

新形态教材

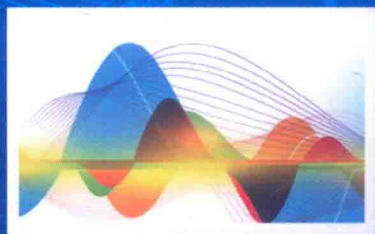
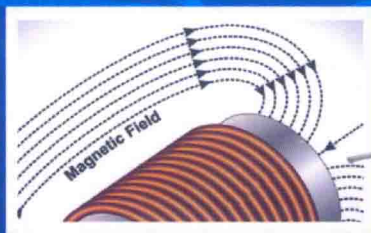
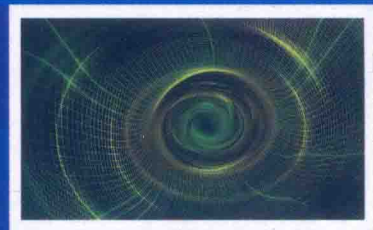


普通高等教育“十三五”规划教材

(第三版)

# 电磁场与电磁波理论

徐立勤 曹伟 编著



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

# 电磁场与电磁波理论

(第三版)

徐立勤 曹伟 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书对电磁场与电磁波理论进行了系统、全面、深入浅出的论述。全书共 8 章, 内容包括矢量分析与场论、宏观电磁现象的基本定律、静电场及其边值问题的解法、恒定电场与恒定磁场、电磁波的辐射、均匀平面波的传播、均匀波导中的导行电磁波、均匀传输线中的导行电磁波。本书采用“演绎法”组织教材内容, 使得电磁波部分的内容占了全书的一半以上。

本书可作为高等院校电子信息类专业的教材, 也可供其他专业学生或工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波理论/徐立勤, 曹伟编著. —3 版. —北京: 科学出版社, 2018.6

ISBN 978-7-03-057391-9

I. ①电… II. ①徐…②曹… III. ①电磁场 ②电磁波 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 095860 号

责任编辑: 潘斯斯/责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 徐晓晨/封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2006 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2010 年 7 月第 二 版 印张: 23 1/2

2018 年 6 月第 三 版 2018 年 9 月第十六次印刷

字数: 602 000

定价: 59.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 第三版前言

本书的编写吸取了南京邮电大学“电磁场与电磁波”课程教学团队长期从事本科教学的实践经验，教材的内容非常适合于电子信息类专业的本科生，也可以作为其他专业学生或工程技术人员的参考书。

本书一直作为南京邮电大学通信工程、电子信息工程、电子科学与技术以及电磁场与无线技术等专业本科生的教材。根据几年来的教学经验，作者对本书进行第二次修改。本次修改的宗旨是加强实用性。在第5章中调整章节，集中介绍基本辐射单元的电磁场和天线的主要辐射特性，使学生对课程理论知识的应用更加明晰；修改插图，尤其是在第6章均匀平面波的入射、反射和折射分析时，采用三维立体插图，表达方式更加形象化；修改部分例题和习题，加强理论的综合性应用；每章增加若干思考题，加强学生对所学知识应用的了解；此外，还配套提供若干小视频，对课程的一些重点内容的掌握起到画龙点睛的作用。

本书2011年获得“江苏省精品教材”称号，2017年入选科学出版社第三批普通高等教育“十三五”规划教材。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬希读者不吝指正。

作者

2018年3月

## 第一版前言

电磁学是人类在利用自然、改造自然的长期实践中逐步形成的一门自然科学分支，它在与其他相关学科的相互渗透和相互促进中，不断地获得发展和完善，同时也极大地推动着通信、雷达、广播、导航、遥感等一系列电子科技的革新和进步。当今，电磁学已成为无线电电子学领域里的一门重要基础学科，电磁学方面的课程已成为各国理工科大学的必修基础课。

目前，国内外比较著名的电磁学类书籍已经不少。这些书籍的基本内容虽然大同小异，但在材料取舍、结构、侧重、阐述诸方面却各具特色。在本书的编写中，笔者汲取了南京邮电大学该课程教学群体长期从事本科教学的实践经验，注意参考和比较了国内外一些同类书籍的特色，并以此为基础，形成了本书的一些特点。这些特点主要表现为：

(1) 在第1章“矢量分析”中，比较系统地介绍了矢量分析中的一些基本概念和基本定理，为全书提供了一个完整的数学预备知识。对于不具备这方面知识的读者，学好这一章将为后面章节的学习打下良好的基础。对于那些已经学过这一内容的读者而言，这一章则可作为他们自学和复习的资料。

(2) 在第2章“宏观电磁现象的基本定律”中，将大学普通物理课程中的电磁学内容作了简要回顾，介绍了电磁学中的一些基本物理量和一些基本电磁定律，直至引出麦克斯韦方程组积分形式。接着，再以这些物理课程内容为基础，直接导出时变电磁场麦克斯韦方程组微分形式和电磁场边界条件，使读者很快地进入本课程核心内容。这种安排的好处至少有两个，一是可以与先导课程(物理课)有一定重叠，以利承上启下，平稳过渡，保持教学内容的连续性；二是可以避免与物理课程内容过多重复，节省教学课时。

(3) 在第3章“静电场及其边值问题的解法”及第4章“恒定电场与恒定磁场”中，分别讨论了静止电荷产生的电场和恒定电流的电场与磁场。这些场是时变电磁场在诸场量不随时间而变化条件下的特例。令诸场量随时间的变化率等于零，便可直接从麦克斯韦方程组及其边界条件导出静电场和恒定场的基本方程和边界条件，这种由“一般”到“特殊”的叙述方法称作“演绎法”，它与传统的从“特殊”到“一般”的“归纳法”叙述方式正好相反。“归纳法”叙述顺序是先介绍静电场，再讨论恒定电场与磁场，最后才研究时变电磁场。这种叙述顺序虽然与电磁学由“简”到“繁”历史发展过程相一致，比较容易被人们所接受，但却与物理课程内容产生了过多的和不必要的重复。我们选择“演绎法”，除了因为它可以避免“归纳法”的上述缺陷以外，还因为它将有利于读者较早地形成电磁场与电磁波的整体概念，并能较好地培养学生利用一般规律分析和解决具体问题的能力。

(4) 在第3章对静电场的讨论中，重点放在静电场边值问题的求解方法上。这些方法的重要性不仅表现在求解静电问题本身，更主要的是表现在它可以推广和延伸到求解各

类复杂电磁问题。边值问题的求解方法很多，我们只介绍其中一些最流行和最具代表性的方法，在解析方法方面，除了提到直接积分法和镜像法以外，重点讨论三种常用正交坐标系下的分离变量法。在数值方法方面，既介绍“场域型”数值方法，又介绍“边界型”数值方法。在这两类数值方法中，有限差分法被选择作为前者的代表，而矩量法被选择作为后者的代表。

(5)从第5章开始就转入对电磁波的讨论，直至本书第8章。在这一部分中，电磁波理论中的一些最基本内容均有涉及：既介绍了电磁波的辐射(第5章)，又介绍了电磁波的传播(第6~8章)；既介绍了电磁波在无界空间中的传播(第6章)，又介绍了电磁波沿导波结构的传播(第7、8章)；既介绍了电磁波在无反射情况下的传播(第6章的前两节)，又介绍了电磁波在传播过程中遇到障碍物时的反射与折射(第6章的后两节)；等等。总体来说，若把专门介绍数学预备知识的第1章除外，电磁波部分占了全书的一半以上。我们之所以这样安排，主要是考虑到电磁波内容与电磁工程实际联系比较紧密，需要加强。另外，采用“演绎法”组织教材内容，也使电磁场内容的减少成为可能。

本书是为通信电子类专业本科生而写的，但也可以作为其他专业学生或工程技术人员的参考书。全书共分8章，每章结尾均配备了一定数量的习题，并在本书最后给出了部分习题的答案。习题数量要比教学中实际需要和学生有可能完成的数量要多一些，教师可根据具体情况自行选择。本教材的教学参考学时为48~80学时，可由授课教师按学时情况以及教学要求选用。

本书由徐立勤执笔，曹伟定稿。书稿完成后，南京邮电大学的吴志忠教授审阅了全书并提出了若干改进意见。

由于编者水平有限，时间也比较紧迫，疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

2005年9月于南京邮电大学

## 主要物理量的符号、单位和量纲

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
长度	$L, l$	米	m	L
质量	$m$	千克	kg	M
时间	$t$	秒	s	T
电流	$I, i$	安培	A	I
矢量磁位	$A$	韦伯每米	Wb/m	$ML^{-1}T^{-2}$
磁感应强度	$B$	特斯拉	T	$MI^{-1}T^{-2}$
电纳	$B$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
电容	$C$	法拉	F	$I^2T^4M^{-1}L^{-2}$
真空中光速	$c$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
电位移	$D$	库仑每平方米	$C/m^2$	$ITL^{-2}$
电场强度	$E$	伏特每米	V/m	$ML^{-1}T^{-3}$
电场力	$F_e$	牛顿	N	$MLT^{-2}$
磁场力	$F_m$	牛顿	N	$MLT^{-2}$
频率	$f$	赫兹	Hz	$T^{-1}$
电导	$G$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
磁场强度	$H$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
位移电流	$I_d, i_d$	安培	A	I
全电流	$I_t, i_t$	安培	A	I
体电流密度	$J$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
位移电流密度	$J_d$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
全电流密度	$J_t$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
面电流密度	$J_s$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
行波系数	$K$			
波数	$k$	弧度每米	rad/m	$L^{-1}$
电感	$L$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
互感	$M$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
折射率	$n$			
电极化强度	$P_e$	库仑每平方米	$C/m^2$	$ITL^{-2}$
磁化强度	$P_m$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
功率	$P$	瓦特	W	$ML^2T^{-3}$
电荷[量]	$Q, q$	库仑	C	IT
电阻	$R$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$

续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
坡印亭矢量	$S$	瓦特每平方米	$W/m^2$	$MT^{-3}$
平均坡印亭矢量	$S_{av}$	瓦特每平方米	$W/m^2$	$MT^{-3}$
驻波比	$S$			
周期	$T$	秒	s	T
折射系数, 透射系数	$T$			
电压	$U(V)$	伏特	V	$ML^2I^{-1}T^{-3}$
速度	$v$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
相速	$v_p$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
群速	$v_g$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
能量, 功	$W$	焦耳	J	$ML^2T^{-2}$
能量密度	$w$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
电场能量密度	$w_e$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
磁场能量密度	$w_m$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
电抗	$X$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
导纳	$Y$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
特性导纳	$Y_c$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
阻抗	$Z$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
特性阻抗	$Z_c$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
波阻抗	$Z_w$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
衰减常数	$\alpha$	奈培每米	Np/m	$L^{-1}$
相位常数	$\beta$	弧度每米	rad/m	$L^{-1}$
反射系数	$\Gamma$			
传播常数	$\gamma$	每米	$m^{-1}$	$L^{-1}$
透入深度	$\delta$	米	m	L
介电常数	$\epsilon$	法拉每米	F/m	$I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
真空介电常数	$\epsilon_0$	法拉每米	F/m	$I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
相对介电常数	$\epsilon_r$			
真空波阻抗	$\eta$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
布儒斯特角	$\theta_B$	弧度	rad	
临界角	$\theta_c$	弧度	rad	
波长	$\lambda$	米	m	L
自由空间波长	$\lambda_0$	米	m	L
截止波长	$\lambda_c$	米	m	L
波导波长	$\lambda_g$	米	m	L
磁导率	$\mu$	亨利每米	H/m	$MLI^{-2}T^{-2}$
真空磁导率	$\mu_0$	亨利每米	H/m	$MLI^{-2}T^{-2}$



续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
相对磁导率	$\mu_r$			
体电荷密度	$\rho$	库仑每立方米	C/m <sup>3</sup>	ITL <sup>-3</sup>
面电荷密度	$\rho_s$	库仑每平方米	C/m <sup>2</sup>	ITL <sup>-2</sup>
线电荷密度	$\rho_l$	库仑每米	C/m	ITL <sup>-1</sup>
电导率	$\sigma$	西门子每米	S/m	I <sup>2</sup> T <sup>3</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup>
电通[量]	$\Psi_e$	库仑	C	IT
磁通[量]	$\Psi_m$	韦伯	Wb	ML <sup>2</sup> I <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
电位	$\phi$	伏特	V	ML <sup>2</sup> I <sup>-1</sup> T <sup>-3</sup>
标量磁位	$\phi_m$	安培	A	I
角频率	$\omega$	弧度每秒	rad/s	T <sup>-1</sup>
电极化率	$\chi_e$			
磁化率	$\chi_m$			

# 目 录

第 1 章 矢量分析与场论	1
1.1 矢量的代数运算	1
1.1.1 矢量及其表示法	1
1.1.2 矢量的代数运算	3
1.2 场的微分运算	7
1.2.1 场的基本概念	7
1.2.2 标量场的方向导数和梯度	9
1.2.3 矢量场的通量和散度	11
1.2.4 矢量场的环量和旋度	15
1.2.5 梯度、散度、旋度的比较	19
1.3 矢量恒等式和基本定理	20
1.3.1 重要的恒等式和拉普拉斯算子	21
1.3.2 矢量场的基本定理	22
1.4 常用正交曲线坐标系	27
1.4.1 三种常用的正交坐标系	27
1.4.2 三种常用坐标系的转换	30
1.4.3 三种常用坐标系中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯展开式	31
思考题	32
习题	32
第 2 章 宏观电磁现象的基本定律	35
2.1 基本电磁物理量	35
2.1.1 电荷密度	35
2.1.2 电场强度	37
2.1.3 电极化强度	38
2.1.4 电位移	40
2.1.5 电流密度	41
2.1.6 磁感应强度	43
2.1.7 磁化强度	44
2.1.8 磁场强度	45
2.2 电磁场基本定律	46
2.2.1 库仑定律	46
2.2.2 环量定律和高斯定律	48
2.2.3 安培定律与毕奥-萨伐尔定律	50

2.2.4	磁通连续性定律和安培环路定律	52
2.2.5	法拉第电磁感应定律	54
2.2.6	电荷守恒定律	55
2.3	麦克斯韦方程组	56
2.3.1	麦克斯韦的两个假设	57
2.3.2	麦克斯韦方程组的积分形式	60
2.3.3	麦克斯韦方程组的微分形式	61
2.4	时变电磁场的边界条件	63
2.4.1	边界条件的一般形式	64
2.4.2	边界条件的三种常用形式	66
	思考题	69
	习题	69
<b>第3章</b>	<b>静电场及其边值问题的解法</b>	<b>74</b>
3.1	静电场的基本方程与边界条件	74
3.1.1	静电场的基本方程	74
3.1.2	静电场的边界条件	75
3.2	电位及其电位方程	77
3.2.1	电位和电位梯度	77
3.2.2	电位的微分方程和边界条件	82
3.3	静电场的能量和导体的电容	84
3.3.1	静电场的能量和能量密度	84
3.3.2	导体系统的电容	86
3.4	静电场边值问题的分类以及唯一性定理	89
3.4.1	静电场边值问题的分类	89
3.4.2	静电场唯一性定理	89
3.5	直接积分法	91
3.6	分离变量法	94
3.6.1	直角坐标系中的分离变量法	95
3.6.2	圆柱坐标系中的分离变量法	103
3.6.3	球面坐标系中的分离变量法	107
3.7	镜像法	110
3.7.1	点电荷关于无限大导体平面的镜像法	110
3.7.2	点电荷关于导体球面的镜像法	114
3.7.3	点电荷关于无限大介质平面的镜像法	116
3.7.4	线电荷关于无限长圆柱导体面的镜像法	118
3.8	静电场的数值解法	120
3.8.1	有限差分法	121
3.8.2	矩量法	126

思考题	130
习题	130
<b>第 4 章 恒定电场与恒定磁场</b>	<b>136</b>
4.1 恒定电场基本方程与边界条件	136
4.1.1 导体内部恒定电场的基本方程	136
4.1.2 导体内部恒定电场的边界条件	137
4.2 恒定电场的电位与静电比拟法	137
4.2.1 恒定电场的电位和边界条件	137
4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导	138
4.2.3 恒定电场的静电比拟法	140
4.3 恒定磁场基本方程与边界条件	141
4.3.1 恒定磁场的基本方程	141
4.3.2 恒定磁场的边界条件	142
4.4 矢量磁位和标量磁位	144
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位	145
4.4.2 恒定磁场的标量磁位	150
4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感	152
4.5.1 恒定磁场的能量和能量密度	153
4.5.2 载流回路的电感	153
思考题	156
习题	157
<b>第 5 章 电磁波的辐射</b>	<b>160</b>
5.1 时谐电磁场的基本方程和边界条件	160
5.1.1 基本场量的复数表示式	160
5.1.2 电磁场基本方程的复数形式	162
5.1.3 电磁场边界条件的复数形式	163
5.1.4 复介电常数和复磁导率	164
5.2 时变电磁场的矢量磁位和标量电位	166
5.2.1 时变电磁场矢量磁位和标量电位的定义	166
5.2.2 时变电磁场矢量磁位和标量电位的达朗贝尔方程	167
5.2.3 时变电磁场矢量磁位和标量电位的积分表示式	169
5.2.4 时谐电磁场的矢量磁位和标量电位	172
5.3 坡印亭定理与坡印亭矢量	174
5.3.1 时变电磁场的坡印亭定理与坡印亭矢量	174
5.3.2 时谐电磁场的坡印亭定理与复坡印亭矢量	175
5.4 基本辐射单元的辐射场	178
5.4.1 电基本振子的辐射场	178
5.4.2 磁基本振子的辐射场	182

5.4.3	惠更斯元的辐射场 .....	186
5.5	对称天线的辐射场和辐射特性 .....	191
5.5.1	对称天线的辐射场 .....	191
5.5.2	对称天线的辐射特性 .....	193
5.6	均匀直线式天线阵的辐射场和辐射特性 .....	198
5.6.1	均匀直线式天线阵的辐射场 .....	198
5.6.2	均匀直线式边射阵和端射阵 .....	200
	思考题 .....	201
	习题 .....	201
<b>第 6 章</b>	<b>均匀平面波的传播</b> .....	<b>205</b>
6.1	均匀平面波在理想介质中的传播 .....	205
6.1.1	沿着+z 轴方向传播的均匀平面波 .....	205
6.1.2	沿任意方向传播的均匀平面波 .....	214
6.2	均匀平面波在导电媒质中的传播 .....	218
6.2.1	导电媒质中均匀平面波的电磁场 .....	218
6.2.2	均匀平面波在弱导电媒质中的传播 .....	222
6.2.3	均匀平面波在良导电媒质中的传播 .....	223
6.3	均匀平面波对不同媒质分界面的垂直入射 .....	226
6.3.1	均匀平面波对理想介质平面的垂直入射 .....	226
6.3.2	均匀平面波对理想导体平面的垂直入射 .....	231
6.3.3	均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射 .....	234
6.4	均匀平面波对不同媒质分界面的斜入射 .....	237
6.4.1	均匀平面波对理想介质平面的斜入射 .....	237
6.4.2	均匀平面波对理想导体平面的斜入射 .....	245
	思考题 .....	248
	习题 .....	249
<b>第 7 章</b>	<b>均匀波导中的导行电磁波</b> .....	<b>252</b>
7.1	导行电磁波的一般分析方法 .....	252
7.1.1	横向场和纵向场的亥姆霍兹方程 .....	253
7.1.2	用纵向场表示的横向场 .....	254
7.1.3	传播模式及其传播特性 .....	255
7.2	矩形波导中的导行电磁波 .....	260
7.2.1	直角坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解 .....	260
7.2.2	矩形波导中导行电磁波的传播模式 .....	262
7.2.3	矩形波导中导行电磁波的传播特性 .....	264
7.2.4	矩形波导中若干常用传播模式的场结构 .....	267
7.3	圆形波导中的导行电磁波 .....	271
7.3.1	圆柱坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解 .....	271

7.3.2	圆形波导中导行电磁波的传播模式	273
7.3.3	圆形波导中导行电磁波的传播特性	275
7.3.4	圆形波导中若干常用传播模式的场结构	278
7.4	传输功率与传输损耗	280
7.4.1	传输功率	281
7.4.2	管壁电流	283
7.4.3	传输损耗	286
7.5	同轴线中的导行电磁波	289
7.5.1	同轴线中的主模	289
7.5.2	同轴线中的高次模	291
7.6	光导纤维中的导行电磁波	292
7.6.1	光导纤维中导行波的特征方程	293
7.6.2	光导纤维中传播模式及其截止条件	294
	思考题	298
	习题	299
<b>第 8 章</b>	<b>均匀传输线中的导行电磁波</b>	<b>302</b>
8.1	均匀传输线中导行电磁波的传播模式	302
8.1.1	均匀传输线中的主模	302
8.1.2	均匀传输线中的高次模	305
8.2	均匀传输线的基本方程及其稳态解	310
8.2.1	均匀传输线的分布参数及其等效电路	310
8.2.2	均匀传输线的基本方程	311
8.2.3	均匀传输线基本方程的稳态解	312
8.2.4	均匀传输线基本方程稳态解的不同表示形式	313
8.3	均匀传输线的特征参数	316
8.3.1	特性阻抗	316
8.3.2	传播常数	318
8.4	均匀传输线的等效阻抗和反射系数	320
8.4.1	等效阻抗	320
8.4.2	反射系数	321
8.4.3	等效阻抗与反射系数的关系	322
8.5	无耗均匀传输线	324
8.5.1	终端接任意负载时的无耗均匀传输线	324
8.5.2	无耗均匀传输线上的行波	328
8.5.3	无耗均匀传输线上的驻波	329
8.6	史密斯圆图	333
8.6.1	复平面上的反射系数圆	333
8.6.2	阻抗圆图	335

8.6.3 导纳圆图.....	339
思考题.....	342
习题.....	342
参考文献.....	346
附录.....	347
常用的矢量公式.....	347
常用导体材料的参数.....	349
常用介质材料的参数.....	349
常用的物理常数.....	350
习题答案(部分).....	351

# 第 1 章 矢量分析与场论

电磁理论的一个重要的概念就是关于场的概念，例如，两个电荷之间的作用力是由于一个电荷与另一个电荷之间的场相互作用的结果。同时，电磁理论中出现的一些基本物理量有很多都是矢量，如电场强度  $\boldsymbol{E}$ 、磁场强度  $\boldsymbol{H}$ 、电流密度  $\boldsymbol{J}$  等。并且一些用来描述电磁现象基本规律的方程也都是矢量函数的微分方程或积分方程，如麦克斯韦方程组。因此，矢量分析和场论是电磁理论重要的数学基础。本章仅讨论在电磁理论中所需要的矢量分析与场论中的主要内容，包括矢量的基本代数运算和场量的梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算以及矢量场的恒等式和基本定理。最后，还给出了三种常用坐标系及其梯度、散度、旋度等算子在这三种坐标系中的表示式。

## 1.1 矢量的代数运算

自然科学中的物理量，按其是否具有方向属性来区分，可分为标量和矢量两大类。标量是指只有大小而无方向的物理量，如长度、质量、时间、电荷、电阻等都是标量。矢量是指既有大小又有方向的物理量，如力、速度、加速度、电场强度、磁场强度等都是矢量。矢量的代数运算与一般的代数运算有着很大的不同。

### 1.1.1 矢量及其表示法

为便于区别矢量与标量，在本书中矢量均用黑斜体字母表示，如  $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 、 $\boldsymbol{E}$  等，而标量则用斜体字母表示，如  $f$ 、 $\Phi$ 、 $U$  等。

#### 1. 矢量与单位矢量

在三维空间中，任意一个矢量  $\boldsymbol{A}$  均可表示为一条有方向的线段。该线段的长度代表矢量  $\boldsymbol{A}$  的大小或模，而该线段的方向代表矢量  $\boldsymbol{A}$  的方向。

如果一个矢量的模等于 1，则该矢量被称为单位矢量。单位矢量既可以用来表示某一个指定方向，如波的传播方向、各种坐标系中坐标轴的方向等，也可以用来表示某一个矢量的方向。

用来代表矢量  $\boldsymbol{A}$  的方向的单位矢量被写作  $\boldsymbol{e}_A$ 。任意一个矢量  $\boldsymbol{A}$  均可借助代表其大小的模  $A$  和代表其方向的单位矢量  $\boldsymbol{e}_A$  表示成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_A A \quad (1.1.1)$$

于是有

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \quad (1.1.2)$$



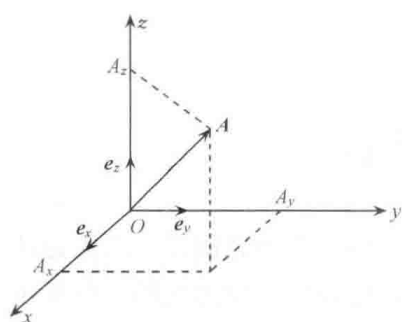


图 1.1.1 矢量及其表示法

由此可见, 矢量  $A$  的单位矢量  $e_A$  是一个方向与该矢量相同而模等于 1 的矢量。

## 2. 矢量表示法

在三维空间, 可以根据需要利用不同的正交坐标系将任意一个矢量通过该矢量在三个坐标轴上的投影, 即三个分量来表示。

以直角坐标系为例, 如图 1.1.1 所示, 矢量  $A$  可以表示成一条由坐标原点出发的有方向的线段。设直角坐标系中沿三个坐标轴正方向上的单位矢量分别为  $e_x, e_y, e_z$ , 若矢量  $A$  在这三个单位矢量方向上的投影, 即三个分量分别为  $A_x, A_y, A_z$ , 则矢量  $A$  可唯一地表示为

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.1.3)$$

矢量  $A$  的模或大小  $A$  可通过  $A$  的三个坐标分量  $A_x, A_y, A_z$  表示成

$$A = |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1.4)$$

矢量  $A$  的单位矢量  $e_A$  则可表示成

$$e_A = \frac{A}{A} = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1.1.5)$$

式中,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  分别为

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.6)$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.7)$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.8)$$

可以看到,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示矢量  $A$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的夹角。事实上,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  正是单位矢量  $e_A$  在直角坐标系中的三个分量, 决定着矢量  $A$  的方向, 故它们被称为矢量  $A$  的方向余弦, 且

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

由此可得

$$|e_A| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$$

即单位矢量  $e_A$  的模等于 1。

在其他的坐标系中, 矢量的表示形式和直角坐标系具有类似结果。

## 3. 位置矢量与距离矢量

在三维空间, 由坐标原点  $O$  出发引向空间任一点  $P(x, y, z)$  的有方向线段, 称为点  $P$