心素养”、“多想少算”和“数学文化”原则. 也就是说，现今的高考命题体现了以“立德树人”为导向，以“核心素养”为重点，以“多想少算”为旨趣，以“数学文化”为亮点.

熟悉考试内容对知识要求的三层次：了解、理解和掌握、灵活和综合运用.

明确能力要求的五方面：思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识.

认识个性品质要求的三维度：情感、态度和价值观.

深刻理解考查要求的五方面：对数学基础知识的考查、对数学思想方法的考查、对数学能力的考查、对应用意识的考查和对创新意识的考查.

熟悉考试内容具体要求.

第二节 研究高考数学试题的几种视角*

研究高考试题应选好视角，所谓视角是指从不同的角度、不同的方向看待和研究问题，选好视角是从事任何研究工作的前提和基本策略. 研究高考数学试题的视角很多，一般可从试卷的布局、试题的立意、试题的解法、试题的背景、试题的推广、试题的改编、试题的评价和试题的欣赏等角度进行[1].

视角一 试卷的布局

研究试卷的布局主要应包括研究题型的种类及分值、各章知识点所占的比重、试题的难度要求和分布情况、双项细目表等，其中双项细目表应是研究试卷布局的重中之重. 研究试卷的布局有利于教师把握高考的重点、难点与热点，减少新课教学和高三复习的盲目

1 慧力，吴立宝.2007 年高考数学四川卷的特点与启示[J]. 天府数学，2008(6)：1-3.

* 作者：赵思林，彭玉灵，黄成世. 该文部分内容刊登在《中学数学教学参考(高中)》2009 年第 5 期，并作了较大的改动.

性、随意性和无效性，从而提高教学效率．研究试卷的布局应高度重视全国卷的榜样作用，课改实验区试卷的导向作用．

视角二　试题的立意

立意是试题的考查目的．高考试题的命制一般以立意为中心，以能力立意命题，就是首先确定试题在能力方面的考查目的，然后根据能力考查的要求，选择适当的考查内容，设计恰当的设问方式．高考数学试题根据以能力立意命题的指导思想，把具有发展能力价值、富有发展潜力、再生性强的能力、方法和知识作为切入点，从测量考生的发展性学力和创造性学力着手突出能力考查[2]．能力立意的试题以基础知识、基本方法和数学思想为载体，它体现了考试的目的和内容．试题立意的角度很多，如考查基础知识的灵活应用，考查数学思想方法，考查以数学思维能力为重点的五大能力(思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识)，考查四种数学意识(应用意识、探究意识、创新意识和审美意识)等．高考数学科考试的重点是考查运用知识分析问题的方法和解决问题的能力，力图通过数学科的考试，不仅要考查出考生数学知识的积累是否达到进入高校学习的基本水平，而且要以数学知识为载体，测量出考生将知识迁移到不同情境的能力，从而检测出考生已有的和潜在的学习能力[2]．这就要求我们的教学要突出对学生思维能力的训练，对学生迁移能力、应变能力、创新意识的培养，全面提高学生的数学素质．高考数学简单地讲是三考：考基础知识、考思想方法、考能力素质[3]．

例 1　(2017 年全国卷 I 理科第 11 题) 设 x,y,z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则(　　)．

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$

C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

本题是一道考查数学核心素养的优秀试题．下面我们从考查基础知识、思想方法和核心素养三方面分析该题的立意．

第一，以考查基础知识立意．本题以指数与对数的运算、指数函数和对数函数的单调性等高中数学核心知识为考查内容．指数与对数作为数学中重要的超越运算，是学习和研究高等数学的重要基础，承载着培养学生数学运算能力和传承优秀数学文化的重任．

第二，以考查思想方法立意．本题考查了方程与函数思想、化归与转化的思想等．

第三，以考查核心素养立意．该题考查了学生的运算能力、数学思维能力、自主探究能力和创新意识．本题立意鲜明，意在考查数学核心素养，对本题的分析、解答以及进一步的探究与变式，会涉及数学抽象(引入数学符号)、逻辑推理(等价变形)、数学建模(建立指数函数或对数函数模型)、数学运算(指数与对数运算)等数学核心素养．本题的结构具有一定的对称性与美感，并且暗含一定的数学规律性，可以激发数学探究意识，引发学生的自主探究．本题的解题思路宽阔、解题方法灵活，对思维的严谨性、广阔性、灵活性、深刻性、变通性等都有较高要求[4]．从表面上看本题是一道普通的大小比较题目，但它含有深刻的高等数学背景，可以通过建立高等数学模型(即幂指函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的单调性)，发现或看清这个题目的数学本质(规律)．

视角三 试题的解法

研究试题的解法主要是指试题的一题多解、多题一解等. 一题多解是指对一道试题从多种不同角度进行分析与探究，进而得到多种解法，这既能培养学生学习的兴趣，又能培养思维的发散性、选择性、灵活性、深刻性，还能培养数学探究意识.

下面看例 1 的分析与解答[4].

分析 1：令 $2^x=3^y=5^z=k$，则 $k>1$，

$$x=\log_2 k，\quad y=\log_3 k，\quad z=\log_5 k.$$

于是，有

$$\frac{2x}{3y}=\frac{2\lg k}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 3}{3\lg k}=\frac{\lg 9}{\lg k}>1，$$

则 $2x>3y$；且

$$\frac{2x}{5z}=\frac{2\lg k}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 5}{5\lg k}=\frac{\lg 25}{\lg 32}<1，$$

则 $2x<5z$.

选 D.

分析 2：取 $z=1$，则 $5z=5$，$2^x=3^y=5$.

从而，有 $2x=2\log_2 5=\log_2 25<\log_2 2^5=5=5z$，$3y=3\log_3 5=\log_3 125<\log_3 3^5=5=5z$，$2x-3y=\dfrac{2}{\log_5 2}-\dfrac{3}{\log_5 3}=\dfrac{2\log_5 3-3\log_5 2}{\log_5 2\log_5 3}=\dfrac{\log_5\dfrac{9}{8}}{\log_5 2\log_5 3}>0$.

所以 $3y<2x<5z$.

分析 3：令 $2^x=3^y=5^z=k$，则 $k>1$，$x=\log_2 k$，$y=\log_3 k$，$z=\log_5 k$.

$$2x=2\log_2 k=\log_{\sqrt{2}} k=\frac{\lg k}{\lg\sqrt{2}}.$$

同理可得 $3y=\dfrac{\lg k}{\lg\sqrt[3]{3}}$，$5z=\dfrac{\lg k}{\lg\sqrt[5]{5}}$.

从而问题归结为比较 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{5}$ 的大小.

一个思路是从整体上考虑，直接把 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{5}$ 都化成同次根式，即分别化成 $\sqrt[30]{2^{15}}$，$\sqrt[30]{3^{10}},\sqrt[30]{5^6}$，但 2^{15}, 3^{10}, 5^6 的运算量比较大，需要花费较多时间.

另一个思路是各个击破，先比较 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3}$ 的大小，$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$，$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$，因此 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$；再比较 $\sqrt{2},\sqrt[5]{5}$ 的大小，$\sqrt{2}=\sqrt[10]{32}$，$\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{25}$，所以 $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$.

所以 $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$（注：$\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$，因此 $\sqrt[5]{5}<\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$）.

选 D.

视角四　试题的背景

研究试题的背景主要是指题目是否含有高等数学背景. 高等数学的一些基本思想、基本概念为设计高考试题提供了广阔而又深刻的背景，这是因为高等数学的基本思想和方法是考查学生进一步学习潜能的良好素材. 高中数学教师只有具备坚实的高等数学功底，才能深刻理解高中数学知识的来龙去脉，才能搞好高中数学的教学和研究工作，才能居高临下、高初结合.

以例 1 [4]为例. 从分析 3 可知，本题含有高等数学背景，即问题的实质可归结为讨论幂指函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$（$x>0$）的单调性. 由 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$，得

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x),$$

所以函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减.

定理：函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减. 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=\mathrm{e}$ 时取得最大值，即 $(x^{\frac{1}{x}})_{\max}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

利用此定理，可得下面的结论：

推论 1　$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}>\sqrt[7]{7}>\sqrt[8]{8}>\sqrt[9]{9}>\sqrt[10]{10}>\cdots$.

笔者推测，这个高考试题是从推论 1 反向构造出来的. 这可能是设计高考试题的基本套路之一.

推论 2　数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 从第 3 项起单调递减.

推论 2 等价于下面的推论 3.

推论 3　设整数 $n\geqslant 3$，则 $n^{\frac{1}{n}}>(n+1)^{\frac{1}{n+1}}$，即 $n^{n+1}>(n+1)^n$.

在中学，用数列的知识(不用导数)直接证明推论 2 和推论 3 是比较困难的，但用上导数这一重要工具就不太难了.

利用推论 2 或推论 3，可以推出重要极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 需要说明的是，若用推论 2 或推论 3 推出重要极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，那么推论 2 或推论 3 的证明就不能用导数，否则就会形成循环论证. 这是因为导数公式 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 的推导需要用到重要极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

推论 4　数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 中的最大项有两个，即第 2 项和第 4 项.

例 2　(2014 年陕西卷理科第 21 题) 设函数 $f(x)=\ln(1+x),g(x)=xf'(x),x\geqslant 0$，其中

$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) $g_1(x)=g(x), g_{n+1}(x)=g(g_n(x)), n\in\mathbf{N}$，求 $g_n(x)$ 的表达式；

(2) 若 $f(x)\geqslant ag(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3) 设 $n\in N_+$，比较 $g(1)+g(2)+\cdots+g(n)$ 与 $n-f(n)$ 的大小，并加以证明.

本题是考查学生导数的应用能力、数学思想方法的运用能力、分析问题和解决问题能力的综合性较强的好题目. 探究发现，(3) 小题含有拉格朗日中值定理、定积分的背景. 下面用拉格朗日中值定理、定积分对 (3) 小题进行求解.

解法 1：由题设知 $g(1)+g(2)+\cdots+g(n)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}$，

$$n-f(n)=n-\ln(n+1).$$

结论为：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)>n-\ln(n+1)$.

上述不等式等价于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$.

在 (2) 中取 $a=1$，可得 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}, x>0$.

令 $x=\frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}_+$，则 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$.

由拉格朗日中值定理，得

$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n}=\frac{1}{\xi}, \xi\in(n, n+1).$$

故 $\ln(n+1)-\ln n>\frac{1}{n+1}$.

解法 2：如图 1-1 所示，$\int_0^n\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ 是由曲线 $y=\frac{x}{x+1}, x=n$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积，而 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}$ 是图中所示各矩形的面积和，得 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}>\int_0^n\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ $=\int_0^n\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=n-\ln(n+1)$.

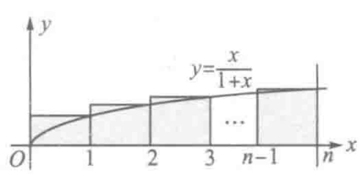

图 1-1

本题第 (3) 问中解法 1 是根据拉格朗日中值定理的结论反向构造出来的，解法 2 是利用定积分的几何意义来解答的. 需要说明的是，用拉格朗日中值定理、定积分虽能简洁明快地解答本题，但我们不提倡将拉格朗日中值定理、定积分及其背景知识作为教学的补充内容，因为这样做会加重学生的学习负担.

视角五　试题的推广

研究试题的推广是指对以前高考中出现的一些优秀试题进行引申、拓展. 研究试题的推广，有利于深化对问题本质的认识，完善和发展学生的认知结构，猜想数学命题，发现数学规律，并培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，还能培养学生的数学探究意识和创新意识.

例 3　(2017 年全国卷 I 理科第 20 题) 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点.

分析：经过探究可知，在双曲线、抛物线若满足直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，l 都会过定点.

推广 1　已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 n，证明：l 过定点.

推广 2　已知圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)方程，设 P_2 在圆锥曲线方程上，直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 n，证明：l 过定点.

视角六　试题的改编

研究试题的改编是指对一些优秀的高考试题进行变式、重组和改造. 改编后的新问题是学生进行研究性学习的好素材. 试题改编的常用方法有加强或削弱题目的条件或结论，变换试题的背景或情境，迁移试题涉及的知识或方法，改变图形的放置或位置等. 试题的改编包括改变题型，如把选择题改成填空题、填空题改成选择题、选择题和填空题都改成解答题等.

以例 1 为例，对其可以作如下改编[4]：

改编 1　比较 $\sqrt[10]{10},\sqrt[20]{20},\sqrt[30]{30}$ 的大小.

改编 2　设 x,y,z 为正数，且 $10^x=20^y=30^z$，试比较 $10x,20y,30z$ 的大小.

从表面上看，变式 1 与变式 2 是两个不同的题，但由上面的定理与推论知，它们的本质是相同的.

改编 3 比较17^{18}，18^{17}的大小.

改编 4 设 x,y,z,w 都为正数，且$10^x=30^y=50^z=70^w$，试比较 $10x$，$30y$，$50z$，$70w$ 的大小.

视角七 试题的评价

研究试题的评价主要包括分析试题在一套试卷中的地位和作用，考察“四度”(难度、信度、效度、区分度)测量指标是否达到预期的目标，了解高考后学生和老师对该题的“满意度”，判断该题是不是一道好题. 好的数学问题对巩固基础知识、形成数学方法、凝练数学思想、训练思维能力、提高数学素质具有重要作用. 数学学习应提倡多做好题，少做或不做劣质题目.

视角八 试题的欣赏

会欣赏才会分享. 欣赏高考试题是对高考试题的高层次(高水平)的研究. 当一个题目呈现美感时，欣赏它是比较自然的事情. 但一个题目从表面上不美时，要欣赏它、喜欢它就难了.

需要指出的是，研究高考试题对教师和学生的要求是不同的. 教师对试卷的布局、试题的立意、试题的背景、试题的解法、试题的推广、试题的改编、试题的评价和试题的欣赏等可作较全面的研究，学生应重点研究试题的立意、试题的解法、试题的推广等问题，学生对试卷的布局、试题的背景、试题的改编、试题的评价、试题的欣赏等问题了解即可，对试题的推广应适可而止.

参 考 文 献

[1] 慧力, 吴立宝. 2007 年高考数学四川卷的特点与启示[J]. 天府数学, 2008(6): 1-3.

[2] 教育部考试中心. 2008 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明(理科)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[3] 赵思林. 关于高考数学创新型试题的立意[J]. 中学数学教学参考, 2009, 1-2: 99-101.

[4] 彭玉灵, 赵思林. 一道高考大小比较试题的探究[J]. 理科考试研究, 2018, 3: 2-3.

第三节 立德树人——高考数学命题的新亮点*

党的十八大报告提出“立德树人是教育的根本任务”. 立德树人作为教育的根本任务，高考也应体现这种导向[1]. 在教育部制定的落实立德树人根本任务的配套文件《关于全面深化课程改革，落实立德树人根本任务的意见》中指出：“全面贯彻党的教育方

* 作者：赵思林，王婷. 该文刊登在《数学通报》2017 年第 4 期.

针，坚持立德树人，加强社会主义核心价值体系教育，完善中华优秀传统文化教育，形成爱学习、爱劳动、爱祖国活动的有效形式和长效机制，增强学生社会责任感、创新精神、实践能力．”

数学是树人的重要途径．数学是基础教育的核心课程，是培养人才的重要学科．数学教育与树人的关系极为密切．数学是培养人才的重要途径．数学对培养人的科学精神、思维方法、探索能力、思辨能力、量化思维、审美情趣等具有重要作用．“数学是思维的体操”，“数学是思维的科学”，数学中充满了创造，整个数学史就是一部创造史，可以说，没有创造就没有数学．因此，数学对培养人的理性思维和创新能力具有巨大作用，正如《义务教育数学课程标准(2011 年版)》所说“要发挥数学在培养人的思维能力和创新能力方面的不可替代的作用”．[2]

数学与立德有密切关系．立德的过程就是德育的过程．简言之，立德即德育．一方面，数学教育应该而且可以发挥“数学教学具有的德育功能”[3]；另一方面，良好的德育有助于数学的教学，德育可以帮助学生培养正确的动机、浓厚的兴趣、积极的情感、良好的习惯、坚强的意志和独立的性格，这些德育因素是学生学好数学应具备的品质．

研究近年高考数学试题发现，立德树人已成为高考数学试题的新动向和新亮点．本节主要以近两年高考数学四川卷为例，分析了涉及立德树人的试题有以下几类：弘扬中国优秀数学文化，激发爱国情感；以中国资源缺乏为情境，培养勤俭节约美德；以新定义设置问题，考查学习能力；设计探究型、交汇型、开放型问题，考查数学创新意识；设计实际应用型问题，考查实践能力．

一、弘扬中国优秀数学文化，激发爱国情感

爱国是公民对祖国最深厚的情感与强烈的责任担当．中国是有几千年爱国主义优良传统的国家．培养学生的爱国情感是立德树人的重要任务．近年来，一些考题涉及《九章算术》《数书九章》等数学著作的内容，其意图是弘扬中国优秀数学文化，培养考生的爱国情感．

例 1 (2016 年四川卷理科第 6 题、文科第 8 题)秦九韶是我国南宋时期的数学家，普州(现四川省安岳县)人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法．如图 1-2 所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例，若输入 n，x 的值分别为 3，2，则输出 v 的值为(　　)．

A. 9　　B. 18

C. 20　　D. 35

评析：秦九韶是我国南宋时期伟大的数学家，普州(现四川安岳)人．理科第 6 题、文科第 8 题以他在《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法为背景设置问题情境．这样设计的意图是引导考生了解和弘扬中国古代数学的优秀文化，激发考生的民族自豪感和爱国情感，增强学习数学、研究数学、应用数学和创造数学的信心．通过题干中“多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法”让考生了解和欣赏秦九韶的高超智慧．本题的难度较低，其解答不需要考生去学习《数书九章》，因此，这样考查不会加重学生的学习负担．

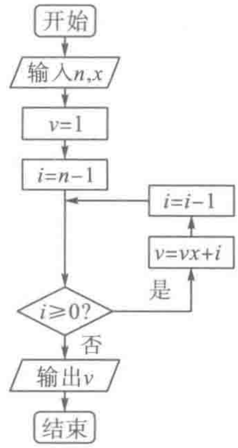

图 1-2

类似的题有 2015 年全国卷 I 文理科第 6 题以《九章算术》中“米堆的体积”为情境考查近似计算；2015 年全国卷Ⅱ文理科第 8 题以《九章算术》中“更相减损术”为情境考查算法；2015 年湖北卷文理科第 2 题以《九章算术》中“米谷粒分”为情境考查统计中的抽样方法；2015 年湖北卷理科第 19 题以《九章算术》中的“阳马”和“鳖臑”为情境考查立体几何知识，这些题目充满数学文化气息，意在弘扬中国优秀数学文化，值得欣赏与学习.

二、以资源缺乏为情境，培养勤俭节约美德

勤能兴邦，俭能养德. 勤俭节约是中国人民的传统美德. 勤俭节约教育是立德树人的重要内容.

例 2 (2016 年课标四川卷理科第 16 题)我国是世界上严重缺水的国家，某市政府为了鼓励居民节约用水，计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨)，一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费，超出 x 的部分按议价收费. 为了了解居民用水情况，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量(单位：吨)，将数据按照[0,0.5)，[0.5,1)，…，[4,4.5)分成 9 组，制成了如图 1-3 所示的频率分布直方图.

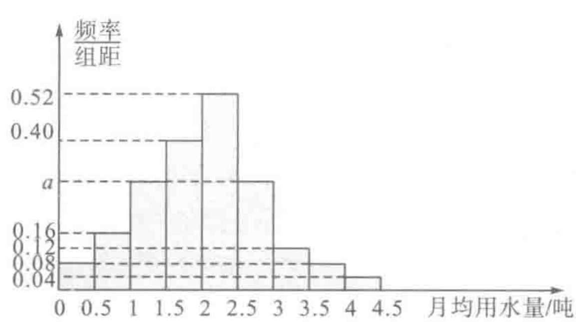

图 1-3