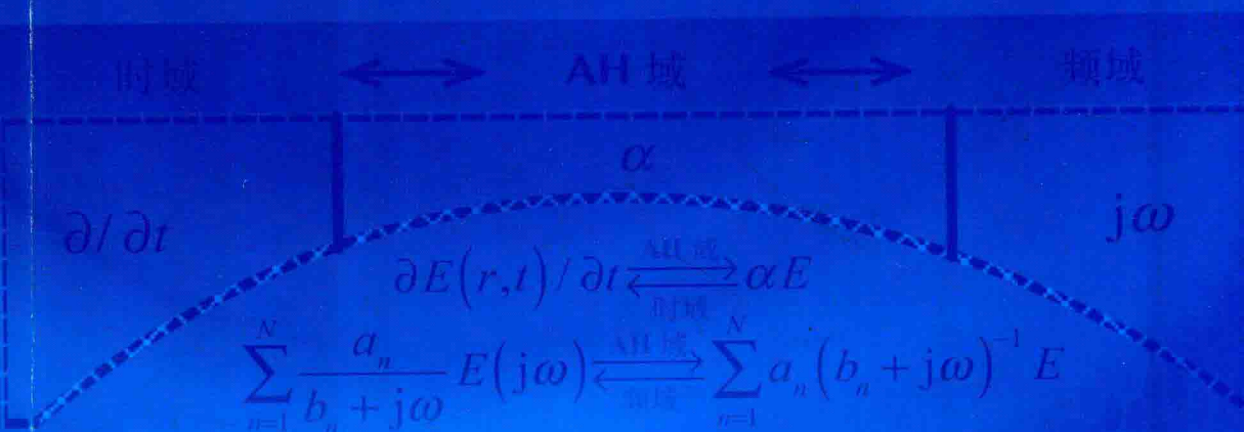


连带 Hermite 基无条件稳定 时域有限差分方法

石立华 黄正宇 著



科学出版社

连带 Hermite 基无条件稳定 时域有限差分方法

石立华 黄正宇 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

针对色散介质和带细微结构的电磁建模分析,本书提出了一类新的无条件稳定电磁场数值分析方法。该方法将 Associated Hermite 正交基(AH基)展开方法与传统时域有限差分(FDTD)方法相结合,不受传统FDTD方法稳定性条件的限制,能方便地处理色散介质问题。本书讨论了AH基函数的特性及基于AH转移矩阵的线性算子,介绍了AH FDTD方法的基本原理、按阶并行求解方法、迭代求解方法、吸收边界处理等实现技术,给出了在色散介质、传输线及周期结构分析中的应用,延伸探讨了在声学及传热学问题分析中的应用。

本书可作为电磁场专业研究生“电磁场数值分析”相关课程的参考书,也可供相关专业的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

连带 Hermite 基无条件稳定时域有限差分方法/石立华,黄正宇著. —北京:科学出版社,2018.6

ISBN 978-7-03-057132-8

I.①连… II.①石… ②黄… III.①电磁场-数值分析 IV.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 071739 号

责任编辑:惠 雪 沈 旭/责任校对:彭 涛

责任印制:张克忠/封面设计:许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市荣展印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年6月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018年6月第一次印刷 印张:9 1/2

字数:187 000

定价:89.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

针对色散介质和带细微结构的多尺度高效电磁建模,本书研究了一类新的无条件稳定电磁场数值分析方法。该方法将 Associated Hermite(AH) 正交多项式与求解麦克斯韦 (Maxwell) 方程组的时域有限差分 (FDTD) 方法相结合,为无条件稳定方法领域提供了新的研究途径。

本书共分六章。第 1 章为绪论,介绍了本书的研究背景和无条件稳定时域有限差分方法的发展现状,重点分析以 Laguerre FDTD 方法为代表的无条件稳定方法的发展状况,并给出了本书的主要工作、创新点及结构安排。第 2 章介绍了 AH 转移矩阵线性算子,提出了 AH 时频桥概念,并将此概念重新在信号重构、分解和系统辨识等问题中进行阐述和分析。第 3 章介绍了 AH 正交无条件稳定 FDTD 新方法,详细推导了方法的基本公式、系数矩阵和源项的更新方法和求解方案,并进行了算例分析和验证。第 4 章介绍了 AH FDTD 的若干改进方法,包括按阶并行求解的实现方案及验证、源项的引入方式、吸收边界的公式推导和吸收效果验证,以及两种高效方法的实现方法。第 5 章介绍了三维 AH FDTD 方法的实现,系统推导基于 CFS-PML 的三维方法公式,研究了系数矩阵快速生成方案及使带宽压缩的预处理方案、集总参数建模时的源项和系数矩阵更新方法和高效平面波的 AH 域实现方案。第 6 章介绍了 AH FDTD 方法在处理频域相关问题、周期结构、柱坐标系中的实现和应用,介绍方法在声学及传热学等跨学科领域的应用,最后讨论了 AH 系列正交基函数无条件稳定方法及新的按阶求解的无条件稳定方法。

本书得到了国家自然科学基金课题“碳纤维复合材料飞机蒙皮结构雷电防护性能表征方法研究”(51477183) 支持。本书可以作为电磁场专业研究生“电磁场数值分析”相关课程的参考书,也可供相关专业的科研人员参考。

石立华 黄正宇

2018 年 4 月 16 日

目 录

前言

第 1 章	绪论	1
1.1	时域有限差分法	2
1.2	无条件稳定时域有限差分方法	4
1.3	AH FDTD 无条件稳定时域有限差分方法	5
第 2 章	AH 转移矩阵线性算子	7
2.1	Associated Hermite 正交基函数	7
2.2	AH 系统转移矩阵	11
2.3	AH 线性算子	13
2.3.1	AH 微分算子	13
2.3.2	AH 有理算子	15
2.3.3	AH 平移算子	20
2.4	基于 AH 转移矩阵的系统辨识	22
2.4.1	AH 域一般有理系统辨识	23
2.4.2	AH 域一阶有理分式系统辨识	25
2.5	本章小结	26
第 3 章	AH FDTD 方法	28
3.1	AH FDTD 方法基本原理	28
3.2	AH FDTD 方法公式推导	29
3.2.1	传播区域基本公式	29
3.2.2	一阶 Mur 吸收边界	34
3.2.3	电流密度源	35
3.3	AH FDTD 方法算例验证	36
3.4	本章小结	37
第 4 章	AH FDTD 的若干改进方法	39
4.1	AH FDTD 按阶并行求解方法	39
4.2	AH FDTD 按阶并行的源项引入	44
4.2.1	硬源和软源	44
4.2.2	平面波的引入	44
4.3	AH FDTD 按阶并行吸收边界	51
4.3.1	一阶 Mur 吸收边界	51

4.3.2	Berenger PML 吸收边界	52
4.3.3	UPML 吸收边界	54
4.3.4	CFS-PML 吸收边界	56
4.4	AH FDTD 高效方法	59
4.4.1	基于交替方向迭代的 AH FDTD 高效方法及算例验证	59
4.4.2	基于空域特征值变换的高效 AH FDTD 方法及算例验证	63
4.5	本章小结	65
第 5 章	三维 AH FDTD 方法	66
5.1	三维 AH FDTD 方法基本公式推导	66
5.2	三维 AH FDTD 方法中系数矩阵的排布	73
5.2.1	系数矩阵的克罗内克积的表示	73
5.2.2	系数矩阵按 Yee 元胞排列的预处理技术	74
5.3	三维 AH FDTD 方法中系数矩阵和源项的更新	75
5.3.1	集总参数建模时源项和系数矩阵的更新	75
5.3.2	高效平面波引入时源项的更新	78
5.4	三维 AH FDTD 方法求解方案和算例验证	80
5.5	本章小结	82
第 6 章	AH FDTD 方法应用及拓展研究	83
6.1	一般色散介质问题	83
6.2	阻抗边界条件 INBCs 问题	86
6.3	场对埋地传输线耦合问题	91
6.3.1	AH 域场线耦合模型	92
6.3.2	埋地传输线耦合计算和分析	94
6.4	周期结构问题	99
6.5	柱坐标系中的实现	104
6.6	AH FDTD 方法在其他学科领域的应用	108
6.6.1	声学领域的 AH FDTD 方法	108
6.6.2	传热学领域的 AH FDTD 方法	109
6.7	其他正交基函数无条件稳定 FDTD 方法	113
6.7.1	Legendre FDTD	113
6.7.2	Chebyshev FDTD	117
6.7.3	Laguerre FDTD	121
6.7.4	Hermite Rodriguez FDTD	122
6.8	本章小结	127
参考文献		128
索引		140

第1章 绪 论

电磁学的发展历程大致可以分为实验电磁学(1864年以前)、经典电磁学(1864~1950年)和计算电磁学(1950年至今)三个阶段^[1]。实验电磁学建立在对实验的感性认识的基础上,这一阶段的标志性工作包括库仑、安培和法拉第等实验定律。1864年,麦克斯韦(Maxwell)建立了电磁场基本方程——Maxwell方程组,揭示了自然界一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律,使电磁学真正上升为一门理论,也标志着电磁学迈入经典电磁学的发展阶段。电子计算机发明之前,人们通过应用经典电磁理论求解具有规则边界简单问题(如球、圆柱、平面等)的解析解,获得电磁场问题的物理或工程上的解释或认知。这种方法效率高且可得到问题的准确解,如分离变量法、格林函数法、保角变换等,但适用范围太窄。为求解较复杂的电磁场问题,人们发展了渐进方法,如高频近似方法等。然而,在面对工程电磁问题中越来越复杂的边界条件时,解析或渐进方法往往无能为力。20世纪50年代以来,电子计算机技术飞速发展,计算机凭借其强大的计算能力取代了依赖纸和笔的传统计算模式,成为科学和工程技术发展中不可或缺的计算分析工具。

在计算机辅助下,电磁场数值计算方法能够求解形状复杂且不规则的实际问题,其解在一定程度上满足了实际应用的精度。随着电磁场数值计算方法在实际工程问题中的广泛应用,计算电磁学研究领域已成为现代电磁理论研究的主流^[2~4]。概括来讲,计算电磁学以电磁场理论为基础,以数值计算技术为手段,运用计算数学提供的各种数值方法,解决复杂电磁场理论和工程问题,是目前电磁场与微波技术学科中十分活跃的一个研究领域。从求解麦克斯韦方程的方法角度,可分为解析法、渐进法和数值法三类。解析法是指严格求解麦克斯韦方程的方法,通常仅适用于理想的边界条件,如分离变量法只能在十一种可作变量分离的坐标系下进行求解。渐进法是指在极限条件下求解麦克斯韦方程的近似形式,如低频近似下退化为准静态问题和电路问题,高频近似下的光学和准光学方法,包括几何光学法、物理光学法、几何/物理/一致绕射方法、高斯波束法等。而大部分计算电磁学方法则被归于数值法,即用离散化方法通过计算机程序直接求得麦克斯韦方程及其衍生方程的数值解^[3]。数值法可分为频域(frequency domain)方法和时域(time domain)方法两大类,频域方法基于时谐微分和积分方程,如有限元(finite element method, FEM)方法^[5]、矩量(method of moments, MoM)法^[6]等,这类方法一次只能求得一个频率点上的响应,多用于窄带问题。当面对瞬态电磁问题时,需要通过对多个频率采样值的傅里叶逆变换得到。时域方法按照时间步进得到相关场

量,如时域有限差分 (finite difference time domain, FDTD) 法^[7]、时域有限元方法^[8]、时域有限体积法^[9]、时域多分辨分析法^[10]、时域积分方程法^[11]、时域间断伽辽金 (Galerkin) 方法^[12]、时域谱元法^[13]、时域抛物线方程方法^[14,15]、时域辛算法^[16]等,这类方法通常适用于求解在外界激励下场的瞬态变化过程。在求解复杂结构超宽带响应时,时域方法可以一次性获得时域超宽带响应数据。

各种数值计算方法都有优缺点,一个复杂的问题往往难以依靠一种方法得到很好的解决,需要将多种方法结合起来,互相取长补短。因此,各种方法的协同和集成技术日益受到人们的重视,并成为研究的热点之一。

1.1 时域有限差分法

时域有限差分 (FDTD) 法是 1966 年 Kane S. Yee 提出的一种求解电磁场问题的数值方法,核心思想是直接将 Maxwell 方程中的两个旋度方程转化为差分形式,在空间和时间上离散取样时域电磁场,得到迭代方程组,数值模拟电磁波传播及电磁波与散射体的作用^[7,17-20]。由于 FDTD 法的出发点是概括电磁场普遍规律的 Maxwell 方程,就预示着此法具有最广泛的适用性,且具有原理简单、容易掌握、程序通用性强和一次计算可得宽频带响应等突出优点,为电磁理论和工程界提供了强有力的分析工具。

经过近几十年的发展, FDTD 法已经初步形成了一套比较完善的方法体系,应用及研究方向越来越广泛,如目标电磁散射与逆散射分析、微波电路和高速集成电路的时域分析、电磁兼容、天线辐射特性计算、瞬态电磁场研究、生物电磁剂量学等。FDTD 法在计算方法上取得了大量成果,主要体现在以下两个方面。

1) 传统 FDTD 法的发展

首先是吸收边界条件 (absorbing boundary condition, ABC)。吸收边界条件在 FDTD 法发展过程中占有重要地位,因为在模拟开放区域的电磁问题时,必须在计算区域的截断边界处引入吸收边界条件。吸收边界从最初简单的插值边界,到后来广泛使用的 Mur 吸收边界^[21],以及近几年发展的完全匹配层 (perfectly matched layer, PML) 吸收边界,其吸收效果越来越好。特别是 Berenger 于 1994 年提出 PML 吸收边界条件^[22]后,人们在此基础上进行了大量研究。如 Chen 等提出了修正的完全匹配层 (MPML) 吸收边界条件^[23],提高了 PML 对凋落波的吸收能力。Fang 和 Wu 提出了适用于有耗媒质的 GPML^[24]。Sacks 等提出各向异性材料 PML^[25]等。Kuzuoglu 和 Mittra 在 PML 基础上提出了复频率参数 PML(CFS-PML)^[26],但是该边界条件不便于实现。在此基础上,利用卷积方法, Roden 和 Gedney 提出了一种改进的 CFS-PML 吸收边界条件——Convolution PML(CPML)^[27],

简化了 CFS-PML。CPML 法不仅结合了上述各匹配层的优点,而且实现简单、通用性强。

其次是网格剖分技术。传统的 FDTD 法通常采用均匀的矩形网格,由于 FDTD 差分格式模拟的最小尺寸为一个网格,对于小于一个网格的尺寸,需要将其近似为一个网格,这就带来了很大的误差。在模拟不规则物体的电磁问题时,采用梯形的边界来近似代替光滑的边界,这种近似需要在网格足够小的情况下才能获得高精度的解,必然又增加了计算内存和时间,而且常规 FDTD 法很难处理电大尺寸散射体上局部电小尺寸的问题。针对这些缺点,人们提出了许多网格改进的方法。1987 年, Kasher 和 Yee 提出了亚网格技术。Holland^[28,29]先后研究了正交曲线坐标和非正交曲线坐标系中的有限差分法。在不改变网格剖分的前提下, Mei 等^[30]首先提出了共形网格技术。Taflov 等^[31]从 Maxwell 方程的积分形式出发,提出了环路积分法。在计算区域使用非均匀网格算法中, Kunz 和 Simpson 提出了局部网格细化技术^[32]。在网格剖分技术中, 1998 年 Monorchio 和 Mittra^[33]提出了基于 FDTD 法和时域有限元法相结合的亚网格技术。另外,还出现了三角形网格、六边形网格以及平面型广义 Yee 网格。最后,还有诸如激励源设置问题方面的研究^[34,35]、近场到远场的变换技术^[36]、集总参数元件的处理问题^[37]等,都得到了较好的解决。

2) 在传统基础上出现的各种变形算法

传统 FDTD 算法的稳定性条件限制了空间步长和时间步长选择的自由度,使该算法在分析具有细小的孔、缝、薄层介质的结构时,所需内存和计算量剧增。为突破或减弱稳定性条件对传统 FDTD 法时间步长的限制,无条件、弱条件稳定算法,正交基函数展开的无条件稳定算法以及显示无条件稳定算法等相继提出。这部分内容将在下一节继续讨论。另外, FDTD 法在分析计算一些特殊结构的物体时也显得异常困难,因此许多学者在传统 FDTD 算法的基础上提出了许多新的变形算法,以适应不同的需要。例如,旋转对称时域有限差分 (BOR-FDTD) 法是专门用于分析计算具有旋转对称结构特性物体的一种算法^[7]。该算法将电磁场进行傅里叶分解,使三维问题转换到二维,提高了计算效率,适用于处理电大尺寸和薄介质涂层问题。为解决物体结构表面为曲面的电磁问题, Holland^[38]、Madsen 和 Fusco 等对非正交曲线坐标系中的 FDTD 法进行了讨论。此外,还有适用于色散介质的 FDTD 法^[39],减少场量存储的 R-FDTD 法^[40,41]。随着现代电子计算机技术的发展, FDTD 的并行算法已成为一个全新课题,引起了学者们的极大兴趣^[42]。目前 FDTD 法与其他算法 (如矩量法、有限元法等) 的混合是计算电磁学的一个重要发展方向。如时域间断伽辽金方法 (DGTD) 结合了 FDTD 显式迭代和 FEM 网格精确拟合目标几何形状的特点,是一种有广阔应用前景的计算方法。近十余年,国内外同行对该方法已进行了多方面的研究^[43-48]。

1.2 无条件稳定时域有限差分方法

时域有限差分方法对具有多尺度特性且含有精细结构的电磁模型进行模拟时,由于受柯西稳定性条件约束,传统的 FDTD 方法计算效率大大降低。为提高 FDTD 方法求解这类问题的计算效率,许多专家和学者在减弱或消除 FDTD 柯西稳定性条件 (CFL) 约束方面做了大量工作。其中,无条件稳定的 FDTD 方法是重要的研究方向。

1956 年,Peaceman 和 Rachford 提出了著名的交变隐式差分方向方法 (简称 ADI)。1999 年,Namiki 将此方法应用于时域有限差分方法,提出了交替方向隐式 (alternating direction implicit) ADI FDTD 方法^[49],突破了时间步长的限制,节省了计算时间,提高了 FDTD 方法的计算效率。2000 年,Zheng 等^[50]将 ADI FDTD 方法推广到三维,从理论上证明了此方法的无条件稳定性,并初次阐述了时间步长由精度决定的观点。其后,有学者提出 Crank Nicolson(CN) 格式的 FDTD 方法^[51],被视为 ADI 方法上的一次大进步。之后,ADI FDTD 方法得到了广泛的关注和研究^[52-60]。但也有报道指出,虽然 ADI FDTD 方法实现了无条件稳定的计算,但时间步长的增大会使其数值色散增大,从而降低解的精度^[61,62]。

近年来,一种根据流体力学中滤除不稳定高次模的方法被引入时域有限元 (time domain finite element method, TDFEM)^[63]与显式 FDTD 的计算,实现了显式 FDTD 的无条件稳定计算^[64,65],该方法避免了 ADI 中烦琐矩阵逆的求解,大大提高了计算效率。

2003 年,Chung 等提出一种基于加权 Laguerre 正交多项式和 FDTD 相结合的新无条件稳定 FDTD 方法——Laguerre FDTD 方法^[66]。该方法先通过加权 Laguerre 正交多项式展开时域 Maxwell 方程组的电磁场分量,然后利用伽辽金原理消除时间变量,空域采取和 FDTD 相同的差分处理,得到关于展开系数的隐式差分方程,最后通过求解展开系数来重构待求的时域场分量。其独特的按阶求解的策略使得它成为多年以来唯一的正交基函数展开的无条件稳定方法。并且由于其在数值色散和计算方面要优于其他无条件稳定方法,受到人们越来越多的关注^[67-106],主要表现在以下几个方面。

(1) 方法体系的完善。首先,针对各种吸收边界条件进行研究,如文献 [67]~文献 [70] 针对原始方法中的一阶 Mur 吸收边界计算精度的不足,分别提出了二阶 Mur 吸收边界、UPML 吸收边界、二维分裂场的 Berenger 完全匹配层和 CFS-PML 吸收边界的实现方法。其次,文献 [71]~文献 [73] 分别在分段计算技术、数值色散分析及基函数参数选取方面进行了细致的研究。

(2) 高效方法的研究。由于该方法属于隐式方法,其差分方程构成了一个大型

的稀疏矩阵方程,稀疏矩阵的 LU 分解对计算资源和内存消耗需求巨大,使得对较大的计算空间模拟的效率优势不明显,甚至无法实现,因此许多学者提出了对该方法进行高效实现的改进。其中,中国人民解放军陆军工程大学陈彬教授团队在此方面做出了突出贡献:首先,易韵和陈彬等将电场散度方程引入 Laguerre FDTD 中,有效降低了计算内存,提高了计算效率^[74]。文献 [75] 在此基础上将其应用在非均匀平行波导中。然后,段艳涛和陈彬等通过引入高阶微扰项将传统的大型稀疏矩阵转化为三对角方程求解,彻底突破了该方法在计算内存消耗上的瓶颈,同时提高了计算效率,实现了 Laguerre FDTD 方法的大跨越发展^[76-80]。接着,陈正、张波和陈彬等在精度和效率方面将高效方法进一步完善和发展^[81-83]。

(3) 方法的拓展研究。该方法在对线性色散介质建模分析^[84-88]、精细结构下周期结构的建模分析^[89-91]、旋转对称体结构建模^[92-94]以及集成电路信号完整性分析^[95,96]等多尺度结构电磁场领域也有较深的研究。另外,该方法的快速发展也离不开和其他时域技术的交叉融合与混合发展。文献 [97] 和文献 [98] 分别将该方法结合有限元和有限积分方程方法求解电磁场散射问题。而文献 [99] 将该方法和时域多分辨分析 (multiresolution time-domain, MRTD) 相结合进一步减小了色散误差,同时实现了无条件稳定。除此之外,共型网格技术^[100]、非正交网格技术^[101]、无网格技术^[102]和阻抗边界条件技术^[103]结合自身优点与 Laguerre FDTD 方法相结合,同样实现了按阶步进的无条件稳定。

随着 Laguerre FDTD 正交无条件稳定方法的快速发展,人们也开始关注其他基函数。2006 年,文献 [104] 提出了包括 ADI FDTD 方法、CN FDTD 方法、MoM 法、TLM 法、MRT 法、PSTD 法和 Laguerre FDTD 方法在内的所有时域有限差分方法都能统一的“空域差分、时域矩量法”的概念。也就是说,如果有其他时域基函数也能展开 Maxwell 方程组并进行求解,那么它也应该满足这个统一的定义。同年,文献 [105] 以三角基函数在时域进行展开,实现了无条件稳定的求解。随后,文献 [106] 提出了加权 Laguerre 基函数是能和 FDTD 相结合的独一无二的基函数,因为只有它能实现按阶步进。那么其他正交基函数如果不按阶求解如何实现无条件稳定的 FDTD 计算呢?

1.3 AH FDTD 无条件稳定时域有限差分方法

Associated Hermite(AH) 正交基函数在信号处理领域有着广泛的应用和研究^[107],然而它从来没有和 FDTD 相结合过,虽然文献 [106] 也曾提到它不适合作为时域基函数按阶求解,但我们于 2014 年证明了它能够采取“空间阶数联合求解”的策略实现无条件稳定的 FDTD 计算——AH FDTD 方法^[108]。紧接着该方法实现了按阶并行求解的计算方案^[109],进一步提高了方法的计算性能,并在多个方

向进行了拓展研究^[110-114], 因而进一步推动了正交无条件稳定方法的发展。

AH FDTD 实现的基本过程为: 先通过 AH 基函数对时域 Maxwell 方程组进行展开, 利用伽辽金原理消除时间变量, 而后联立空间和阶数以嵌套矩阵系数为基本单元构建有限维 AH 域的隐式方程, 并通过 LU 分解进行求解, 最后通过 AH 域反变换得到电磁场时域结果。和 Laguerre FDTD 方法相比, 它也属于文献 [104] 提出的统一矩量法的范畴。但由于基函数的性质不同, 公式推导的过程和求解的策略也不同, 因此其具有独有的特点:

(1) 由于基函数微分展开系数的“串阶”特点^[108], 文献 [109] 提出用特征值分解的方法在原始的嵌套矩阵求解的基础上按阶并行求解的策略, 实现方程阶与阶之间的解耦。由于解耦的方程可以实现并行的 LU 分解求解计算, 因此改进的方法不仅使得计算内存消耗大大减少, 计算效率也进一步提高。同时还实现了电磁场在空间和阶数的独立求解。

(2) AH 基函数最具时频紧支基函数的特点^[115], 使得 AH FDTD 方法求解时未知数量显著减少; 另外, 其时频基同型的特点^[116]使得它在求解展开系数时能够直接重构时域或者频域的结果, 减小 FFT 带来的误差, 提高计算精度。

(3) 通过引入 AH 转移矩阵^[117], 建立 AH 域“系统”转移关系, 并使其成为微分矩阵的函数。这一特点将能够使该方法在频域相关的 FDTD 问题中得到直接和更广泛的应用。这包括对一般色散介质散射问题的分析^[110]、平面波的引入^[111]、UPML 吸收边界的处理^[112]和考虑色散效应的场对传输线耦合分析^[113]等。

正交基函数展开的 FDTD 方法是无条件稳定研究的新方向。其中, Laguerre FDTD 的按阶求解策略虽是独一无二的, 但 AH FDTD 采取了与之不同的“空间阶数联合求解”, 并最终实现了按阶并行求解的方案, 给正交基函数无条件稳定方法的研究带来了新思路。实际上, 最新研究发现, Laguerre FDTD 方法并不是唯一能实现按阶步进求解的方法^[118], 也许还存在更多的基函数能实现像 AH FDTD 方法的按阶并行求解, 这些内容将在本书第 6 章进行介绍。

第2章 AH 转移矩阵线性算子

本章阐述 Associated Hermite(AH) 正交基函数及相关性质, 在 AH 微分转移矩阵的基础上提出 AH 转移矩阵线性算子以及“时频桥”的概念。从线性空间的角度重新理解信号重构、分解和系统辨识等内容, 为后续无条件稳定 FDTD 方法的提出奠定基础。

2.1 Associated Hermite 正交基函数

AH 正交基函数由 Hermite 多项式和高斯函数加权得到, 满足完备性和正交性。其时频基同型和最具时频紧支基函数的特点使其在信号处理、图像分析和生物工程等领域有着广泛的研究和应用。

AH 正交基函数为^[119-122]

$$\phi_q(t) = \frac{1}{\sqrt{2^q q! \sqrt{\pi}}} e^{-t^2/2} H_q(t) \quad (2.1)$$

式中, $H_q(t) = (-1)^q e^{t^2} \frac{d^q}{dt^q} (e^{-t^2})$ 为 Hermite 多项式。对于各阶基函数的数值计算, 如果采取直接赋值运算比较耗时, 但可采取以下递归形式计算:

$$\begin{cases} H_0(t) = 1 \\ H_1(t) = 2t \\ \vdots \\ H_q(t) = 2tH_{q-1}(t) - 2(q-1)H_{q-2}(t), q \geq 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

前几阶的正交基函数如图 2.1 所示。

基函数微分表达式为^[120]

$$\frac{d}{dt} \phi_q(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) & (q=0) \\ \sqrt{\frac{q}{2}} \phi_{q-1}(t) - \sqrt{\frac{q+1}{2}} \phi_{q+1}(t) & (q \geq 1) \end{cases} \quad (2.3)$$

若某个场量 $u(r, t)$ 可以由该基函数展开

$$u(r, t) = \sum_{q=0}^{\infty} u_q(r) \phi_q(t) \quad (2.4)$$

式中, 展开系数 $u_q(r)$ 可通过内积运算 $\langle, \rangle$ 得

$$u_q(r) = \langle u(r, t), \phi_q(t) \rangle = \int u(r, t) \phi_q(t) dt \quad (2.5)$$

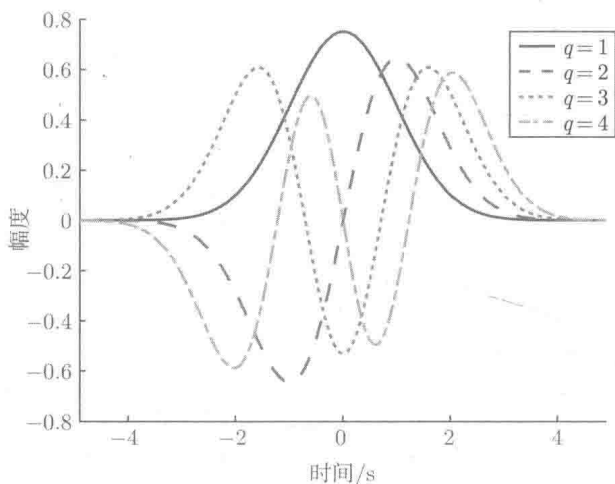


图 2.1 前几阶 Associated Hermite 正交基函数

则其微分形式能写成

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} u_{q+1}(r) - \sqrt{\frac{q}{2}} u_{q-1}(r) \right) \phi_q(t) \quad (2.6)$$

式中, 定义 $u_{-1}(r)=0$ 。上式的具体推导如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} u_q(r) \frac{d}{dt} \phi_q(t) = u_0(r) \frac{d}{dt} \phi_0(t) + \sum_{q=1}^{\infty} u_q(r) \frac{d}{dt} \phi_q(t) \\ &= u_0(r) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) \right) + \sum_{q=1}^{\infty} u_q(r) \left(\sqrt{\frac{q}{2}} \phi_{q-1}(t) - \sqrt{\frac{q+1}{2}} \phi_{q+1}(t) \right) \\ &\stackrel{m=q-1}{=} u_0(r) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) \right) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1}(r) \left(\sqrt{\frac{m+1}{2}} \phi_m(t) - \sqrt{\frac{m+2}{2}} \phi_{m+2}(t) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1}(r) \sqrt{\frac{m+1}{2}} \phi_m(t) + u_0(r) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) \right) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1}(r) \left(-\sqrt{\frac{m+2}{2}} \phi_{m+2}(t) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中,

$$\begin{aligned}
 & u_0(r) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) \right) + \sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1}(r) \left(-\sqrt{\frac{m+2}{2}} \phi_{m+2}(t) \right) \\
 & \stackrel{k=m+2}{=} u_0(r) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_1(t) \right) + \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-1}(r) \left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \phi_k(t) \right) \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1}(r) \left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \phi_k(t) \right) \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

将式 (2.8) 代入式 (2.7) 得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1}(r) \sqrt{\frac{m+1}{2}} \phi_m(t) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1}(r) \left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \phi_k(t) \right) \\
 & \stackrel{m=q, k=q}{=} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} u_{q+1}(r) - \sqrt{\frac{q}{2}} u_{q-1}(r) \right) \phi_q(t) \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

时频基同型的特点是指 AH 基函数为傅里叶变换的特征函数, 其频谱为与时域相似形状的函数:

$$F(\phi_q(t)) = (-j)^q \sqrt{2\pi} \phi_q(\omega) \tag{2.10}$$

这个特点为后文 AH 转移矩阵的计算和 AH FDTD 方法处理频率相关问题奠定了基础。

紧支撑特点是 AH 基函数的另一个重要性质^[121]。从图 2.1 可直观地看出, 虽然 AH 基函数的自变量范围为 $-\infty$ 到 $+\infty$, 但主要集中在有限区间, 区间大小会随着阶数 Q 的增大而增大。再结合式 (2.10), 可以看出频域也是有限支撑的, 且区间也会随着阶数的增长而增长。但时频区间的增幅都会随着阶数的增加而慢慢减少, 直到一种“极限”的有限支撑范围。根据这个最终的支撑范围, 就能得到理想的尺度因子 l 和阶数 Q , 对任意有限支撑的信号进行分解和重构。这样的阶数在所有基函数中是最少的, 因此最具紧支撑^[121]。一般来说, 这两个参数可以根据实际问题的需要设定, 比如待分析的问题时频支撑区间为 T_s 和 F_s , 则有限的 Q 维 AH 基函数空间的时频支撑区间 T_Q 和 F_Q 应覆盖这些区间, 即满足 $T_s < T_Q$ 和 $F_s < F_Q$ 。而 T_Q 和 F_Q 可根据以下两个式子约束^[122]:

$$T_Q \approx 2l \left(\sqrt{\pi Q / 1.7} + 1.8 \right) \tag{2.11}$$

$$F_Q \approx \frac{\sqrt{\pi Q / 1.7} + 1.8}{2\pi l} \tag{2.12}$$

因此, 可根据这两个约束关系得到最优的尺度因子 l 和阶数 Q 。进一步, 可以从图 2.2 中尺度因子 l 和阶数 Q 的动态变化关系来说明。由于从式 (2.11)~式 (2.12)

可得到有限 Q 维 AH 空间的时宽带宽积为 $W_Q = T_Q F_Q \approx \left(\sqrt{\pi Q / 1.7} + 1.8 \right)^2 / \pi$, 因此, 可以做出图 2.2 所示的不同阶数的曲线簇。若问题所需的时宽和带宽分别为图中的 T_s 和 F_s , 时宽带宽积就为 $W_s = T_s F_s$, 则覆盖其分布的最小阶曲线能找到, 这样最小的 Q 也就能找到, 同时也能找到使得基函数的时宽带宽恰好等于问题所需时宽带宽的尺度因子 l , 如图中最小的 Q 为 2, 此时计算出 l 为 0.12。此时的阶数和尺度因子应该最优。若减小或增大尺度因子, 则都需牺牲一定的阶数来覆盖问题所需要的时频区间, 如图中 $l = 0.09$ 时, Q 至少取 6; 而 $l = 0.18$ 时, Q 至少取 8。

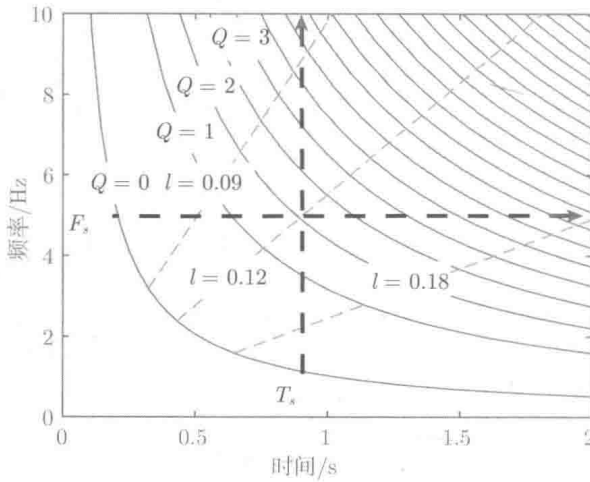


图 2.2 平移和尺度因子参数选择关系图

如果对于因果且有限支撑的信号, 像瞬态电磁场的信号, 则需另外再引入一个平移因子 T_f , 以实现对其分解和重构^[122]。对于平移因子 T_f 一般可以选取 $T_f = T_s/2$ 。最终, 若经过平移和尺度变换之后的时间变量为 $\tilde{t} = (t - T_f)/l$, 则式 (2.4)~式 (2.6) 可以依次修改为

$$u(r, t) = \sum_{q=0}^{\infty} u_q(r) \phi_q(\tilde{t}) \quad (2.13)$$

$$u_q(r) = \frac{1}{l} \int u(r, t) \phi_q(\tilde{t}) dt \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{1}{l} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{q+1}{2}} u_{q+1}(r) - \sqrt{\frac{q}{2}} u_{q-1}(r) \right) \phi_q(\tilde{t}) \quad (2.15)$$

图 2.3 为某高斯微分信号及其微分信号展开和重构的示意图。原始信号如图 2.3(a) 所示, 其微分信号如图 2.3(b) 所示, 它们的展开系数可以通过式 (2.14) 计

算得到，其结果分别如图 2.3(c) 和图 2.3(d) 所示。利用这些展开系数可以完美地重构原始信号及其微分信号，这可以从图 2.3(a) 和图 2.3(b) 中看出。进一步，图 2.3(b) 中还给出了原始信号先通过频域微分算子 $j\omega$ ，然后经过逆傅里叶变换 (IFFT) 得到的微分信号以及直接由图 2.3(c) 中的展开系数和式 (2.15) 重构得到微分信号的计算结果，可以看出这两种方法和原始微分信号保持一致。而后面这种直接通过 AH 展开系数计算微分信号或者其展开系数的过程是接下来关注的重点，也是 AH FDTD 方法开展的基础。

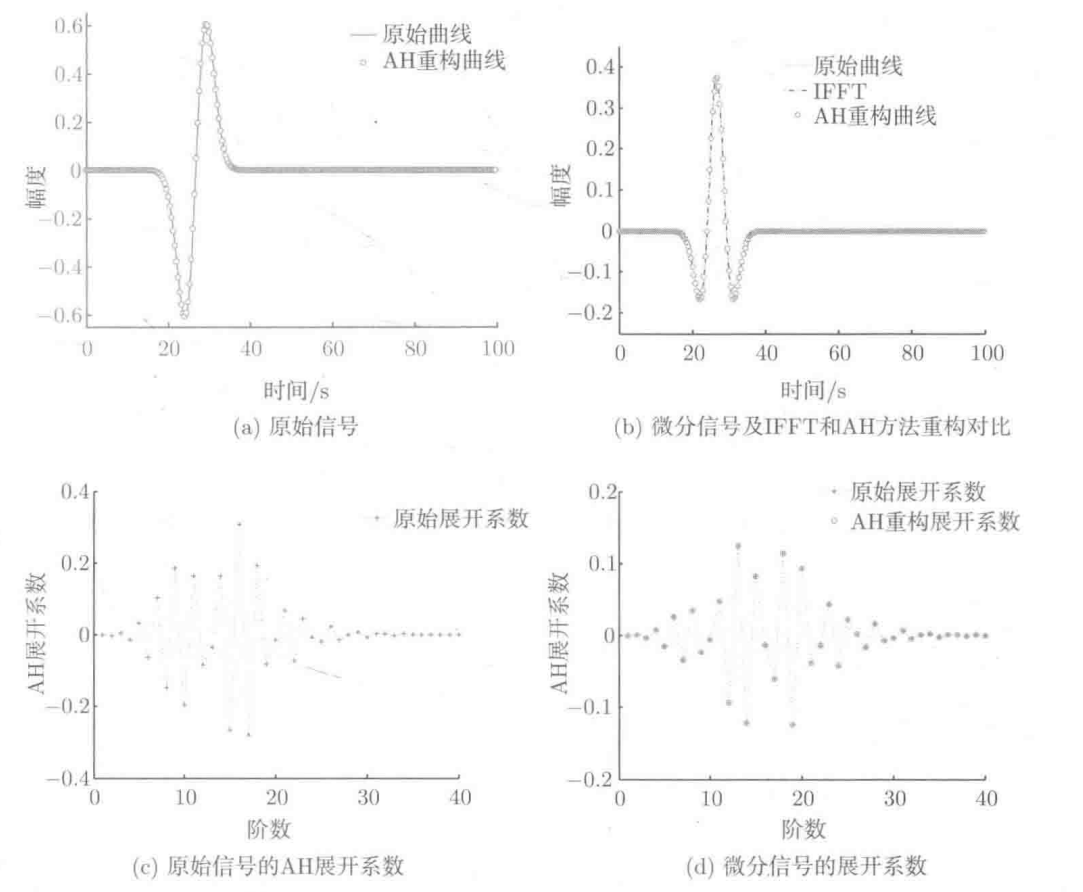


图 2.3 高斯微分信号及其微分信号展开和重构以及各自 AH 域展开系数示意图

2.2 AH 系统转移矩阵

2.1 节中描述的直接通过信号的 AH 域展开系数重构其微分信号的过程实质上表征了一种微分系统的转移关系，本节在此基础上讨论更一般的有限维 AH 基函数空间下具有“时频桥”功能的系统转移矩阵，它代表了更一般的系统转移关系。