边界节点法及其应用

王福章　林　继　著

科 学 出 版 社

边界节点法及其应用

王福章　林　继　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书对无网格法包括区域型无网格法和边界型无网格法的发展进行了较为全面的综述, 系统地介绍了对边界节点法的基本理论和相关应用, 包含近年来国内外和作者的研究历史和最新研究成果. 对边界节点法的几种实现方式 (包括配点格式、移动最小二乘格式、Galerkin 格式和变分格式) 进行了推导和总结, 对边界节点法中的若干关键技术问题进行了研究. 以声学等问题为背景, 系统地总结了边界节点法的基本原理、程序实现方法及其典型应用, 包括高频率声波问题、Cauchy 反问题、源项反演问题、非线性问题、薄板小挠度弯曲问题、薄板自由振动问题、超薄涂层热传导问题等应用.

本书可供高等学校和科研院所力学、机械工程、航空航天、计算数学及相关领域的科研人员、研究生、本科高年级学生参考, 也可作为相关专业研究生课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

边界节点法及其应用/王福章, 林继著. —北京: 科学出版社, 2018. 5

ISBN 978-7-03-057167-0

I. ①边… II. ①王… ②林… III. ①计算力学 IV. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 076322 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 彭珍珍

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2018 年 5 月第一次印刷 印张: 11

字数: 222 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

众所周知，在科学技术领域内，对于实际问题可以通过数学建模得到它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的定解条件．非常遗憾的是，只有极少数在理想状态下且几何形状相当规则的情况下得到的方程能用解析方法求出精确解．对于大多数问题，则不能得到解析的答案．因此许多学者和专家多年来寻找和发展了一种求解途径和方法解决这类问题——数值解法．特别是随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，数值计算方法已成为求解科学技术问题的主要工具．

有限差分法(FDM)、有限元法(FEM)、有限体积法(FVM)和边界元法(BEM)是目前最流行的几种数值方法．有限差分法将求解域划分为差分网格，用有限个网格节点代替连续的求解域．有限元法的基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解．有限体积法的基本思路是将计算区域划分为一系列不重复的控制体积，并使每个网格点周围有一个控制体积；将待解的微分方程对每一个控制体积积分，得出一组离散方程．边界元法是继有限元法之后发展起来的一种数值方法，它以定义在边界上的边界积分方程为控制方程，通过对边界分元插值离散，化为代数方程组求解．这些数值方法对许多问题已研制出通用成熟的计算机程序及相应的软件，在许多工程领域都有广泛的应用．

2005 年 9 月我进入辽宁师范大学攻读硕士研究生，导师周德亮老师的主要研究方向就是径向基函数方法及其应用，由于对数值计算方面的研究非常感兴趣，因此我的硕士论文选题选取了基于径向基函数的无网格法研究．通过查阅大量资料，我对传统的数值方法和无网格法有了非常多的了解．无网格法具有精度高、无须网格划分、便于实施等突出优点，有很强的解题灵活性，因此吸引我对该类方法的学习和研究，此后与“无网格法”结缘至今．2008 年我考入河海大学，师从陈文教授，陈文老师在无网格法领域的独特见解让我对无网格法，尤其是边界配点型无网格法有了进一步的认识．在攻读博士研究生期间和工作

以后，围绕边界配点型无网格法继续做了一些理论和应用研究.

边界节点法是陈文老师于2000年提出来的一种边界配点型无网格法，其应用和研究已经有十几年的历史，已经被广泛用于数值模拟自由声场条件下的线性问题、非线性问题和反问题等. 本书内容主要取自作者攻读博士研究生以来的研究成果，其中有些内容尚未公开发表. 作者认为边界型无网格法将在一个相当长的时间内与传统的数值方法并存，各有所长，相互补充. 没有任何方法在所有问题上都是最好的.

可以预计，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，无网格法作为一个具有理论基础和广泛应用效力的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身亦将得到进一步的发展和完善.

本书由王福章撰写，林继负责全书的修改工作. 十多年来，在无网格法研究过程中，得到了许多老师、朋友的帮助，在此致以衷心的感谢. 本书获淮北师范大学学术著作出版基金资助. 本书的部分研究工作得到国家自然科学基金青年基金(No. 11702083)、安徽省高校自然科学研究项目（重点项目）(No. KJ2016A631)、淮北师范大学博士科研启动基金的支持，特此致谢!

由于作者水平和时间所限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

作　者

2017年10月于淮北

目录

前言
第 1 章 绪论 …… 1
1.1 引言 …… 1
1.2 无网格法 …… 2
1.3 区域型无网格法的研究现状 …… 2
1.4 边界型无网格法的研究现状 …… 7
1.5 边界节点法的研究现状 …… 10
第 2 章 声传播理论和边界节点法 …… 13
2.1 引言 …… 13
2.2 边界节点法 …… 13
2.2.1 Helmholtz 方程控制声场定解问题 …… 13
2.2.2 边界节点法的基本原理 …… 17
2.2.3 配点法格式 …… 19
2.2.4 非齐次问题的边界节点法 …… 19
2.2.5 对称边界节点法 …… 21
2.2.6 数值仿真分析 …… 22
2.3 边界节点法其他格式 …… 26
2.3.1 移动最小二乘格式 …… 26
2.3.2 Galerkin 格式 …… 27
2.3.3 变分格式 …… 28
2.4 本章结论 …… 29
第 3 章 边界节点法的稳定性分析 …… 30
3.1 引言 …… 30
3.2 正则化方法 …… 31
3.2.1 奇异值分解 …… 31
3.2.2 离散问题的正则化方法 …… 32
3.2.3 截断奇异值分解 …… 32
3.2.4 Tikhonov 正则化 …… 32

3.2.5 阻尼奇异值分解 …… 33
3.2.6 迭代正则化方法 …… 33
3.3 正则化参数选取法则 …… 34
3.3.1 L 曲线 …… 34
3.3.2 广义交叉校验 …… 35
3.3.3 偏差原则 …… 35
3.3.4 拟最优方法 …… 36
3.4 数值算例及讨论 …… 36
3.4.1 椭圆区域分析 …… 37
3.4.2 方形区域分析 …… 38
3.4.3 三角形区域分析 …… 40
3.4.4 不规则区域分析 …… 42
3.5 本章结论 …… 44
第 4 章 边界节点法的适用性研究 …… 45
4.1 引言 …… 45
4.2 度量插值系数方程组的一种新标准 …… 45
4.3 数值结果与讨论 …… 47
4.3.1 含噪声的二维 Helmholtz 方程定解问题 …… 47
4.3.2 含噪声的二维修正 Helmholtz 方程定解问题 …… 48
4.3.3 二维拟 Laplace 方程定解问题 …… 49
4.3.4 中波数 Helmholtz 方程定解问题 …… 50
4.3.5 不规则区域 Helmholtz 方程定解问题 …… 50
4.3.6 三维 Helmholtz 方程定解问题 …… 52
4.3.7 三维修正 Helmholtz 方程定解问题 …… 54
4.4 本章结论 …… 56
第 5 章 反问题及其应用 …… 57
5.1 Cauchy 反问题的格式 …… 58
5.2 Cauchy 反问题数值算例 …… 60
5.2.1 正则化方法的影响 …… 60
5.2.2 数值结果与讨论 …… 62
5.3 源项反问题 …… 64
5.3.1 源项反问题的数值计算格式 …… 64
5.3.2 间接对偶互惠法 …… 65
5.3.3 直接对偶互惠法 …… 67
5.3.4 对偶边界节点法的数值格式 …… 67

5.4 源项反问题数值算例 ······ 68
5.4.1 圆域上的 Helmholtz 方程定解问题 ······ 68
5.4.2 圆域上的修正 Helmholtz 方程定解问题 ······ 73
5.4.3 方形域上的 Helmholtz 方程定解问题 ······ 74
5.5 本章结论 ······ 75
第 6 章 非线性问题的类边界节点法 ······ 76
6.1 边界节点法的数值格式 ······ 76
6.2 类方程法 ······ 77
6.3 特解法 ······ 77
6.4 数值格式实施 ······ 79
6.5 数值结果及讨论 ······ 81
6.5.1 迭代初值选取的影响 ······ 82
6.5.2 MQ 形状参数的影响 ······ 82
6.5.3 内部节点数的影响 ······ 83
6.6 本章结论 ······ 84
第 7 章 边界节点法的自适应算法研究 ······ 85
7.1 传统边界节点法的基本思想 ······ 85
7.2 边界节点法的自适应算法 ······ 87
7.3 算例分析 ······ 88
7.3.1 算例 1 ······ 88
7.3.2 算例 2 ······ 90
7.3.3 算例 3 ······ 90
7.3.4 讨论 ······ 91
7.4 本章结论 ······ 92
第 8 章 大规模问题的快速边界节点法 ······ 93
8.1 循环矩阵及快速傅里叶变换 ······ 93
8.2 基于循环矩阵快速边界节点法 ······ 95
8.2.1 基本原理 ······ 95
8.2.2 算例分析 ······ 96
8.3 快速多极边界节点法 ······ 99
8.3.1 基于贝塞尔函数的数值格式 ······ 99
8.3.2 快速贝塞尔函数法 ······ 100
8.3.3 快速多极边界节点法的实现算法 ······ 102
8.3.4 数值算例 ······ 103

8.3.5 结束语 …… 105
第 9 章 薄板小挠度弯曲问题 …… 106
9.1 薄板小扰度弯曲问题模型 …… 106
9.1.1 基本假设 …… 106
9.1.2 弹性曲面的微分方程 …… 108
9.1.3 薄板小扰度弯曲问题边界条件 …… 111
9.2 薄板小扰度弯曲问题的边界节点法 …… 111
9.3 算例分析 …… 112
9.3.1 圆形薄板 …… 112
9.3.2 正方形薄板 …… 113
9.4 本章结论 …… 115
第 10 章 薄板自由振动问题分析 …… 116
10.1 薄板自由振动数学模型 …… 116
10.2 薄板自由振动的边界条件 …… 117
10.3 薄板自由振动的边界节点法 …… 118
10.4 数值算例 …… 122
10.4.1 任意形状简支板 …… 122
10.4.2 混合型边界条件薄板算例分析 …… 124
10.5 本章结论 …… 126
第 11 章 超薄涂层热传导分析 …… 127
11.1 超薄涂层计算的主要困难 …… 127
11.2 超薄涂层热传导问题 …… 129
11.3 区域边界节点法 …… 130
11.4 稳态热传导的无奇异基函数及黄金搜索法 …… 133
11.5 数值算例 …… 134
11.5.1 圆环涂层结构的热流分析 …… 134
11.5.2 方形涂层结构的热传导分析 …… 135
11.5.3 数值稳定性分析 …… 137
11.6 本章结论 …… 139
第 12 章 功能梯度材料传热分析 …… 140
12.1 引言 …… 140
12.2 材料非线性功能梯度材料的传热问题 …… 140
12.3 数值结果与讨论 …… 144

12.3.1　算例 1 …… 144
12.3.2　算例 2 …… 147
参考文献 …… 151

第1章 绪　论

本章首先简要介绍了区域型无网格法和边界型无网格法的研究历史及最新进展，其次介绍了一类典型的边界型无网格法——边界节点法的研究历史和最新进展.

1.1 引　言

有限单元法作为解决科学和工程问题最有效的数值方法之一备受关注. 有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个，且按一定方式相互联结在一起的单元组合体，以求解连续体力学问题的数值方法. 由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，所以可以模型化几何形状较为复杂的求解域[1].

有限单元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数. 单元内的近似函数通常由未知场函数或及其导数在单元的各个节点的数值和其插值函数来表达. 因此，一个问题的有限元分析中，未知场函数或及其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(即自由度)，从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题. 一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到这个求解域上的近似解. 显然，随着单元数目的增加，即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加以及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进. 如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解.

值得注意的是，由于需要对全域进行离散，所以有限元法的前期处理工作量较大、未知数较多、成果整理工作量大，导致计算量十分庞大. 此外，美国著名力学家 Ted Belytschko[2]在 1996 年曾指出：“……it might be mentioned that even with powerful mesh generators, three-dimensional meshing is still an extremely burdensome task……”，即有限元对于三维空间的网格生成是一个非常繁重的工作，这也是有限元法的另一不足之处.

由于需要对问题的界面进行描述，边界元法显然是更为合适的一种数值方法[3]. 其基本原理是将力学中的微分方程的定解问题化为边界积分方程的定解问题，再通过

边界的离散化与待定函数的分片插值求解的数值方法. 边界元法的优点在于:

(1) 它只需要对计算域的边界进行网格划分, 可以使计算问题的维数降低一个维数;

(2) 由于边界元法所用的解满足无限远处的边界条件, 所以可以非常方便地用于处理无限域和半无限域问题;

(3) 边界元法的求解精度比有限元法高.

尽管如此, 边界元法面临几个不足之处: (超)奇异性; 边界元法形成的线性方程组的系数矩阵是满阵, 所以在处理大规模问题时遇到了困难, 解题的规模受到限制; 边界元在处理弹塑性问题或大的有限变形问题时, 由于需要对物体进行体积离散, 边界元降维的优点消失. 山东理工大学张耀明教授等最近已经对边界层效应问题做了较大的改进[4,5], 台湾海洋大学 J. T. Chen 教授[6]以及中国科学院余德浩教授[7]等对(超)奇异性进行了较多的研究. 值得注意的是, 边界元法需要对每一个子域都建立一个单独的边界积分方程来表达, 这些方程通过界面条件集合为积分方程组, 待求的未知量同时出现在界面上. 计算量复杂的奇异积分引起的离散代数方程的矩阵一般为稠密满阵, 因而边界元的计算量仍十分庞大[8-10].

1.2　无 网 格 法

为了克服传统数值方法网格划分所带来的局限性, 国际上许多著名的学者三十多年来提出了多种无网格法, 相关的文献综述可以参见美国西北大学 Ted Belytschko 等著名学者的著述[11-17]. 分别对应于有限元法和边界元法, 我们可以将这些无网格法大致分为两类: 区域型无网格法和边界型无网格法[18]. 下面主要简单介绍一下无网格法以及部分无网格法在声波问题发展中的应用.

1.3　区域型无网格法的研究现状

相对于有限元法, 区域型无网格法的特点: 首先在于离散方式的不同, 它是用一系列的点而非单元来近似表示求解域; 其次计算点上的值由函数逼近而非插值得到. 有限元法和区域型无网格法的区别可以用图 1.1 来形象地说明. 由于区域型无网格法可以彻底或部分地消除网格, 不需要网格的初始划分和重构, 不仅可以保证计算的精度, 而且可以减小计算的难度. 因此它在高速碰撞、裂纹动态扩展、流固耦合以及金属加工成型过程中的超大变形问题等方面具有广阔的应用前景, 成为当前计算物理与计算力学的研究热点之一.

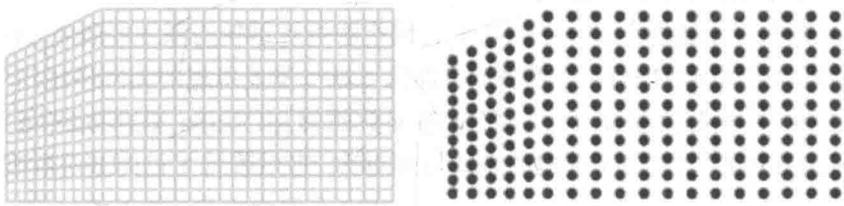
无网格法可以追溯到1977年Lucy和Gingold等提出的光滑质点流体动力学法(SPH)[19-21]，最初被广泛应用于流体力学及计算物理中，之后逐渐扩展到许多其他领域[22-26].

随后，许多国内外学者提出了几十种不同形式的无网格法. 例如：

(1) 1990 年，美国艾姆伯里–利德尔航空学院 Kansa[27]首次将径向基函数(Radial Basis Function, RBF)引入配点法中研究流体动力学问题. 其特点是将待求函数用一元函数来近似：

$$u(X) \approx u_N(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(X)$$

其中 $\phi_i(X)$ 为径向基函数，未知系数 a_i 通过使近似函数 $u_N(X)$ 强制满足 N 个节点建立的 N 个方程组得以确定. 因此径向基函数具有插值性质，可直接施加边界条件. 关于径向基函数理论方面的研究及其应用可以参见德国吉森大学 Martin D. Buhmann[28]在 2004 年出版的 *Radial Basis Functions: Theory and Implementations* 和香港浸会大学Leevan Ling在加拿大西蒙菲沙大学的博士学位论文[29]及其中的参考文献.



(a) 有限元法 (b) 区域型无网格法

图 1.1 (a)有限元法和(b)区域型无网格法

(2) 法国学者 Nayroles 等[30]于 1992 年提出扩散单元法(Diffuse Element Method, DEM)，将移动最小二乘法用于 Galerkin 方法分析 Poisson 方程和弹性问题.

(3) 1994 年 Ted Belytschko 等[31] 对扩散单元法进行了改进，提出了无网格Galerkin法 (Element Free Galerkin, EFG)，并由Lacroix和Bouillard[32]用其数值模拟了声波传播问题.

(4) 1995 年美国西北大学 W. K. Liu 等[33] 基于再生核思想及小波概念提出重构核质点法 (Reproducing Kernel Particle Method, RKPM)，并将该方法应用于弹塑性和动力学问题中. Braun 和 Sambridge[34] 在 *Nature* 上发表了自然单元法 (Natural Element Method, NEM)，其后由 Sukumar 等学者[35]对该方法做了深入的研究. 1997 年 Uras 等[36]基于多尺度分解将其用于数值模拟 Helmholtz (亥姆霍兹)控制方程声

波问题.

(5) Liszka 等[37] 于 1996 年提出了 hp 无网格云团法(hp meshless clounds method). 美国计算数学学者 Babuska 和 Melenk[38]提出了单位分解有限元法(Partition of Unity Finite Element Method, PUFEM), 随后 Gamallo 和 Astley[39]将该方法扩展到低频率声波传播问题的求解.

(6) 1998 年美国得克萨斯大学奥斯汀分校著名学者 Duarte 和 Oden[40]提出基于云团概念的 Hp 云团法(H-p clouds Method, HPCM). 同年, Belytschko 和 Krongauz 等[41]对无单元法的完备性进行了初步研究. 加利福尼亚大学著名国际力学专家 Satya N. Atluri 等[42,43] 提出了局部彼得洛夫–伽辽金无网格 (Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG) 法和局部边界积分方程 (LBIE) 法. 其后, 中国科学技术大学陈海波等[44]将其拓展到求解高波数声波传播问题.

(7) 1999 年 Wendland[45]将径向基函数引入 Galerkin 法中建立相应的无网格形式(Element Free Galerkin Method, EFGM). 庞作会、葛修润等[46,47]1999 年改进和推广了无网格 Galerkin 方法, 将该法用于边坡开挖问题. 寇晓东等[48,49]对无网格法基本理论和无单元法实现追踪开裂的方法进行了深入的研究, 提出了一种拱坝三维开裂分析的近似数值方法.

(8) 刘欣、朱德懋[50]于 2001 年对无网格法进行了较为深入的研究, 对边界奇异性半解析无网格法进行了初步探讨, 提出了流行覆盖思想的无网格法.

(9) 2002 年陈文提出了基于径向基函数的修正 Kansa 法(Modified Kansa's Method, MKM)[51], 该方法形成的系数矩阵对称, 有效改善了径向基函数配点法在边界上的精度.

(10) 张雄等[52]于 2003 年以加权残量法为主线进行研究, 提出了紧支试函数加权残量法及最小二乘配点法. 程玉民、陈美娟[53]提出了以带权的正交函数作为基函数的边界无单元法——改进的移动最小二乘逼近法. 刘学文等[54]提出了配点型点插值加权残值法. 张建辉、邓安福[55]首次应用 EFM 计算分析筏板基础和弹性地基板, 取得了较好的成果.

此外, 关于无网格法的专著有:

(1) 美国加利福尼亚大学著名学者 A. N. Altluri[56] 于 2002 年出版的 *The Meshless Local Petro-Galerkin (MLPG) Method*, 对局部无网格 Galerkin 法及其应用做了全面的讲解.

(2) 新加坡国立大学 G. R. Liu[57-59]分别于 2002 年、2003 年和 2005 年出版的 *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, Smoothed Particle Hydrodynamics —— a Meshfree Particle Method* 和 *An Introduction to Meshfree*

Methods and Their Programming, 系统地介绍了现有各种无网格法的基本理论及程序设计.

(3) 清华大学张雄[60]于 2004 年出版了国内第一本专著《无网格方法》, 以紧支函数加权残量法为主线, 系统地论述了目前现有的各种无网格法的基本原理以及它们之间的区别与联系, 建立了一些新型有效的无网格法.

(4) 2004 年美国加利福尼亚大学伯克利分校 S. F. Li 和美国西北大学 Wing Kam Liu[61]出版的 *Meshfree Particle Methods*, 系统地阐述了光滑粒子流体动力学、无网格 Galerkin 法和重构核质点法等.

(5) 西北工业大学刘更[62]也于 2005 年出版了《无网格法及其应用》, 介绍了无网格法的产生、发展及研究动态, 阐述了无网格法的近似函数、权函数及有关问题的处理等基本知识.

(6) 2006 年华盛顿大学 Y. P. Chen 等[63]出版了 *Meshless Methods in Solid Mechanics* 一书, 对比论述了有限元法和无网格法的特点, 并总结分析了无网格法在固体力学中的应用.

(7) 2011 年刘欣[64]编写的《无网格方法》对无网格法的发展进行了比较全面详细的综述, 并归纳论述了无网格法中常用的几种散点插值技术方法(移动最小二乘法、核积分法、径向基函数方法等), 以及无网格法的几种主要实现方式(Galcrhn 积分法和配点法等)的原理, 这些都是无网格法的基础. 然后, 对几种主流的无网格法进行了研究表述, 包括“hp 云团法”、单位分解法、有限点法、径向基函数等, 涉及固体力学、流体力学、油藏模拟、期权定价等方程的求解, 以及对高梯度问题的自适应分析计算求解. 最后论述了近年来流体–结构相互作用的无网格法研究的最新进展.

(8) 2012 年秦荣[65]编著的《样条无网格法》主要介绍固体力学、结构力学、智能结构力学、计算力学、工程技术科学及相关交叉学科的样条无网格法及其应用, 内容包括基本概念、样条函数、样条有限点法、样条加权残数法、样条边界元法、样条无网格法及其在工程线弹性分析、非线性分析、动力分析、稳定性分析、极限承载能力分析、可靠性分析、智能结构分析、电磁场分析及相关交叉学科中的应用.

(9) 2012 年李树忱和王兆清[66]编著的《高精度无网格重心插值配点法: 算法、程序及工程应用》论述了基于重心型插值的高精度无网格配点法的基本算法和计算程序; 详细讨论了常微分方程组边值问题和初值问题、积分方程和积分–微分方程、二维椭圆型偏微分方程边值问题、波动方程和热传导方程的重心插值配点法计算公式和程序; 论述了不规则区域上重心插值配点法的具体算法; 给出了重心

插值配点法在结构变形、屈曲和振动分析方面的算法和程序；通过大量算例说明重心插值配点法的有效性和计算精度.

(10) 2013 年赵国群和王卫东[67]编著的《金属塑性成型过程无网格数值模拟方法》详细介绍了无网格法的理论基础、无网格法基本理论与关键技术、金属塑性成形基本理论、二维金属塑性成形无网格 Galerkin 方法、三维金属塑性成形无网格 Galerkin 方法、金属塑性成形过程无网格 Galerkin 数值模拟实例等.

(11) 2013 年 W. Chen 等[68]编著的 *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods* 概述了基于径向基函数配点型无网格法的最新进展，着重介绍了几类新的径向基核函数及数值模拟偏微分方程的数值格式.

(12) 2014 年由蔡星会、许鹏、姬国勋[69]编著的《磁流体无网格方法及应用》以加权残量法为基础，以管道中磁流体流动为应用背景，系统介绍了典型无网格法，主要包括无网格局部径向基函数法、局部 Petrov-Galerkin 法、无网格 Galerkin 法、无网格径向基点插值法及无网格配点法等在磁流体流动中的应用，进行了大量数值仿真实验，分析了影响算法精度的典型参数，并对部分无网格算法进行了改进.

(13) 2014 年龙述尧[70]编著的《无网格方法及其在固体力学中的应用》围绕无网格法理论及其应用展开，介绍了无网格法的类型、特点以及研究进展；介绍了弹性力学问题、薄板和中厚板问题的基本方程以及建立系统方程的基本原理；阐述了无网格法形函数的构造，包括光滑粒子水动力学法、再生核粒子法、移动最小二乘法、点插值法以及自然邻接点插值法的原理和构造方法；研究了无网格全域 Galerkin 方法及其在弹塑性、几何非线性问题以及连续体结构拓扑优化设计中的应用；研究了无网格局部边界积分方程方法及其在弹性力学和薄板弯曲问题中的应用；研究了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法及其在弹性力学、断裂力学、超弹性材料接触问题、薄板和中厚板问题中的应用；研究了无网格自然邻接点局部 Petrov-Galerkin 方法及其在弹性力学、中厚板问题以及连续体结构拓扑优化设计中的应用.

(14) 2014 年陈文、傅卓佳、魏星[71]编著的《科学与工程计算中的径向基函数方法》系统地介绍了科学与工程计算中径向基函数方法的基本理论和相关应用，包含径向基函数的物理背景及其研究现状和科学与工程应用；各类径向基函数及核径向基函数；径向基函数在散乱数据处理中的应用；常见的几类区域型径向基函数方法，并通过数值算例检验这些算法；求解齐次微分方程的几类边界型径向基函数方法；边界型径向基函数离散方法处理非齐次微分方程的几种技术；给出径向基函数方法在各向异性、非定常、非线性等偏微分方程问题中的应用；大规模径

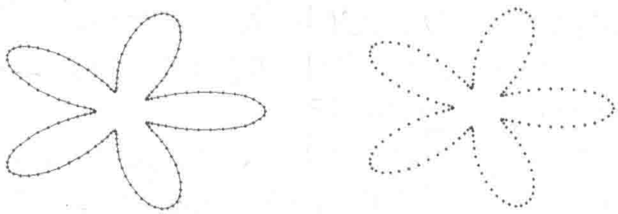
向基函数方法快速求解技术.

(15) 2015 年上海大学程玉民[72]编写的《无网格方法》(上、下)阐述了无网格法的研究进展及存在的问题、无网格法的逼近函数、改进的无单元 Galerkin 方法、插值型无单元 Galerkin 方法、边界无单元法和无网格法的数学理论、复变量无单元 Galerkin 方法、基于变分原理的复变量无网格法、改进的复变量无单元 Galerkin 方法和复变量重构核粒子法等.

区域型无网格法的不足之处首先是对模拟问题的物理区域内部数据的需求，而对于很多实际工程问题，物理区域内部的数据很难得到. 另一方面，有些区域型无网格法需要背景网格[73,74]，并不是真正意义上的无网格法.

1.4 边界型无网格法的研究现状

对应于边界元方法[75-77]，边界型无网格法的基本思想是仅用物理区域边界上的一系列点来近似表示求解域，因此在分析涉及高频波问题中具有很大的优势. 这些方法在计算不带源项的齐次问题时，由于只需要用一系列离散的边界节点来表示模型，所以对于复杂二维、三维结构其建模也较有限元和边界元模型更为简单，减少了计算量. 边界元法和边界型无网格法的离散格式如图 1.2 所示. 近年来广泛研究的边界型无网格法包括：



(a) (b)

图 1.2 (a)边界元法和(b)边界型无网格法

(1) 基本解法(Method of Fundamental Solutions, MFS)，该方法是对应于边界元法发展起来的. 最早由 Kupradze[78]和 Aleksidze[79]于 20 世纪 60 年代提出，然而直到 20 世纪 70 年代，基本解法才作为一种计算方法由 Mathon 和 Johnston[80]提出来. 随后 M. A. Golberg[81]和 C. S. Chen 教授[82]将其扩展到非齐次方程和时域问题. 1992 年美国肯塔基大学 Kondapalli 教授等[83]将基本解法推广到三维无限弹性介质中的弹性波问题. 该方法可以看作径向基函数的一种特殊格式. 关于该方法