时代云图 SHI DAI YUN TU 理工社

【张宇数学教育系列丛书】 2019

张宇考研数学题源探析经典1000题

（解析分册·数学一）

主编○张宇

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

时代云图 SHI DAI YUN TU 理工社

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学题源探析经典1000题

（解析分册·数学一）

主编◎张宇

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学一 / 张宇主编 . —北京:北京理工大学出版社,2018. 3(2018. 4 重印)

ISBN 978－7－5682－5365－9

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第040433号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印　　张 / 19.5
字　　数 / 487千字
版　　次 / 2018年3月第1版 2018年4月第2次印刷
定　　价 / 66.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 黄拾三
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

Contents 目录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第1章　函数、极限、连续

A组

一、选择题

1.1.(D)【**解析**】对于命题①,由数列收敛的定义可知,若数列$\{u_n\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon > 0$,存在自然数N,当$n > N$时,恒有$|u_n - A| < \varepsilon$.

可知当$n_i > N$时,恒有$|u_{n_i} - A| < \varepsilon$.

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于A,可知命题正确.

对于命题②,不妨设数列$\{x_n\}$为单调增加的,即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A,则对任意给定的$\varepsilon > 0$,存在自然数N,当$n_i > N$时,恒有

$$|x_{n_i} - A| < \varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调增加的数列,对于任意的$n > N$,必定存在$n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1}$,有

$$-\varepsilon < x_{n_i} - A \leqslant x_n - A \leqslant x_{n_{i+1}} - A < \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

可知数列$\{x_n\}$收敛于A.因此命题正确.

对于命题③,因$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$,由极限的定义可知,对于任意给定的$\varepsilon > 0$,必定存在自然数$N_1, N_2$:

当$2n > N_1$时,恒有$|x_{2n} - A| < \varepsilon$;

当$2n+1 > N_2$时,恒有$|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$.

取$N = \max\{N_1, N_2\}$,则当$n > N$时,总有$|x_n - A| < \varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.可知命题正确.

答案选(D).

1.2.(C)【**解析**】令$u(x) = \dfrac{2}{x}$,$v(x) = \dfrac{1}{x}$,当$x \to 0$时可排除(A);令$u(x) = v(x) = \dfrac{1}{x}$,当$x \to 0$时可排除(B);令$u(x) = \dfrac{1}{x}$,$v(x) = -\dfrac{1}{x}$,当$x \to 0$时可排除(D).

对于选项(C),使用反证法.

设$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在,由条件$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,可推知$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)+g(x)}{2}$,$\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-g(x)}{2}$均存在,与题意矛盾,故若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$必不存在.

1.3. (B) 【解析】若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\cdot\frac{1}{x_n}=0$，故(B)正确.

若取$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=1$，则满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，且$\{x_n\}$在$n\to\infty$时是无穷小、有界、单调递减的，但$\{y_n\}$不是无穷小，排除(A)，(C)，(D).

1.4. (D) 【解析】令$g(x)=\varphi[\varphi(x)]$，注意$\varphi(x)$是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x),$$

因此$\varphi[\varphi(x)]$为奇函数. 同理可得$f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$均为偶函数. 答案选(D).

1.5. (B) 【解析】注意在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，$\sin x$是增函数，$\cos x$是减函数.

任取$x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$x_1<x_2$，有$\cos x_1>\cos x_2$，所以$\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即$f(x)$是减函数；由于$\sin x_1<\sin x_2$，所以$\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即$\varphi(x)$是减函数.

【注】复合函数的单调性：若$f(x)$是增函数，$\varphi(x)$是减函数，则$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$是增函数，而$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$是减函数.

1.6. (D) 【解析】$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.7. (D) 【解析】如$\alpha(x)=x\sin\frac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当$x\to 0$时，二者都是无穷小. 但$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，故$\alpha(x)$和$\beta(x)$无法比较阶的高低.

1.8. (A) 【解析】对于任意给定的正数M，总存在点$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，当$n>\frac{2M-\pi}{4\pi}$，使$|f(x_n)|=\left|2n\pi+\frac{\pi}{2}\right|>M$，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界. 排除(B)，(D).

对于任意给定的正数M，无论x取多么大的正数，总有$x_n=|2n\pi|>x$（只要$|n|>\frac{x}{2\pi}$），使$f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当$x\to\infty$时$f(x)$不是无穷大，排除(C).

【注】千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.9. (B) 【解析】令$\frac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(\alpha-1)t}=\frac{1}{\alpha-1}\ (\alpha\neq 1).$$

1.10. (D) 【解析】设$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时为无界变量，不是无穷大. 令$g(x)=x$，当$x\to 0$时为无穷小，可排除(A). 当$x\to 0$时，令$f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{1}{x}$，可排除(B)，(C).

对于(D)，由于当$x\to x_0$时，$f(x)$不是无穷大，故必存在以x_0为极限的数列$\{x_n\}$使得$f(x_n)$为有界量，又有$g(x)$在$x=x_0$的某邻域内有界，设该邻域为U，$\{x_{k_i}\}=\{x_n\}\cap U$，故$\{x_{k_i}\}$同样以$x_0$为极限，此时$f(x_{k_i})g(x_{k_i})$为有界量. 故当$x\to x_0$时，$f(x)g(x)$必不是无穷大.

1.11.(B) **【解析】方法一**　反证法.若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续,则

$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$

也在点 x_0 处连续,与已知矛盾.

方法二　排除法.设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,而 $f(x)\sin x\equiv 0$ 在 $x=0$ 处连续.若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,但 $f^2(x)=1$, $|f(x)|=1$ 都在 $x=0$ 处连续.故可排除(A),(C),(D).

1.12.(A) **【解析】**不妨设 $f(x)$ 单调增加,且存在 $M>0$ 使得任意 $x\in(a,b)$ 有 $|f(x)|\leqslant M$,对任一点 $x_0\in(a,b)$,当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在;当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界,故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,故 x_0 只能是第一类间断点.

二、填空题

1.13. na **【解析】**令 $x=-1$,则 $f(1)=f(-1)+f(2)$,因 $f(x)$ 是奇函数,得到 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$.

再令 $x=1$,则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$,现用第二数学归纳法证明 $f(n)=na$.

当 $n=1,2,3$ 时,已知或者已证.假设 $1\leqslant n\leqslant k$ 时,有 $f(n)=na$.当 $n=k+1$ 时,$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$.故对一切正整数 n,有 $f(n)=na$.令 $x=0$,则 $f(2)=f(0)+f(2)$,即 $f(0)=0=0\cdot a$.又 $f(x)$ 是奇函数,故对一切负整数 n 有 $f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$.所以对一切整数 n,均有 $f(n)=na$.

1.14. $\mathrm{e}^{\frac{1}{100}x^2}$ **【解析】**$100^x=\mathrm{e}^{x\ln 100}$,$\log_{10}x^{100}=100\log_{10}x$.当 x 充分大时,有重要关系:$\mathrm{e}^{\alpha x}\gg x^\beta\gg\ln^\gamma x$,其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$,故本题填 $\mathrm{e}^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.15. 0 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

1.16. 2 **【解析】**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2.$$

1.17. -3 **【解析】**当 $x\to 0$ 时,

$$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2,$$

$$\frac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim 6x^2,$$

故 $a=-3$.

三、解答题

1.18.【解】因为 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$,又

$$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}},\ \lim_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.19.【解】(1) 当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\sin x\sim\frac{x}{n}$，故原极限$=\frac{1}{n}$.

(2) 这是“1^∞”型未定式极限，可用公式$\lim\limits_{x\to 0}u^v=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}v(u-1)\right\}$来计算，事实上

$$\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1(u\to 1).$$

故原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

(3) 这是“$\infty-\infty$”型未定式极限，首先通分变成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},$$

或利用等价无穷小代换$e^x-1\sim x(x\to 0)$，则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+xe^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2e^x+xe^x)=2.$

因为等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$是“$1^\infty$”型未定式极限，可以将数列转化为函数求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{6}.$

【注】投命题者所好，当狗 → 0 时，狗 − sin 狗 $\sim\dfrac{1}{6}$ 狗^3.

(6) 当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2x\sim x^3$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\left(x\to0\text{ 时},\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据归结定理，取 $x=\dfrac{1}{n}$，则原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

(9) 当 $x=0$ 时，原式 $=1$；

当 $x\neq0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]+0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a-\dfrac{a}{1+ax}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

(12) 原式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a+a}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}\cdot b+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}\cdot2(a+b)+a+b}}=\dfrac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}.$

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{1+\ln x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}x\left(1-\dfrac{1}{1+\ln x}\right)\right\}=e^0=1.$

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln(\cot x)\}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\cot x)\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\dfrac{1}{x}}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin x\cos x}\right\}=e^0=1.$$

(15) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\,dt}{\dfrac{1}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)\cdot2\sin x\cos x}{\dfrac{4}{3}x^3}=\dfrac{3}{2}.$

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{\dfrac{1}{2}x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,dt}{\dfrac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

(17) 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$（注意常用的公式：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$）.

(18) $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$；$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$；$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2 2!}+o(x^4)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}.$

(19) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$，故

$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right\}=e.$$

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0,$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(21) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)(x\to 0)$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(22) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}\right\}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【注】典型错误: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x}\xlongequal{(*)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. 错误原因:(*)处不符合极限的四则运算法则. 当且仅当 $x\to x_0$(或 ∞), $A(x)$, $B(x)$ 极限存在时, $\lim\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{\lim A(x)}{\lim B(x)}$ 成立.

1.20.【证】 用反证法. 设 $|f(1)|$, $|f(3)|$, $|f(5)|$ 都小于2,即

$$|f(1)|=|a+b+1|<2,\ |f(3)|=|3a+b+9|<2,\ |f(5)|=|5a+b+25|<2,$$

则 $|f(1)-2f(3)+f(5)|\leqslant|f(1)|+2|f(3)|+|f(5)|<2+2\times2+2=8$.

而事实上, $|f(1)-2f(3)+f(5)|=|a+b+1-6a-2b-18+5a+b+25|=8$,矛盾,故 $|f(1)|$, $|f(3)|$, $|f(5)|$ 中至少有一个不小于2.

1.21.【解】 $\dfrac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\dfrac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$,即

$$1<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,由夹逼准则,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1$.

1.22.【解】 因为 $x\to0$ 时, $\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}$,而

$$\ln\frac{2+\cos x}{3}=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3}=-\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$.

1.23.【解】 为了在使用洛必达法则时使求导变得简单,先做变量代换,令 $t=\dfrac{1}{x}$,从而

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{1+e^t}{e^t}=2.$$

1.24.【解】方法一 此题为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限，用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}.$$

故有$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2=1$，又由 $x>0$ 时，$e^x>e^{-x}>0$，故$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$.

方法二 分子分母同乘 e^{-x}，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

1.25.【解】不正确. 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合步骤所得到的，并用一个式子表示的函数. 分段函数虽用几个表达式表示，但并不能说肯定不能用一个表达式表示，因此，分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数，如 $\varphi(x)=|x|$，通常写成分段函数的形式 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 但也可以写成一个表达式：$\varphi(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，它是由初等函数$\sqrt{u}$和 $u=x^2$ 复合而来，所以函数 $\varphi(x)=|x|$ 是初等函数. 而 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数.

【注】虽然有些分段函数是初等函数，但把它写成一个表达式时，不利于我们讨论它的性质，相反，常会给我们增加麻烦. 因此对于分段函数，除特殊需要外，通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数.

一般地，如果 $f(x)$ 在$[a,c]$上是初等函数，$g(x)$ 在$[c,b]$上是初等函数，且 $f(c)=g(c)$，那么分段函数 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\ g(x), & c<x\leqslant b\end{cases}$ 必是初等函数，因为这时 $\varphi(x)$ 可以写成一个表达式：

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+g\left(\frac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-f(c),x\in[a,b].$$

1.26.【解】$g(0)=(e^x+\beta)|_{x=0}=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+\beta)=1+\beta=g(0^-)$，$g(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\sin\frac{1}{x}$.

当 $\alpha>0$ 且 $\beta=-1$ 时，有 $g(0^-)=g(0^+)=g(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

当 $\alpha>0$ 且 $\beta\neq-1$ 时，有 $g(0^-)\neq g(0^+)$，故点 $x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点；

当 $\alpha\leqslant0$ 时，点 $x=0$ 是 $g(x)$ 的振荡间断点.

1.27.【解】令 $x^n-t^n=u$，则 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\,du$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{2n}}\int_0^{x^n}f(u)\,du=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{f'(0)}{2n}.$$

1.28.【解】$f(x)$ 在区间$(-1,0)$，$(0,1)$ 及$(1,+\infty)$ 都是初等函数，且是连续的. $f(0)$ 无定义，故 $x=0$ 是间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

$f(1)$ 无定义，故 $x=1$ 是间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 不存在，所以 $x=1$ 为无穷间断点.

【注】讨论分段函数在分段点处的连续性，一般要考查在该点的左右极限.

1.29.【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}f(x;t)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$

$$=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}\cdot\frac{t}{t-1}}=e^{\frac{x}{x-1}}.$$

显然 $x=1$ 为间断点，连续区间 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0,$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty,$$

所以 $x=1$ 为无穷间断点.

1.30.【解】 $k\leqslant0$ 时，$I=-\infty$，不存在；

$k>0$ 时，$I\xlongequal[x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty}\lim\limits_{t\to0^+}\left[\left(\dfrac{1}{t^\alpha}+\dfrac{8}{t^4}+2\right)^k-\dfrac{1}{t}\right]$（注意 $\alpha\geqslant5$）

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}}.$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\dfrac{1}{\alpha}$ 时，极限为"$\dfrac{0}{0}$"型，否则极限为 ∞，不存在. 故

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)}{t}.$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{5}\dfrac{(8t+2t^5)}{t}=\dfrac{8}{5}$，此时 $k=\dfrac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\dfrac{1}{\alpha}$.

B组

一、选择题

1.1.（A）**【解析】**有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小.

1.2.（C）**【解析】** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq0,$$

则 $n=3$，此时 $C=\dfrac{1}{3}$.

1.3.（A）**【解析】**由当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 与 x^m 为同阶无穷小，从而知存在常数 $A\neq0$，当 $x\to0$ 时 $f(x)\sim Ax^m$，从而 $f(x^n)\sim Ax^{nm}$. 于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^k}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^n)\cdot nx^{n-1}}{kx^{k-1}}=\dfrac{An}{k}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{nm}x^n}{x^k}$. 由题意知，上式为不等于零的常数，故 $k=nm+n$. 故应选（A）.

1.4.（C）**【解析】** $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\pi x}{|x|}=\pi$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2-1}=-1$. 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，因此 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内无界. 其他三个区间内 $f(x)$ 都是有界的.

1.5.（D）**【解析】**若 $\lambda>0$，则必存在一个 x 使得 $\lambda-e^{-kx}=0$，即分母为 0，与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续矛盾，故 $\lambda\leqslant0$；又若 $k\leqslant0$，当 $x\to-\infty$ 时，$-kx\to-\infty$ 或 $-kx=0$，均有 $f(x)\to\infty$，与题意矛盾，故 $k>0$.

二、填空题

1.6. e^{-2} 【解析】$\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}}$，则

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{1+2x}=-2,$$

所以原极限 $=e^{-2}$.

1.7. $5;\dfrac{1}{4^5}$ 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}x^{5-\alpha}$

$$=4^{-\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0,$$

所以 $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{4^5}$.

1.8. $-\dfrac{1}{32};2$ 【解析】当 $x\to\pi$ 时，

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1&=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1\\&=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1\\&\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]\\&\sim\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2.\end{aligned}$$

故 $A=-\dfrac{1}{32},k=2$.

1.9. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=1=\lim_{x\to0^-}f(x)=a.$$

三、解答题

1.10.【解】本题考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先，广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知：

当 $g(x)\leqslant0$，即 $\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或 $\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\},$$

$$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant1\};$$

当 $g(x)>0$，即 $\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或 $\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x>-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{-\ln2<x\leqslant0\},$$

$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1\text{ 或 }x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$