普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数

主　编　焦方蕾　张序萍　陈贵磊
副主编　吕亚男　王鲁新

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数

主　编　焦方蕾　张序萍　陈贵磊

副主编　吕亚男　王鲁新

北京交通大学出版社

·北

内 容 简 介

本书是根据高等学校理工类及经管类各专业线性代数的教学大纲要求，结合当前高等教育的多样化要求，并参照近年来线性代数课程及教材建设的经验和成果编写而成的，主要内容有行列式、矩阵、线性方程组与向量组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。另外，还在有关章节配有相关的 MATLAB 实现，介绍了利用 MATLAB 进行数学实验的方法。

本书编写侧重于介绍线性代数的基本内容和方法，适当地减少了相关的推导和证明，使学生在相对较少的学时内就能较系统地掌握该课程的基本内容。本书特别适合作为普通本科院校理工类、经管类线性代数课程教材，也可作为普通本科学生自学用参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/焦方蕾，张序萍，陈贵磊主编．—北京：北京交通大学出版社，2017.11
ISBN 978-7-5121-3400-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①焦… ②张… ③陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 262902 号

线性代数
XIANXING DAISHU

策划编辑：刘建明　严慧明　　责任编辑：韩　乐　　助理编辑：严慧明
出版发行：北京交通大学出版社　　电　　话：010－51686414
地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮　　编：100044
印 刷 者：北京时代华都印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185 mm×260 mm　印张：12.75　字数：318 千字
版　　次：2017 年 11 月第 1 版　2017 年 11 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5121-3400-3/O・168
定　　价：28.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu. edu. cn。

前　　言

线性代数是高等学校各专业的公共基础课，对培养学生抽象思维、逻辑推理和科学计算能力具有重要的作用，同时也是学生学习专业课和进一步学习现代科学知识的必修课程。编者根据多年累积的教学经验，结合近年来线性代数课程建设的实践，切合学生实际编写了本教材，力求深入浅出，化难为易，服务专业课程。

（1）本教材内容系统，语言简洁、直观。

（2）习题分为 A、B 组，A 组为基本要求，B 组为较高要求，这样的分组便于学生视自身情况选用。

（3）各章后均设有总复习题，便于学生系统复习使用。

（4）某些章节后配有针对本节内容的 MATLAB 实现，且书后附有 MATLAB 使用简介，因此不需要专门的 MATLAB 教程学生就能及时掌握软件的使用方法以进行所学知识的运算，为培养具有创新能力的应用型人才目标服务。

本教材由焦方蕾、张序萍、陈贵磊任主编，吕亚男、王鲁新任副主编。另外，徐亚鹏、王娟、许曰才、邓薇、郭秀荣、郭文静、彭丽、张宁、张相虎也参与了本教材的编写。

本教材可作为普通本科院校理工类、经管类线性代数课程教材，也可作为普通本科学生自学用参考书。

在编写本教材的过程中得到了山东科技大学有关领导和同行的大力支持和帮助，也参考了许多成熟的教材，在此一并表示感谢！囿于编者水平有限，加之时间仓促，本教材的缺点与错误在所难免，恳请专家和读者批评指正。

编　者

2017 年 6 月

目　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数的基本内容之一，它是现代数学各个分支必不可少的重要研究工具，是研究线性方程组的主要方法，在生产实际和经济管理中有着广泛的应用. 本章从行列式的概念出发，介绍行列式的性质和计算方法，并介绍利用行列式求解特殊类型的线性方程组的方法，即克莱姆(Gramer)法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法解此方程组，①式$\times a_{22}-$②式$\times a_{12}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1-2}$$

②式$\times a_{11}-$①式$\times a_{21}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1-3}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为方便记忆，引进记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 令$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行

列式，代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是行列式的值. 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫作行列式的元素，横排称作行，竖排称作列. $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 的第一个下标 i 称为行标，第二个下标 j 称为列标. a_{ij} 表示该元素位于第 i 行、第 j 列.

计算二阶行列式时可以采用“对角线法则”，即二阶行列式的值等于主对角线（从左上角到右下角的连线）上两元素之积减去副对角线（从右上角到左下角的连线）上两元素之积所得的差值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

副对角线　主对角线

按二阶行列式的定义，记系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1 - 1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1 - 4}$$

例 1　用二阶行列式解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$.

解：因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3$$

所以，方程组有唯一解：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-5}{2}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{3}{2}$.

1.1.2　三阶行列式

类似于解二元线性方程组，解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1 - 5}$$

也会产生代数和算式，此时引进三阶行列式，记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 该三阶行列式的值为

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

三阶行列式的计算式包含三正三负共六项，也可以利用“对角线法则”来记忆. 如图1－1所示，a_{11}，a_{22}，a_{33}的连线为主对角线（从左上角到右下角的连线），a_{13}，a_{22}，a_{31}的连线为次对角线（从右上角到左下角的连线）. 位于主对角线上元素的乘积$a_{11}a_{22}a_{33}$及乘积$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$这三项为正项，乘积$a_{12}a_{23}a_{31}$和乘积$a_{13}a_{21}a_{32}$中的三个元素的连线均形成底边平行于主对角线的三角形；位于次对角线上的元素乘积$a_{13}a_{22}a_{31}$及乘积$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$这三项为负项，乘积$a_{12}a_{21}a_{33}$和乘积$a_{11}a_{23}a_{32}$中的三个元素的连线均形成底边平行于次对角线的三角形.

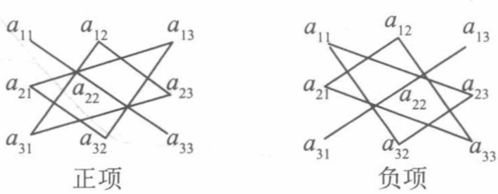

图1－1

例2 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解：
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-4\times2\times6$$
$$=-10-48=-58$$

三元线性方程组的解也可以用三阶行列式给出. 记系数行列式为D，则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当$D\neq0$时，三元线性方程组（1－5）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-6}$$

其解的结构与二元线性方程组解的结构相类似.

例 3 解三元线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

解:由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times(-1)\times1-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)$$

$$=-5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

1.1.3 n 阶行列式

由 1.1.1 节和 1.1.2 节可知:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

观察上述结果不难发现:

(1)二阶行列式的值是 2! 项的代数和,三阶行列式的值是 3! 项的代数和;

(2)二阶行列式的计算式中每一项都是两个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}$,其中行标是自然顺序 1,2,列标 j_1,j_2 是数 1,2 的一个不重复排列,共 2! 个;三阶行列式的计算式中每一项都是三个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,其中行标是自然顺序 1,2,3,列标 j_1,j_2,j_3 是数 1,2,3 的一个

不重复排列，共 3! 个；

(3)行列式的计算式中的每一项前面都带有正负号，其中正负各半，且正负号由列标的排列顺序决定.

定义 1.1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的一种有确定次序的排列称为一个 n 级排列.

例如，1234 是一个 4 级排列，3412 也是一个 4 级排列，而 52341 是一个 5 级排列. 由数 1,2,3 组成的所有 3 级排列为：123，132，213，231，312，321，共有 3! 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然排列或者标准排列.

定义 1.2　在一个 n 级排列$(j_1j_2\cdots j_r\cdots j_s\cdots j_n)$中，如果有较大的数 j_r 排在较小的数 j_s 的前面，则称 j_r 与 j_s 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

例 4　计算 4 级排列 3412 的逆序数.

解：从左到右将各个数字与其后面的数字相比较：

(1)3 分别与 4,1,2 比较，31,32 各构成一个逆序；

(2)4 分别与 1,2 比较，41,42 各构成一个逆序；

(3)1 与 2 比较，没有构成逆序.

所以，4 级排列 3412 的逆序数为 $N(3412)=2+2=4$. 也可以从右向左比较，结果必然一致.

容易看出，自然排列的逆序数为 0.

定义 1.3　如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 $N(j_1j_2\cdots j_n)$是奇数，则称此排列为奇排列，逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

对于二阶行列式和三阶行列式的计算式中各项的元素，将行标按自然数顺序排列后，如果对应列标构成的排列是偶排列，则该项符号取正；如果对应列标构成的排列是奇排列，则该项符号取负.

将二阶、三阶行列式推广，可得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n 行 n 列的 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$形成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示所有取自不同行和不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项符号的确

定原则是：当该项各元素的行标按自然数顺序排列后，若对应列标构成的排列是偶排列则取正号，为奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的 n 级排列共有 $n!$ 个，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是其中的一个. $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示将这 $n!$ 个 n 级排列分别代入 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 进行求和.

行列式中横排称为行，竖排称为列，a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为行列式的元素，$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

四阶及四阶以上的行列式称为高阶行列式，由于项数较多，已难以用直接展开的方法计算，也不能使用二阶、三阶行列式所适用的"对角线法则". 但对于一些特殊的高阶行列式，可以由定义求出行列式的值.

例 5 计算上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

解：n 阶行列式的计算式中应有 $n!$ 项，其一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，由于 D 中有许多元素为 0，故只需求出上述一般项中不为 0 的项即可，此时可自右向左分析行列式的各个元素的取值. 先观察 a_{nj_n}，只有当 $j_n = n$ 时元素才不为 0. 再观察 $a_{(n-1)j_{n-1}}$，j_{n-1} 只有取 $n-1$ 和 n 时元素才不为 0，而 $j_n = n$，故 $j_{n-1} = n-1$. 逐个向上推，不难看出，在展开式中只有 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 一项不等于 0. 而该项的列标所组成的排列的逆序数 $N(12\cdots n) = 0$，故该项取正号. 因此，由行列式的定义有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这三个结论在以后的行列式计算中可以直接应用.

例 6 用行列式的定义计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解:仿例 5 的分析过程可得

$D_n = (-1)^N a_{1(n-1)} a_{2(n-2)} \cdots a_{(n-1)1} a_{nn} = (-1)^N 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n =$

$(-1)^N n!$,其中,$N = N[(n-1)(n-2)\cdots 21n] = 1+2+\cdots+(n-2) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

所以,$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$.

习题 1-1

(A)

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -x^2-1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;