

Chaotic Dynamics Foundation and
Its Applications in Brain Functions

混沌动力学基础及其 在大脑功能方面的应用

刘宗华/著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助项目

混沌动力学基础及其在大脑 功能方面的应用

刘宗华 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

混沌动力学已发展成相对完备的体系,并在众多应用领域显示出强大的生命力。本书系统地介绍了有关混沌动力学的基础知识与研究现状,对典型的分立与连续混沌系统作了较详细的讲述,并结合部分前沿课题特别是与脑功能有关的前沿领域详细展示了混沌动力学的应用及潜在应用。全书共 11 章,内容由浅入深、循序渐进。前 4 章主要介绍混沌的基本概念、能出混沌的典型的分立与连续动力系统及刻画混沌的常用手段;后 7 章则着重介绍混沌理论的纵深发展及其在与脑功能有关方面的应用,包括耦合混沌系统同步化的基本概念与理论、混沌动力学的初步应用、复杂网络的同步化、爆炸性同步、耦合系统中的奇异态、大脑网络上的认知与信号传递等。为方便读者更好地掌握混沌研究的基本概念与方法,本书特地为混沌动力学的基础内容部分——第 1 至第 4 章,配备了适量的习题,以供读者练习。

本书能帮助研究生与本科高年级的学生迅速进入混沌领域的前沿课题,特别是同大脑的认知与记忆的微观机制有关的前沿课题,并找到合适的切入点。对从事非线性科学与复杂网络研究的工作者、理工科大学的教师,以及与非线性科学研究有关的交叉领域的研究人员也有较大的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

混沌动力学基础及其在大脑功能方面的应用/刘宗华著. —北京:科学出版社, 2018.2

ISBN 978-7-03-056362-0

I. ①混… II. ①刘… III. ①混沌理论-动力学 ②脑-机能 IV. ①O415.5
②Q426

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 012488 号

责任编辑:刘凤娟/责任校对:杨 然
责任印制:肖 兴/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京画中画印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 2 月第 一 版 开本:720 × 1000 1/16

2018 年 2 月第一次印刷 印张:24 1/2

字数:480 0000

定价:189.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

人类的好奇与探究精神与生俱来，古已有之。对自然的好奇产生了以物理学为代表的现代科学，对自身的好奇则产生了以脑科学为代表的生命科学。传统上，我们对力、热、电、光及原子物理的知识构成了物理学的基本大厦，其中关于热的讨论与其他四者有很大的不同，它是由三个否定式的表述——热力学第一、第二与第三定律构成。热力学描述的是宏观现象，对其微观机制的研究导致了一个非确定论的——概率论的描述框架：统计物理学。与其他物理学惯用的简化模型方法不同，统计物理学反其道而行之，通过引入相点与统计系综等概念，将低维系统的集体动力学转化为高维空间中的相点动力学来进行刻画，在构建宏观动力学与微观机制之间的桥梁方面，取得了巨大的成功。

统计物理学的另一个特征是其发展的快速性。建立于平衡态的统计物理学被迅速拓展到非平衡态统计物理，紧接着是耗散结构论与协同学的提出，然后是混沌动力学与耦合振子理论的建立，直至近年来复杂网络科学的兴起。这些新学科的建立，标志着统计物理学旺盛的生命力与广袤的发展前景，同时也为它的进一步发展指明了前进的道路与方向。越来越多的证据表明，统计物理学的这些发展正在和具体应用发生着密切的联系，特别是在脑功能微观机制的理解与应用方面正孕育着巨大的潜力，它们之中以同步化最为凸显。可以预见，统计物理的下一个发展方向将是与耦合振子理论及复杂网络都密切相关的脑功能的物理机制。读者诸君，身逢盛世，又恰巧读到了这本拙著，可谓是“在正确的时间遇到了钟意的对象”，在此，希望它能为你未来的科研之路带来些许的曙光！

混沌动力学与混沌同步化的兴起曾为我们带来了巨大的惊喜，它揭示出自然界中存在的第三种状态：既不是完全确定的，也不是完全随机的，而是确定论系统中的内在随机性——这样就将统计物理的概率论描述与其他学科确定论描述有机地统一起来，为牛顿力学和统计力学架起了相互沟通的桥梁。混沌动力学告诉我们，貌似随机的动力学行为中存在着关联、自相似以及内部统计规律，这与随机生长的因特网中存在着统计特征不谋而合，标志着随机性与确定论作为统一体的共性。混沌对初值的敏感依赖性与物理量可观测的鲁棒性形成了鲜明对比，让我们认识到真实系统中可能存在的不确定性，而混沌同步化的实现则标志着混沌不确定性从理论走向应用的开端。

大脑神经元的集体行为可看作是一个混沌系统，其正常状态时处于自组织临界状态。正常脑功能的发挥主要是由相关区域神经元的同步化来实现，没有同步化

就没有脑功能；但太强的同步化又会诱发癫痫等疾病的发生，从而导致脑功能的丧失。尽管人们对大脑的好奇与探索已经历了漫长的阶段，但今天它依然是最迷人、最具挑战的领域。目前关于脑功能研究的进展主要集中在实验科学方面，比如，通过功能磁共振成像等手段对与认知、记忆及情感等对应的脑功能网络结构进行了探测，而对其微观机制的理论探索还相当贫乏。本质上，脑功能是神经元个体按网络连接的方式相互耦合，从而导致的一种群体行为或宏观涌现。只是我们不明白这些具有多样性的集体行为是如何涌现的，在什么条件下涌现出的是正常的脑功能，疾病态是否就是这些条件被破坏的结果等。这就为统计物理，特别是混沌同步化与复杂网络科学，在脑功能科学方面的应用留下了足够的发展空间。为了给有志于脑功能科学理论研究的初学者提供快速入门的读物，作为本领域的先行者之一，笔者觉得有必要，也有责任整理一本混沌动力学基础及其在大脑功能应用方面的前沿教材或读物。这正是本拙著的目的，即旨在对与脑功能应用密切相关的同步化理论进行较为详细的阐述。以混沌动力学为基础，从基本概念、刻画方法、理论框架到具体应用进行全方位的展示，以期进入最持久、最迷人的黑箱——脑功能科学理论研究的初学者打下坚实的理论基础，并指明前行的可能方向。

本书是笔者 2006 年 11 月出版的教材《混沌动力学基础及其应用》的修改版。当时的那本书，起因于 2004 年春，笔者从美国亚利桑那州立大学回国，到上海华东师范大学后所开设的研究生选修课程。经过这些年的讲解后，发现了其中存在的一些问题，需要进行一次全面的修订。同时，混沌同步化在近些年内有了长足的发展，特别是基于复杂网络的同步化以及以同步化为基础的脑功能的深层次理解等方面，它们开启了我们对于一些全新的、可能是正确途径的思考。比如，我们人体自身的生老病死，特别是与脑有关的疾病，是否也可以从网络的角度得到新的理解？如果可以，是否表明在不远的将来，我们可以用人造网络来取代或修复部分生病的脑功能局部网络？另外，参与人脑记忆与认知功能的神经元与突触连接都是物质的，但它们通过一定的网络作用却产生了意识，是否表明我们需要对传统的物质与意识的关系重新思考？目前看来，复杂网络科学可看成是统计物理学的发展，但它们在具体问题中的应用又离不开传统的统计物理与概率论的一些研究方法，如统计平均、主方程、反应-扩散方程、涨落耗散等。这种相互碰撞带来了我们对一些传统问题的全新认识，如渗流的一级与二级相变争论等，也促成了统计物理在复杂网络这个全新领域中的青春焕发，因此有必要将它们介绍给读者。这些因素直接导致了本书的产生，也使得原书从 7 章扩展为现在的 11 章。唯一不变的是当时的初衷，即希望本书既可作为研究生及本科高年级学生的专业课选修教材，又是以后科研工作中可随时查找资料的工具书。为此，本书用前面 4 章集中讲解关于混沌的基础知识，并配备了适量的习题，使之适合于作为研究生及本科高年级学生的教材；后面 7 章主要对混沌动力学领域中目前还在发展的前沿课题进行介绍，并重点关

注混沌同步化在脑功能科学方面的应用,以使初入门的研究生能迅速进入课题,找到合适的切入点。

本书共 11 章。第 1 章主要介绍混沌的发展历史,基本概念及内在的数学基础。第 2 章与第 3 章详细介绍典型的分立与连续混沌动力学系统,并通过它们来展示混沌的丰富内涵。这些系统是混沌研究中比较公认与常用的系统,适合于在以后的研究或应用中用作范例模型,以便增加结果的普适性。第 4 章给出了刻画混沌的常用手段:功率谱分析、李雅普诺夫指数、分数维数、吸引子重构等,并给出了随机微分方程积分的数值算法。第 5 章介绍耦合混沌系统同步化的概念与理论。这里的许多特点,如簇团形成与锁相等,是单个混沌系统所不具备的,是混沌理论的发展,亦是后面几章的基础。第 6 章主要介绍混沌动力学系统中的噪声效应,内容包括间歇性混沌、噪声诱导混沌的统计特性、混沌系统中的相关共振及无序抑制混沌等。第 7 章讨论混沌动力学的初步应用,内容涉及混沌控制、保密通信及癫痫病的预言与模拟等。第 8 章介绍复杂网络上的混沌同步化,内容涉及复杂网络的基本概念、判定复杂网络同步化的主稳定函数方法、网络结构对同步化的影响及谱分析等。第 9 章讨论近几年非常活跃的爆炸性同步。这方面的结果拓展了我们对统计物理的基本问题之一——相变的认识,并对电网的级联效应与癫痫病的快速爆发机制提供了新的认识。第 10 章介绍耦合振子系统中的奇异态形成的条件及多奇异态吸引子等新的集体行为的涌现。重点关注神经元系统中的奇异态及其实验验证。第 11 章探讨脑功能网络的同步机制以及在认知与信号传递方面的理论研究,内容包括典型的神经元模型、海扁学习法、联想记忆、大脑上的信息探测与传播、脑功能的实验进展、自持振荡的建模、认知与记忆等斑图间的内在关系,以及听力与生物节律的动力学机制等。

由于笔者的水平所限,本书的许多内容带有自己研究足迹的烙印,错误亦在所难免,热诚地期待读者们批评指正。除了前版中已经感谢过的人外,借此机会,本次还要特别感谢华东师范大学理论物理研究所的研究生们,这些年来在使用本教材的过程中提出了宝贵意见;特别感谢我的学生王建雄、马如宝、梁晓明、顾长贵、徐克生、张希昀、王朝清、王振华、田昌海等,这些年来与我一起学习与工作,我们相互促进、共同成长并取得了一些新的认识,它们构成了本书中部分新添加的内容;以及特别感谢我的合作者管曙光、邹勇、周杰与胡岗老师,在合作研究中带给我的快乐与帮助。还有许多对我提供过帮助的老师与同学,无法一一列出,在此对他们一并致以感谢!

刘宗华

2017 年春于上海

华东师范大学理论物理研究所

目 录

第 1 章 混沌概论	1
1.1 混沌的发展史	1
1.2 混沌的特征	6
1.3 通向混沌之路	12
1.3.1 倍周期分岔通向混沌	12
1.3.2 阵发性通向混沌	14
1.3.3 霍普夫分岔通向混沌	16
1.3.4 哈密顿系统的 KAM 环面通向混沌	18
1.4 混沌的测度与各态历经性	19
1.5 非线性动力系统的稳定性分析	21
1.6 动力系统的三种典型分岔	24
1.7 习题	29
第 2 章 一些典型迭代系统中的混沌	31
2.1 逻辑斯谛映射	31
2.2 埃农映射	36
2.3 标准映射	39
2.4 帐篷映射	41
2.5 圆映射	43
2.6 艾克达映射	46
2.7 双转子映射	47
2.8 习题	51
第 3 章 一些典型的连续动力系统系统中的混沌	53
3.1 流与映射的关系	53
3.2 洛伦茨方程	55
3.3 洛斯勒系统	59
3.4 蔡氏电路	61
3.5 达芬方程	64
3.6 斯普罗特系统	67
3.7 习题	71
第 4 章 混沌的刻画	73
4.1 映射轨道的图像描述: 蛛网图	73

4.2	功率谱分析	75
4.3	李雅普诺夫指数	79
4.3.1	李雅普诺夫指数的定义	79
4.3.2	李雅普诺夫指数的数值计算	82
4.3.3	噪声时间序列中的最大李雅普诺夫指数的检测	86
4.4	分数维数	87
4.4.1	豪斯多夫维数	88
4.4.2	计盒维数	89
4.4.3	信息维数	90
4.4.4	关联维数	90
4.4.5	李雅普诺夫维数	91
4.4.6	广义维数	91
4.5	时间序列的吸引子重构	92
4.6	数值计算方法	95
4.6.1	龙格-库塔方法	95
4.6.2	噪声环境下的休恩方法	96
4.7	习题	97
第 5 章	耦合混沌系统的集体行为——混沌同步化	99
5.1	同步化现象	99
5.2	完全同步化	100
5.3	相同步化	103
5.4	延迟同步化	108
5.5	广义同步化	109
5.6	大量耦合振子的锁相	113
5.7	耦合振子中的阵发及其机制	116
5.8	分立系统的相刻画	121
第 6 章	混沌动力系统噪声效应	126
6.1	外噪声作用下的阵发效应	126
6.2	噪声诱导混沌及统计平均量的观测	130
6.3	噪声对混沌吸引子中性方向的影响	136
6.4	混沌系统中的相关共振	141
6.5	无序抑制混沌	148
第 7 章	混沌动力学的初步应用	152
7.1	控制混沌	152
7.2	保密通信	158
7.3	耦合强度及方向性检测	161

7.4 癫痫病的模拟	165
7.4.1 非线性探测——替代数据法	168
7.4.2 癫痫机制的动力学模型探讨	169
第 8 章 复杂网络的同步化	172
8.1 引言	172
8.2 复杂网络的基本概念	175
8.3 复杂网络的谱分析	178
8.4 耦合振子同步化的主稳定函数方法	181
8.5 几种典型网络的同步化	183
8.6 两层网络之间的耦合相变	186
第 9 章 爆炸性同步	189
9.1 引言	189
9.2 Kuramoto 模型	191
9.3 复杂网络中的爆炸性同步	195
9.4 爆炸性同步的实验证实	200
9.5 爆炸性同步的一般框架	204
9.6 爆炸性同步的抑制律	208
9.7 电力网中的爆炸性同步	214
9.8 与大脑有关的迟滞行为	218
9.9 爆炸性同步增强听力选择	222
9.10 从爆炸性同步到 Bellerophon 态	227
第 10 章 耦合系统中的奇异态	234
10.1 引言: 半脑睡眠现象	234
10.2 对称破缺导致奇异态	236
10.3 奇异态的交替变化与鲁棒性	242
10.4 高维系统中的奇异态	243
10.5 神经元系统中的奇异态	247
10.6 奇异态的实验证实	252
10.7 爆炸性同步与奇异态之间的桥梁	255
第 11 章 大脑网络上的认知与信号传递	257
11.1 引言: 认知与记忆的实验进展	257
11.2 神经元及其突触可塑性	261
11.3 典型的神经元模型	269
11.4 记忆模型	276
11.5 工作记忆	279
11.6 海扁学习法	286

11.7	时序依赖可塑性	289
11.8	Hopfield 联想记忆网络	292
11.9	无监督模式识别	298
11.10	脑功能网的构建	307
11.11	基于网络的信号传递与检测	312
11.12	基于节律环的自持振荡与记忆模型	315
11.13	网络结构对神经元发放传输的影响	325
11.14	相无序增强信号检测	334
11.15	哺乳动物听力的动力学机制	339
11.16	生物节律的动力学机制	344
11.17	认知与记忆的非线性动力学展望	351
参考文献		354
索引		380

第1章 混沌概论

1.1 混沌的发展史

现代科学始于牛顿于 1686 年提出的三大定律。加上万有引力定律，牛顿便可以推导开普勒总结的行星运动的经验定律及解释诸多的自然现象，像月亮的椭圆运动、海水的潮起潮落、自由落体等。根据牛顿力学，人们还发现了海王星与冥王星、预测了彗星的出现和其他天体的运动、设计了各种火箭把航天器送到外太空。牛顿定律的一个直接推论就是，给定初始条件及相互作用力，物体以后的运动就完全确定了。即使初始条件有一定的误差，只要误差足够小，我们也可以基本准确地给出未来的所有发展情况。于是拉普拉斯于 1951 年断言：如果有一位智慧之神在某一时刻能获知自然界一切物体的位置及相互作用力，那么他就可以预测宇宙的未来状况 (*Philosophical Essay on Probabilities* “Given for one instant an intelligence which could comprehend all the forces by which nature is animated and the respective situation of the beings who compose it—an intelligence sufficiently vast to submit these data to analysis—it would embrace in the same formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the lightest atom; for it, nothing would be uncertain and the future, as the past, would be present before its eyes.”)。

对天体轨道的预言是牛顿力学成功的典范，然而牛顿定律只能精确地描述单体与二体问题，对稍微复杂的三体问题便无法求得精确解。19 世纪末 20 世纪初，庞加莱 (Poincaré) 在研究限制性三体问题时遇到了混沌问题，发现三体引力相互作用能产生出惊人的复杂性。限制性三体问题是指所讨论的三个天体中，有一个天体的质量与其他两个天体的质量相比，小到可以忽略，即可以不考虑它对另外两者的吸引。庞加莱发现，这样一个限制性三体问题的相对运动，与单体问题及二体问题不同，它是无法求出精确解的。图 1.1 是简单的二体与三体示意图，其中二体系统是稳定的，而三体问题通常是不稳定的、不可解的。庞加莱把动力系统和拓扑学有机地结合起来，指出，三体问题中，在一定范围内，其解是随机的，即在确定论系统中，相空间轨道有可能呈现高度不稳定性，初始条件的任何微小扰动都会在未来的发展中引起完全不同的后果。这是科学家第一次指出确定论系统中的内在随机性——混沌。图 1.2 是限制性三体问题中那个可忽略质量的天体的运动轨道。

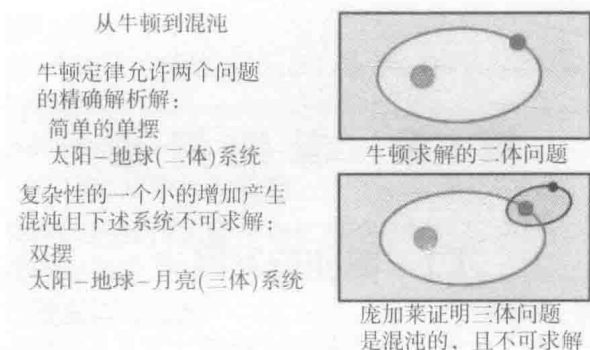


图 1.1 从二体到三体的牛顿力学 [1]

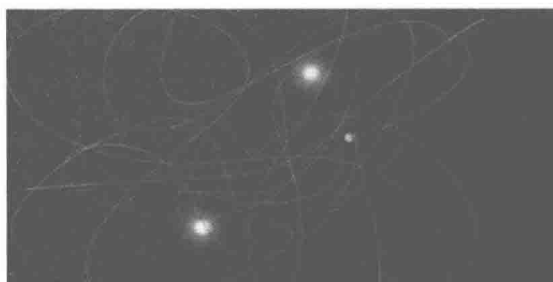


图 1.2 限制性三体问题的解

可近似看成是限制性三体问题的一个例子是太阳系中“翻筋斗”的土卫七，它是土星的一颗卫星。图 1.3(C) 显示了它的混沌轨道。土卫七是一个密度较低、形状不规则的天体，其平均直径为 270km，当它沿土星的椭圆轨道运行时，其行为表现为混沌状的“翻筋斗”。图 1.3 给出的是按轨道周期频闪采样的庞加莱截面上旋转角与旋转速度之间的关系，这些点来自于 17 条轨道，其中 4 条是混沌的。这种复杂行为产生于土卫七的不规则形状与其轨道椭圆偏心率之间的相互作用 [1, 2]。

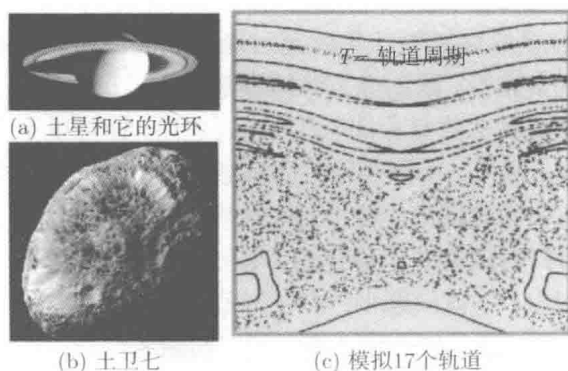


图 1.3 土卫七“翻筋斗”的混沌轨道 [1]

庞加莱的发现回答了瑞典国王奥斯卡二世 (Oscar II) 的问题——太阳系是否稳定,因而获得了其悬赏。这个例子及随后的研究表明,牛顿力学不仅对研究宇观天体与微观粒子不能适用,而且对研究由多个要素构成的复杂系统也存在困难。即使对于宏观的保守系统,牛顿力学也仅能解决少数可积系统的问题,而大量的实际问题仍无法用牛顿力学来求解。当然,可积系统的研究本身就是一个十分重要的问题。我们知道,许多自然系统可由偏微分方程描述,其存在一些守恒量,如能量与动量等,通常由于其非线性而无法求解;然而,当其存在无穷多或足够的守恒量,而成为可积系统时,则可精确求解;虽然可积系统很少,却可用来作为解决非可积系统的基石。可积性是混沌的对立面。可积的轨道就是规则的轨道,相邻的轨道的动力学行为相似,即可积的轨道就是周围的轨道都有相似的行为,比如都在一个环面或扭曲的柱面内运动。过去,随机性只是和不可逆性联系在一起。而现在,在确定性的、可逆的牛顿方程内部出现了内在的随机性。然而非常遗憾的是,庞加莱没有沿着这条路继续走下去,在遇到了复杂的栅栏结构时却步了。他说“这些东西太稀奇古怪了,我没有耐心去仔细考虑它们”。图 1.4 是这种栅栏结构的示意图。

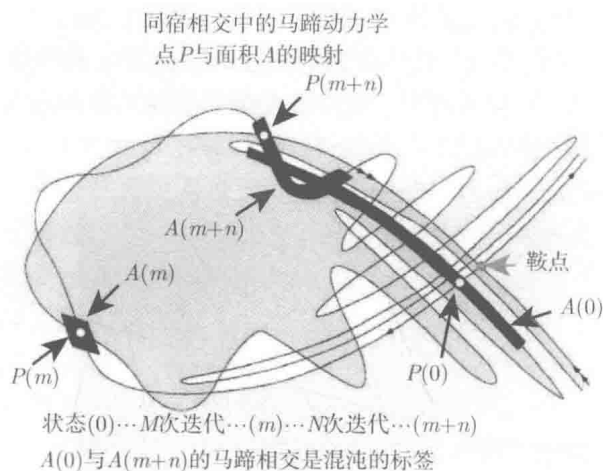


图 1.4 同宿相交如何产生马蹄 (horseshoe) 的示意图 [1]

1954 年,苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 提出一个定理;1963 年,他的学生阿诺德 (Arnold) 给出定理的严格证明,瑞士数学家莫西 (Moser) 给出一个改进的证明。因此,这个定理叫做 KAM 定理,即用这三位发现者的名字命名的定理。定理的内容可以粗略地叙述如下:对 N 个自由度的哈密顿系统,若哈密顿函数可以表示为

$$H = H_0 + V \quad (1.1)$$

其中, H_0 表示一个可积系统的哈密顿量, V 表示一个小扰动 (弱非线性), 则在足够阶数的可微及非退化条件下, H 的绝大多数解, 仍然停留在一个 N 维环面上, 此环面与可积系统的 H_0 环面同胚。可积系统指存在 N 个运动积分的系统, 此时系统的解位于 N 维环面上并可以用这 N 个运动积分表示出来。不可积系统指不存在 N 个运动积分的系统, 其系统的解将不再限制在 N 维环面上。KAM 定理表明, 在小扰动下, 近可积系统的绝大多数解仍限制在稍有变形的 N 维环面上。这些环面称为 KAM 环面。因此, KAM 定理为揭示哈密顿系统中 KAM 环面的破坏以及混沌运动奠定了基础。KAM 定理表征了小扰动不能导致复杂的运动, 规则运动具有稳定性, 贯穿相空间的无理环面将混沌区与规则区完全隔开。例如, 我们考虑一个小行星围绕太阳的运动, 它们的运动受到木星的扰动, 因此是一个不可积的三体问题。稳定的小行星轨道的存在可以被看作是对 KAM 定理的一个证明。1963 年, 洛伦茨在著名论文“决定论非周期流”中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象, 给出了耗散系统中第一个确定论方程导出混沌解的实例, 这个模型表明长期天气预报的不可能性。洛伦茨提出了一个形象的比喻: “巴西的一只蝴蝶扇动几下翅膀, 可能会改变一个月后美国得克萨斯州的气候” (The “butterfly effect”: Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?), 即“蝴蝶效应”, 见图 1.5。(我国苏轼也曾写过“竹中一滴曹溪水, 涨起西江十八滩”。) 洛伦茨系统作为第一个混沌的物理和数学模型, 成为后人研究混沌理论的出发点和基石, 洛伦茨因而被誉为“混沌之父”。



图 1.5 美国得克萨斯州的飓风 [3]

1964年,法国天文学家埃农(Hénon)从研究球状星团以及洛伦茨吸引子中得到启发,得到了一个二维不可积哈密顿系统中的确定性随机行为,即埃农映射。1971年,法国物理学家吕埃勒(Ruelle)和荷兰数学家塔肯斯(Takens)证明朗道(Landau)的湍流理论是不正确的,为耗散系统引入“奇怪吸引子”概念,提出用混沌来说明湍流的形成。

1975年,美国数学家约克(Yorke)和他的学生李天岩在美国《数学月刊》发表了题为《周期3意味着混沌》(*Period three implies chaos*)的著名文章^[4],被认为是混沌的第一次正式表述,混沌一词从此被正式使用。这篇文章指出,如果一个连续映射 f 有一个周期3点,则它必定具有任意周期 k 的点。此文发表后,约克被邀请到处演讲。一次在东柏林演讲后,约克去玩游艇,碰到一位名叫萨柯夫斯基(Oleksandr M. Sharkovsky)的乌克兰数学教授,并且无比吃惊地得知,这位教授比他早十来年(1964年)就证明了与他们的“李-约克定理”类似的定理^[5]。此定理的重新发现,使得萨柯夫斯基定理也广为人知。

1976年,美国生态学家梅(May)在《自然》杂志上发表题为《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的文章。文中指出,逻辑斯谛(logistic)映射中存在着丰富的内容。在这个基础上,美国物理学家费根鲍姆(Feigenbaum)于1978年发现了倍周期分岔通向混沌的两个普适常数,并引入了重整化群的思想。

20世纪70年代中期,实验物理学家也加入了混沌学的研究行列。1974年,美国物理学家斯温尼(Swinney)和格鲁布(Gollub)用实验间接地证实了吕埃勒-塔肯斯理论;1984年,美国物理学家肖(Shaw)和他的同事用水龙头进行混沌实验,并由实验数据重建了奇怪吸引子^[6]。肖的实验如下:一只自来水龙头如果在将闭未闭之际,即漏水口很小,而水压恒定的时候,水滴积累重力超过了表面张力,水滴就下落,新的一滴水又开始积累。则每次形成一滴水而落下的时间是一个常数,即滴水是一个周期性的状态。试将漏水口放大一点点,周期将缩短,反之将延长。加大到一个临界值,这周期就发生忽长忽短的不规则状态了。一长一短,这是倍周期。再加大漏水口,可见四周期。继续加大,可出现完全不恒定的周期,即混沌。图1.6是肖的滴水龙头实验图。

自此以后,混沌学进入了蓬勃发展的阶段。近30多年来,非线性科学成为科学研究的热点之一。尤其是在20世纪70年代末80年代初,非线性科学的研究热潮就像当年量子力学、相对论刚问世一样,导致了整个科学界的震撼。非线性科学宣布了几百年来主导科学界的经典决定论的局限性。它指出,即使对于通常的宏观尺度和一般物体的运动速度,经典决定论也不符合对非线性系统中混沌轨道行为分析得出的客观结论。非线性科学涵盖各种各样尺度的系统,可包括从非常基本到最先进及从非常数学化到最定向的应用,涉及以任意速率运动的对象,具有广泛的应用性。对作为非线性科学的一个主要分支的混沌的研究不仅推动了其他学科的

发展, 而且其他学科的发展又促进了对混沌的深入研究。因此, 混沌学的应用已经涉及了几乎所有的学科 [7, 8]。有鉴于此, 物理学家福特 (Ford) 认为混沌引起的影响与相对论及量子力学相似, 并得出结论: “相对论消除了关于绝对空间与时间的幻想; 量子力学消除了关于可控测量过程的牛顿式的梦; 而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测性的幻想。”

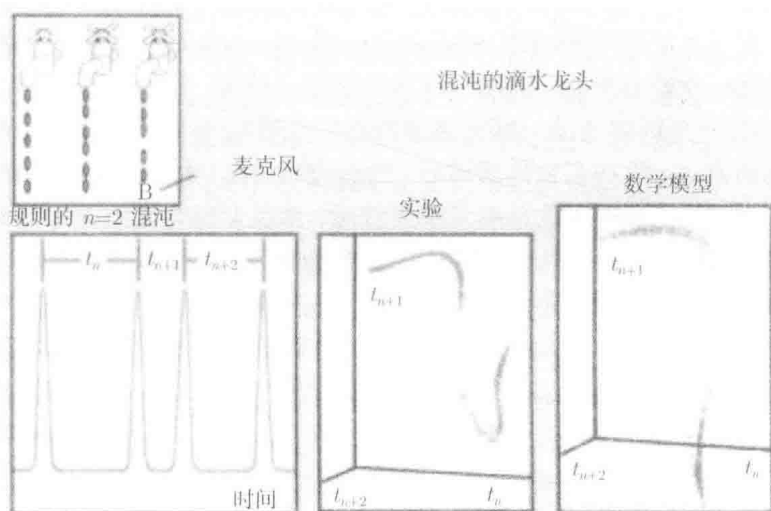


图 1.6 肖的滴水龙头实验图 [1]

混沌研究能有如此迅速的发展, 除了物理思想的更新外, 主要得力于计算机技术的长足进展。计算机是研究混沌科学的必备工具, 没有计算机就没有混沌学的今天, 正如没有显微镜就看不见细菌, 没有望远镜就分不清遥远的星星, 没有高能加速器就看不见微观粒子一样。有了计算机的武装, 我们就可以在混沌学领域里自由地飞翔了。

1.2 混沌的特征

混沌现象普遍存在于自然界中, 并与我们的日常生活息息相关。大家都有过或看到过别人吸烟的经历: 一支燃着的香烟, 烟雾在平稳的气流中冉冉升起, 突然卷曲成一团剧烈扰动的烟雾, 四处飘散。仔细观察烟雾的上升过程可以发现, 在烟雾上升的初始, 是一种较平稳的层流状态气流; 而上升到某些高度后, 开始在烟雾边界出现一些极小的振动图案; 然后, 这些振动图案迅速增大, 并开始出现一些卷曲结构; 再向上走, 这些卷曲就扰乱了整个烟雾。这个系统很明显对初始的微小扰动非常敏感, 卷曲后形成的空间图案依赖于微小的扰动。这是热气流在加速上升的过程中, 层流变湍流的绝妙演示, 见图 1.7。

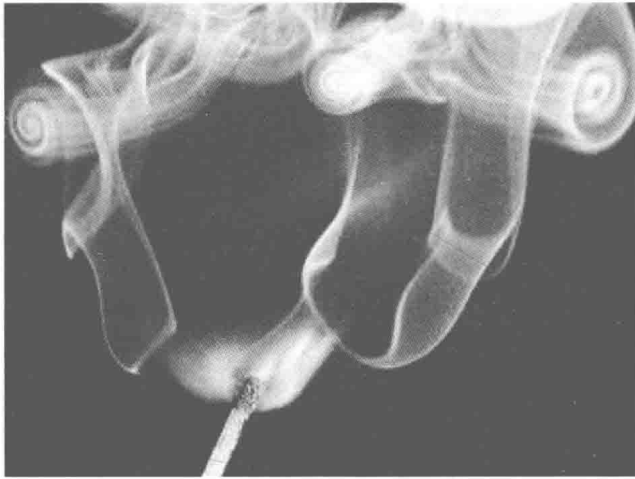


图 1.7 一只燃着的香烟 (引自网络)

再举一个例子,相信大家都有过看到流星的经历。在太阳系内火星和木星之间有一个小行星带,其中的小行星的直径大多数在 1km 和 1000km 之间,它们都围绕太阳运动。太阳系的小行星大部分存在于这个带内,因此地球上的流星也起源于这个小行星带^[9]。但是这个小行星带离地球很远,只有偏心率达到 57% 的小行星的轨道才能与地球轨道相交。威斯多姆 (Wisdom) 在平面与小偏心率近似下,把微分方程化为映射问题,并以木星周期采样。计算发现,在开始 20 万年内没有出现什么反常现象,小行星的偏心率通常在 10% 内振动。是什么原因促使它们出现大的反常偏心率? 威斯多姆发现,由于它们离木星很近,而木星是最大的行星,所以木星对它们的引力不能忽略,即小行星的运动属于三体运动。人们发现,当小行星的运动频率和木星的运动频率之比为有理数时,木星对小行星有强的扰动作用。长期的扰动使小行星作混沌运动。混沌运动可导致小行星的运动反常偏心率达 60%,其后果是小行星被从原来的轨道中甩出,从而导致其周期与木星周期之比为简单有理数的小行星的数目很少,这就是柯克伍德 (Kirkwood) 间隙,见图 1.8。它们中的部分小行星最终被抛入地球大气层中成为流星。威斯多姆还用数值积分方法求解微分方程,对单个试验行星积分到 10^6 年,证实了偏心率确实可以超过 57%。他的计算还能够解释“下午效应”,即下午观察到的流星是上午的两倍^[9]。在威斯多姆的研究工作之前,曾做过的最长的数值计算也不到 10^5 年。采用映射的办法把计算时间缩短为千分之一成千倍地缩短,就发现了混沌运动。

混沌不是破坏的代名词,有时候混沌是正常功能所必需的。比如图 1.9 的数据表明混沌有益于人们的健康,其上部显示的是三个人在 15 分钟内的心跳频率。第一个人是健康者,其节律为混沌吸引子;另外两个人是不健康者,其中第二个为近似常数心跳(像个不动点),第三个看起来像周期吸引子。混沌的好处似乎在于它能