中学数学解题的100个技巧

精选100个解题技巧和方法
资深名师专业解读

王淼生 任勇 / 著

初、高中均适用

ECNUP 上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

中学数学解题的100个技巧

王淼生　任勇／著

初、高中均适用

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

中学数学解题的100个技巧/王淼生,任勇著. —上海:华东师范大学出版社,2017

ISBN 978-7-5675-6385-8

Ⅰ.①中… Ⅱ.①王… ②任… Ⅲ.①中学数学课—解题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第071326号

中学数学解题的100个技巧

著　　者	王淼生　任　勇
策划编辑	朱永通
审读编辑	卢风保
封面设计	视界创意

出版发行	华东师范大学出版社
社　　址	上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址	www.ecnupress.com.cn
电　　话	021-60821666　行政传真　021-62572105
客服电话	021-62865537
邮购电话	021-62869887　地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店	http://hdsdcbs.tmall.com/

印 刷 者	北京密兴印刷有限公司
开　　本	787×1092　16开
印　　张	18.5
字　　数	400千字
版　　次	2017年7月第一版
印　　次	2017年7月第一次
印　　数	16 100
书　　号	978-7-5675-6385-8/G·10304
定　　价	45.00元

出 版 人　王　焰

前　言

数学学习，离不开解题。用什么样的观点去对待数学解题，并采用什么样的方法和技巧去解决数学问题，这对于一个数学学习者来说，是十分重要的。

解题需要一定的方法

解题一定要讲究方法。事实上，我们解决任何一道数学题，都伴随着这样或那样的方法，没有方法的解题是不存在的，只不过有繁与简、通法与特法之分罢了。要提高解题能力，就要掌握一定的解题方法。本书总结的100种解题方法和技巧，愿读者能逐步领悟和掌握。

解题没有固定的方法

不同的人解同一道数学题有着许许多多不同的解法，同一个人解同一道数学题也可得到不同的解法。再好的解题方法也只是相对而言的，不存在可以解任何数学题的方法。只有具体问题具体分析，才能不断提高解题水平。本书中部分例题重复，正说明了同一道题从不同角度分析，会得到不同的解题方法。愿读者能加以比较，细心领会。

大法应该熟练地掌握

数学解题中的大法，是指解题中一些通用的、常用的方法。这些方法是人们长期解题所得出的经验，如数形结合、反面思考、问题转化、函数观点等。这是数学中的大法，必须牢固、熟练地掌握。这也是数学解题的基本功。

小法必须灵活地运用

数学解题中的小法，是指解题中一些特殊的解题方法。这些方法在解决某些具体问题时，常常显示出独特的优越性，如倒置变换、单位圆法、物理方法、赋值解题等。灵活地运用小法，是提高数学解题能力的关键。

技巧源自数学概念

解题技巧，无论大法、小法，都不是空中楼阁，其本质源自数学概念。只有理解概念，厘清概念的来龙去脉，才能得心应手，如回归定义、方程思想、归纳推理、合理猜想等。这正是我们目前正在实施的全国教育科学“十二五”规划2015年度教育部规划课题“基于数学教学内容知识（MPCK）视角下的概念教学案例研究”（课题批准号FHB150464）的研究成果之一。

数学解题是一个矛盾的统一体。解题要有一定的方法，却没有固定的方法。不定中有定，定中又相对不定。大法和小法也是相对而言的，对整个数学解题

来说是小法的某种方法，可能在解决某一类问题时便是大法。本书所总结的 100 种解题技巧中，大法、小法均有兼顾。

本书是总结数学解题技巧方面的一次尝试，注意选择常见的、实用的、具体的解题技巧，每个技巧配有 5 道典型例题（兼顾初、高中学生）和 2 道练习及其解答。限于作者的学识水平，有些问题还处理得不好，如顺序的安排怎样更好，部分内容交叉、包含怎样处理更好等，祈望读者不吝指正，以便再版时修改。

数学教育界的朋友们为本书的写作提了一些指导性意见，此书在写作过程中还参考了国内 1980 年以来中学数学期刊上的文章，在此谨向真诚的朋友和论文的作者表示谢意！

王淼生 任 勇

2017 年 5 月 1 日

目　录

技巧 1　枚举寻径 ……………… 1

技巧 2　问题转化 ……………… 3

技巧 3　以退求进 ……………… 6

技巧 4　以进求退 ……………… 9

技巧 5　以形助数 …………… 12

技巧 6　用数解形 …………… 14

技巧 7　整体思维 …………… 17

技巧 8　回归定义 …………… 19

技巧 9　特殊探路 …………… 21

技巧 10　反面思考 …………… 24

技巧 11　发掘隐含 …………… 26

技巧 12　函数观点 …………… 28

技巧 13　方程思想 …………… 30

技巧 14　逐次逼近 …………… 32

技巧 15　局部处理 …………… 35

技巧 16　构造模型 …………… 37

技巧 17　列表解题 …………… 39

技巧 18　借助于图 …………… 41

技巧 19　对称分析 …………… 44

技巧 20　奇偶分析 …………… 46

技巧 21　设而不求 …………… 48

技巧 22　多想少算 …………… 50

技巧 23　降维策略 …………… 52

技巧 24　升维策略 …………… 55

技巧 25　消元思想 …………… 57

技巧 26　换元策略 …………… 60

技巧 27　辅助元法 …………… 62

技巧 28　三角代换 …………… 64

技巧 29　均值代换 …………… 66

技巧 30　和差代换 …………… 68

技巧 31　倒置变换 …………… 70

技巧 32　常值代换 …………… 72

技巧 33　确定主元 …………… 74

技巧 34　构造方法 …………… 76

技巧 35　对偶关系 …………… 78

技巧 36　凑配方法 …………… 80

技巧 37　复数思想 …………… 82

技巧 38　非负数法 …………… 84

技巧 39　数字化法 …………… 86

技巧 40　举个反例 …………… 88

技巧 41　类比推理 …………… 90

技巧 42　归纳推理 …………… 93

技巧 43　递推方法 …………… 96

技巧 44　分类讨论 …………… 99

技巧 45　极端原理 ………… 102

技巧 46　排序原理 ………… 104

技巧 47　排序思想 ………… 106

技巧 48　周期原理 ………… 108

技巧 49　抽屉原理 ………… 111

技巧 50　容斥原理 ………… 114

技巧 51　基本量法 ………… 117

技巧 52　具体化法 ………… 119

技巧 53　同一原理 ………… 122

技巧 54　试验方法 ………… 124

技巧 55　估值方法 ………… 129
技巧 56　坐标思想 ………… 132
技巧 57　极坐标法 ………… 135
技巧 58　拆项方法 ………… 138
技巧 59　添项方法 ………… 140
技巧 60　增量方法 ………… 142
技巧 61　分离方法 ………… 144
技巧 62　几何变换 ………… 147
技巧 63　面积关系 ………… 150
技巧 64　体积关系 ………… 155
技巧 65　补形方法 ………… 158
技巧 66　补体方法 ………… 160
技巧 67　补台成锥 ………… 163
技巧 68　分割方法 ………… 166
技巧 69　化整为零 ………… 170
技巧 70　聚零为整 ………… 174
技巧 71　待定思想 ………… 176
技巧 72　集合思想 ………… 179
技巧 73　动静结合 ………… 182
技巧 74　RMI 原理 ………… 185
技巧 75　利用有界 ………… 187
技巧 76　赋值解题 ………… 189
技巧 77　判别式法 ………… 191
技巧 78　巧妙配方 ………… 193
技巧 79　比较方法 ………… 195
技巧 80　适当放缩 ………… 197
技巧 81　不等导等 ………… 200
技巧 82　等导不等 ………… 202
技巧 83　物理方法 ………… 204
技巧 84　巧用重心 ………… 207
技巧 85　居高临下 ………… 210
技巧 86　行列式法 ………… 212
技巧 87　极限思想 ………… 214
技巧 88　一一对应 ………… 216
技巧 89　无穷递降 ………… 219
技巧 90　题根演绎 ………… 222
技巧 91　单位圆法 ………… 225
技巧 92　利用平方 ………… 227
技巧 93　计算两次 ………… 229
技巧 94　观察入手 ………… 231
技巧 95　相似联想 ………… 233
技巧 96　展开想象 ………… 235
技巧 97　优化思维 ………… 237
技巧 98　合理猜想 ………… 241
技巧 99　尝试探索 ………… 244
技巧 100　创新意识 ………… 246
附录：练习参考解答 ………… 249

技巧1 枚举寻径

有些数学题，题中包含着多种可能情形，难以用一个算式完成解答。这时我们可以根据问题的条件，把各种可能情形一一列举出来，分别予以考察，从而完成原题的解答。这是完全归纳法在解题中的具体运用。在枚举各种可能情形时，我们要充分利用划分的思想，做到不遗漏、不重复。

例1 把由1开始的自然数依次写下去，一直写到第198位数为止：

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ \cdots}_{198位}$$

那么，这个数用9来除，余数是____。

分析：问题在于这个198位数是多少呢？首先，我们把这个数按数位分成既不重复又不遗漏的三段：

第一段：数位是一位的有1 2 3 4 5 6 7 8 9，一共有$9\times1=9$位数；

第二段：数位是二位的有10 11 12…99，一共有$90\times2=180$位数；

第三段：数位是三位的有100 101 102…999，该取到哪个数呢？设取到第x个数，显然有$9+180+3x=198$，$x=3$。第三个三位数是102。所以这个数是：

123456789101112… 99100101102

它一共有198位。

接着，我们再分段考察这个数用9除的余数情况。

数位是一位的数字和$1+2+\cdots+9=45$，能被9整除。

数位是二位的数字和$1+0+1+1+1+2+\cdots+9+9=(1+2+\cdots+9)\times10+(1+2+\cdots+9)\times9$，也能被9整除。

数位是三位的数字和$1+0+0+1+0+1+1+0+2=6$。

所以，这个198位数用9除的余数是6。

例2 某班有50个学生，男女各占一半，他们围成一圈席地开会。求证：必有一个学生两旁都是女学生。

证明：要证明的结论是如下两种情况之一成立：①某男两旁是女生；②某3位（或多于3位）女生连坐。

如果①出现，则结论已成立；

如果①不出现，则每个男生至少和另一个男生连坐。我们把连坐的男生看成一组，25个男生至多分成12组，各组之间全是女生。由于全体学生是围成一圈坐，所以25个女生也至多分成12组。由抽屉原理知，至少有一组3个（或3个以上）女生连坐，即②出现，故结论成立。

例3 已知自然数A、B、C的乘积是6，求A、B、C。

解：由于6的正约数有1，2，3，6，先令$A=1$，2，3，6，做到不重不漏，再考虑B、C的取值，逐次枚举，有

$$A=1,\ \begin{cases}B=1,\ C=6;\\B=2,\ C=3;\\B=3,\ C=2;\\B=6,\ C=1;\end{cases}$$

$$A=2,\ \begin{cases}B=1,\ C=3;\\B=3,\ C=1;\end{cases}$$

$$A=3,\ \begin{cases}B=1,\ C=2;\\B=2,\ C=1;\end{cases}$$

$A=6$，$B=1$，$C=1$。

共有九组解答。

例4 三角形三边a、b、c的长都是整数，且$a\leqslant b\leqslant c$。如果$b=10$，那么，这样的三角形共有多少个？

解：当$b=n$时，取$a=k(1\leqslant k\leqslant$

n)，而 $b \leqslant c < a+b$，则 $n \leqslant c < n+k$，此时 c 的值恰好有 k 个，即

$c=n, n+1, \cdots, n+k-1$。

于是有下表：

a	b	c	三角形的个数
1	n	n	1
2	n	$n, n+1$	2
3	n	$n, n+1, n+2$	3
⋮	⋮	⋮	⋮
k	n	$n, n+1, \cdots, n+k-1$	k
⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	$n, n+1, n+2, \cdots, 2n-2, 2n-1$	n

故当 $b=n$ 时，符合条件的三角形总数为：

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

取 $n=10$，代入上式得：

$$\frac{1}{2}\times 10\times 11=55。$$

所以，符合条件的三角形有 55 个。

例5 试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$ 的根，并证明仅有一个根。

证明：显然此方程的根 $x>0$ 且 $x=2$ 是它的一个根。

假设除 $x=2$ 之外，还有正根，则此方程的根只能有两种情形：

① 若 $x \in (2, +\infty)$，

$\because \sqrt{2+x} < \sqrt{x+x}=\sqrt{2x} < \sqrt{x \cdot x}=x$，

$\therefore \sqrt{2+\sqrt{2+x}} < \sqrt{2+x} < x$，在 $(2, +\infty)$ 内不能有根。

② 若 $x \in (0, 2)$，设根 $x=2\cos 4\alpha$（4α 为锐角），代入方程右边，有

$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}=2\cos\alpha$，

则 $2\cos\alpha=2\cos 4\alpha$，

$\therefore \alpha=0$，这与 α 为锐角矛盾。故在 $(0, 2)$ 内没有其他的根。

综上可知，此方程只能有一个正根 2。

练习1

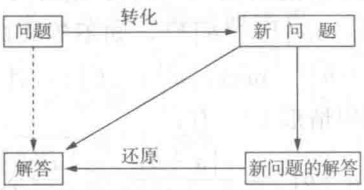
1. 已知有理数 $\frac{\pi}{4}$，试找出两个有理数 a、b，使得 $a<\frac{\pi}{4}<b$，且 (a, b) 中的任意有理数 c 写成最简分数时，它的分母不小于 10。

2. 今有 101 枚硬币，其中有 100 枚同样的真币和 1 枚伪币，伪币与真币的重量不同，现需弄清楚伪币究竟比真币轻，还是比真币重，但只有一架没有砝码的天平。试问，怎样利用这架天平称两次，来达到目的？如果现有 99 枚硬币呢？你从中能够得到一般结论吗？

技巧2 问题转化

问题转化也叫作化归，化归是数学家特别善于使用的解题策略。所谓“化归”，就是说在解决问题时，将原问题进行变形，使之转化，直至最终归结为我们熟悉的，或易于解决的，或已经解决的(新)问题。正如苏联著名数学家雅诺夫斯卡娅向奥林匹克数学竞赛参加者发表《什么叫解题》的演讲时，她的答案显得惊人的简单，完全出乎听众的意料：“解题就是把未解过的题归结为已经解过的题，也就是‘化归’。”

用问题转化策略解数学习题的过程如下：



例1 一个农民有鸡兔若干，它们共有 50 个头和 140 只脚，问鸡兔各有多少？

分析问题可以从不同视角、不同层面来进行，依据条件和题意实施转化，从而寻觅不同的解答方法，形成一题多解，这有利于优化思维品质，培养创新能力。

解法 1：以通俗易懂的图表方式：

头 50	50	50	30	鸡
→ 脚减半	下减上	上减下		
脚 140	70	20	20	兔

故农户笼中有 30 只鸡，20 只兔子。

解法 2：从一元一次方程的视角：设农户有 x 只鸡，则有

$$2x+4(50-x)=140。$$

解得 $x=30$，故农户笼中有 30 只鸡，20 只兔子。

解法 3：从二元一次方程的视角：设该农户有 x 只鸡、y 只兔子，则有

$$\begin{cases}x+y=50\\2x+4y=140\end{cases}$$

解得 $x=30$，$y=20$，故农户笼中有 30 只鸡，20 只兔子。

上述解法 2 与解法 3 很好理解，那解法 1 呢？为什么可以用解法 1 呢？依据是什么？

我们可以假想出这样一种奇特的现象：所有鸡都抬起了一只脚，同时所有兔子也仅用后脚站立在地上。显然，问题就容易多了。因为现在鸡的头数与脚的数目是相等的，每只兔子脚的数目要比头的数目大 1；那么脚数(70)与头数(50)的差(20)就是兔子的数目即兔子 20 只。其实解法 1 看似神秘，倘若我们从方程的视角来看，应该这样解释：

将解法 3 的方程组中的第二个方程变形为：$x+2y=70$，这样与第一个方程 $x+y=50$ 相减即可。因为等式 $x+2y=70$ 从表面上看似乎是脚的等式，其实是鸡的只数与兔子数目两倍之和为 70，于是上面两式相减就得到兔子的数目。

解法 4：假设笼中全是兔子没有鸡，那么应该有 $4\times50=200$ 只脚。而已知只有 140 只脚，多出了 $200-140=60$ 只脚。

怎么多出 60 只脚呢？说明笼中有鸡，而我们把它看作兔子。把一只鸡看作一只兔子，就多出 2 只脚，于是可得鸡的数量为 $60\div2=30$(只)。

故农户笼中有 30 只鸡，20 只兔子。

解法 5：假设笼中全是鸡没有兔子，那么应该有 $2\times50=100$ 只脚。

而已知有 140 只脚，少了 $140-100=$

40只脚。

怎么少了40只脚呢？说明笼中有兔子，而我们把它看作了鸡。把一只兔子看作一只鸡，就少了2只脚，于是可得兔子的数量为 $40\div 2=20$(只)。

故农户笼中有20只兔子，30只鸡。

值得说明的是：例1就是著名的“鸡兔同笼”问题。大约在一千五百年前，我国古代数学名著《孙子算经》中就有记载。

例2 在边长为1的正方形的边界上任意两点间连一条曲线，把正方形的面积分为相等的两部分。求证：曲线的长不小于1。

证明：我们先分析这两点在正方形边界上各种可能的分布情况。显然有三种情形：① 在同一条边上；② 在相邻的两边上；③ 在相对的两边上。其中③是不证自明的，因为正方形对边两点的连线不小于边长。因此，我们只需将①、②化归为③。

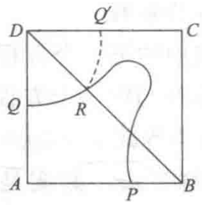


图1

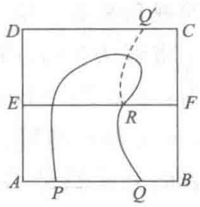


图2

设正方形为 $ABCD$，曲线 $\overset{\frown}{PQ}$ 将其面积分为相等的两部分。

(1) 当 P、Q 分别在 AB、AD 上时(图1)，连 BD，则 BD 与曲线 $\overset{\frown}{PQ}$ 必有交点 R，否则，曲边三角形 APQ 完全位于 $\triangle ABD$ 内，因而面积小于正方形 $ABCD$ 的面积的一半，与题意不合。今以 BD 为轴，将 $\overset{\frown}{RQ}$ 反转到 $\overset{\frown}{RQ'}$，则 Q' 落在 CD 上。至此，问题已化归为③。

(2) 当 P、Q 都在 AB 上时(图2)，设 E、F 分别为 AD、BC 的中点，则 EF 与 $\overset{\frown}{PQ}$ 必有交点(理由同前)。以 EF 为轴，将 $\overset{\frown}{RQ}$ 翻转为 $\overset{\frown}{RQ'}$，则 Q' 落在 CD 上。同样，问题也化归为③。

综上所述，命题获证。

例3 设 a、b 为任意实数，$0\leqslant p\leqslant 1$，求证：$|a+b|^p\leqslant |a|^p+|b|^p$。

证明：根据 p 的不同取值将问题分为三种情形：①$p=0$；②$p=1$；③$0<p<1$。对于情形①，不等式即为 $1\leqslant 2$，这显然成立。但这种情形过于简单，不具有代表性，其他情形是无法化归为这一情形的。对于情形②，不等式即为 $|a+b|\leqslant |a|+|b|$，这是我们熟知的不等式，两边平方即可获证。最后，对于情形③，我们将其化归为②。实际上，若 $a+b=0$，则因 $|a|^p+|b|^p\geqslant 0$ 知不等式成立；若 $ab=0$ 或 $0<|a+b|\leqslant \max\{|a|,|b|\}$，则因 $|a+b|^p\leqslant \max\{|a|^p,|b|^p\}$，知不等式成立。设 $|a+b|>\max\{|a|,|b|\}$，且 $ab\neq 0$，利用情形②，有：

$$|a+b|^p=\frac{|a+b|}{|a+b|^{1-p}}\leqslant\frac{|a|+|b|}{|a+b|^{1-p}}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{|a|^{1-p}}+\frac{|b|}{|b|^{1-p}}=|a|^p+|b|^p。$$

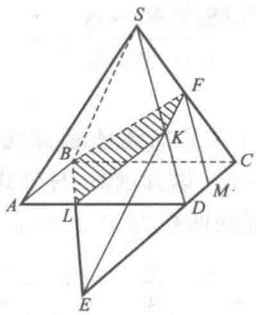
例4 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，S 是它的面积。求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

分析：此题涉及的知识点多，综合性强。但只要逐步化归，也不难寻得入门之道。首先，不等式①中元多，应该消元。由于 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，故要证①，只要证 $a^2+b^2-ab\cos C\geqslant\sqrt{3}ab\sin C$，即证 $a^2+b^2-2ab\sin(C+30^\circ)\geqslant 0$，即证 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\sin(C+30^\circ)+1\geqslant 0\cdots$②，将②式左端视为关于 $\frac{a}{b}$ 的二次三项式，则问

题化归为非常熟悉的二次不等式问题。要证②式恒成立，只要证 $\triangle=4\sin^2(C+30°)-4\leqslant 0$ 恒成立。而这是显然的。

例5 在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，延长 CD，截取 $DE=2CD$，过 B、E 和 SC 的中点 F 作截面，交 SD、AD 于 K、L。求截面 $BFKL$ 将四棱锥分为两部分的体积比。



解：这两部分均为非规则几何体，但只要求出其中一部分的体积，另一部分体积就可求。因此，我们设法将其中一部分割补成规则体。这只需将 $BFC-LKD$ 转化为两个三棱锥 $E-BFC$ 和 $E-LKD$ 之差。

设正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 a，高为 h，则 $V_{E-BFC}=V_{F-BEC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}BC\cdot CE\right)\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}a^2h$，$V_{E-LKD}=V_{F-LED}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}LD\cdot ED\right)\cdot h'$，其中 h' 为 K 到平面 $ABCD$ 的距离。作 $FM\parallel KD$ 交 CD 于 M，由 $KD:FM=ED:EM=\frac{4}{5}$，知 $h'=\frac{2}{5}h$，又 $ED=2a$，$LD:BC=ED:EC=\frac{2}{3}$，所以 $LD=\frac{2}{3}a$。于是，

$V_{E-LKD}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2a\right)\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4}{45}a^2h$，所以，

$$V_{BFC-LKD}=\frac{1}{4}a^2h-\frac{4}{45}a^2h=\frac{29}{180}a^2h,$$

$$V_{S-ALKFB}=\frac{1}{3}a^2h-\frac{29}{180}a^2h=\frac{31}{180}a^2h,$$

故 $V_{S-ALKFB}:V_{BFC-LKD}=31:29$。

练习2

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2P$，$a_n=2P-\frac{P^2}{a_{n-1}}$。其中 $n\geqslant 2$，P 为非零常数。求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

2. 20 个相同的球放入 3 个不同的盒子，要求第 i 个盒子中至少有 i 个球($i=1,2,3$)。求所有不同的方法。

技巧3 以退求进

华罗庚先生曾经指出：善于"退"，足够地"退"，退到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍。

华罗庚先生的这句名言，道出了解数学题的一个重要策略——以退求进。在遇到一个困难的问题难以下手时，我们常常采用"退"的方法。这种"退"往往使我们获得材料上和方法上的帮助。退的目的是为了进，我们把这种策略形象地称为"退下来，跃上去"。

例1 证明$\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{55\cdots56}_{n个}$为完全平方数。

解：这个问题要一下子解决是有点困难的。我们不妨先"退"下来，考察n为一些特殊值的情况。用开平方运算不难得出：

$n=1$时，$16=4^2$；

$n=2$时，$1156=34^2$；

$n=3$时，$111556=334^2$。

据此我们猜测：

$$\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{55\cdots56}_{n个}=(\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1)^2$$

下面我们来证明这一结论：

$$(\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1)^2=\underbrace{33\cdots33}_{n个}{}^2+2\times\underbrace{33\cdots33}_{n个}+1$$

$$=9\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}+6\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}+1$$

$$=(10^n-1)\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}+6\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots11}_{n个}\times10^n+5\times\underbrace{11\cdots11}_{n个}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{55\cdots56}_{n个}$$

先用不完全归纳法猜测结论，然后再给予证明，就是"退下来，跃上去"这种思想的光辉范例。

例2 二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根n次方的和为S_n。求证：

$$S_n=-\frac{bS_{n-1}+c\cdot S_{n-2}}{a}(n=3,4,5,6,\cdots)。$$

证明：为了找到证题方法，我们先"退"到$n=3$，以探求S_3时公式的证法。

设方程的两根为x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}。$$

$\because S_1=x_1+x_2$，$S_2=x_1{}^2+x_2{}^2$，

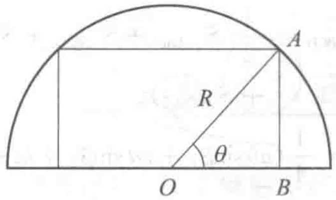
$$\begin{aligned}\therefore S_3&=x_1{}^3+x_2{}^3\\&=(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)\\&\quad-x_1x_2(x_1+x_2)\\&=S_2\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{c}{a}\cdot S_1\\&=-\frac{bS_2+cS_1}{a}。\end{aligned}$$

由S_3的启示，我们找到了解题的方法，即可"进"到S_n：

$$\begin{aligned}S_n&=x_1^n+x_2^n\\&=(x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1})(x_1+x_2)\\&\quad-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})\\&=S_{n-1}\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{c}{a}\cdot S_{n-2}\\&=-\frac{bS_{n-2}+cS_{n-2}}{a}。\end{aligned}$$

如果不先"退却"，一时便很难想到上述这种变形技巧。对特例成功经验的剖析，为我们寻找解题方法提供了一座重要的桥梁。

例3 已知半径为R的半球内接一个底面为正方形的长方体，试求此长方体的体积的最大值。



解：空间问题难以处理时，往往可以考虑“退”到完全类似的平面图形：已知半径为 R 的半圆内接一矩形，试求矩形的最大面积。这是高中课本中的一个例题，解题十分容易。由此我们不难获得本题的解法：

过长方体的对角面作一大圆截面，设 $\angle AOB=\theta$，则底面正方形边长为 $\sqrt{2}R\sin\theta$，高 $AB=R\cos\theta$。所以长方体的体积 $V=2R^2\sin^2\theta\cdot R\cos\theta=2R^3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$。欲求 V 最大，考虑

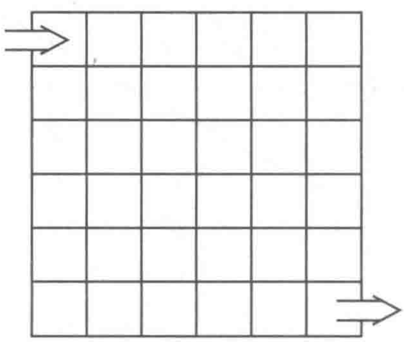
$$V^2=2R^6\sin^2\theta\sin^2\theta\cdot 2\cos^2\theta$$

$$\leqslant 2R^6\left(\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{3}\right)^3$$

$$=\frac{16}{27}R^6。$$

所以当 $\sin^2\theta=2\cos^2\theta$，即 $\tan\theta=\sqrt{2}$，即 $\theta=\arctan\sqrt{2}$ 时，V^2 有最大值，即当 $\theta=\arctan\sqrt{2}$ 时，有 $V_{\max}=\frac{4}{9}\sqrt{3}R^3$。

例4 一个参观团参观 36 个展室，每个房间两两相通，并且每个房间须且只须经过一次，问参观者能否从图中的入口进，出口出？



解：我们还是退一步：假设有两个房间，并给予编号，所以必然从 1 号进，2 号出。若有四个房间相连，可以 1 号 → 2 号 → 3 号 → 4 号，因此是奇号进，偶号出。这个问题想通了，我们就可以“进”到 36 个房间，把它们依次编号。编号时注意奇偶号相邻，这样图中的左上角入口和右下角出口都是奇数，所以不能按照题中的要求从入口进，出口出。

现在我们还可以再进一步推广：

(1) 如果有奇 × 偶个房间，把它们按奇偶号相邻编号，则左上角入口处与右下角出口处的编号奇偶性不同，一定能从入口进，出口出；

(2) 如果有奇 × 奇个房间，把它们按奇偶号相邻编号，则左上角入口处与右下角出口处的编号奇偶性相同，则不能从入口进，出口出；

(3) 如果有偶 × 偶个房间，则结论同(2)。

例5 证明：任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+\sqrt{8}$。

证明：四边形的周长和对角线的长度之和混在一起使问题变得棘手。我们先考虑一下面积为 1 的正方形，其周长恰为 4，对角线之和为 $2\sqrt{2}$ 即 $\sqrt{8}$。其次我们考虑一下面积为 1 的菱形，如果两条对角线长记作 l_1、l_2，那么菱形面积：

$S=\frac{1}{2}l_1\cdot l_2=1$，知

$$l_1+l_2\geqslant 2\sqrt{l_1l_2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}。$$

菱形周长：

$$l=4\sqrt{\left(\frac{l_1}{2}\right)^2+\left(\frac{l_2}{2}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{l_1{}^2l_2{}^2}\geqslant 2\sqrt{2l_1l_2}=4。$$

是否一般的凸四边形也可以将其周长和对角线长度和分开考虑呢？我们不妨试一试。

设 $ABCD$ 是任意一个面积为 1 的凸四边形，如图 1 所示：

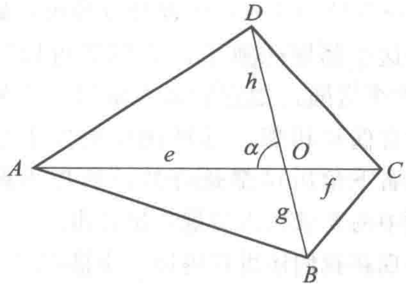


图 1

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\sin\alpha$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(e+f)(g+h)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{e+f+g+h}{2}\right)^2。$$

所以，$e+f+g+h\geqslant 2\sqrt{2}$，即对角线长度之和不小于$\sqrt{8}$。

如图 2 所示：

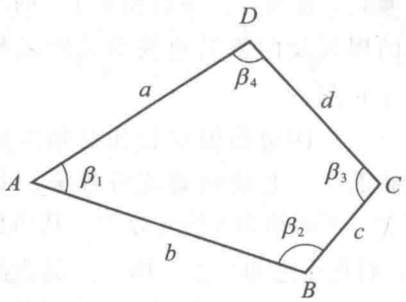


图 2

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CDA})$$
$$=\frac{1}{4}(ab\sin\beta_1+cd\sin\beta_3+bc\sin\beta_2+da\sin\beta_4)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(ab+cd+bc+da)$$
$$x=\frac{1}{4}(a+c)\cdot(b+d)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2。$$

所以，$a+b+c+d\geqslant 4$，即周长不小于 4。

综上所述，命题得证。

练习3

1. 已知 a、b、c、d、$e\in(0,1)$，求证：$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)>1-(a+b+c+d+e)$。

2. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意不同两点 A、B 作椭圆的切线，如果两条切线垂直且相交于 P，则动点 P 的轨迹为圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$。

技巧4 以进求退

"以退求进"是数学解题中的一种重要策略，而"以进求退"的思路恰好与其相反，却也是数学解题中的一种重要策略，即我们要解决的是一个特殊问题，可先将这个问题作一般化的探讨，通过一般问题的解决，来达到目的。

也许有人会有这样的感觉：特殊问题比一般问题容易解决。但事实却绝非尽然。有时一般问题的解决反而会比特殊问题的解决来得简单、明快、奇妙。这是因为带有普遍规律的一般问题揭示了问题的本质属性，而在带有个别特性的特殊问题中，这种本质属性常常被个别特性所掩盖，使人不易发觉，而未能开发利用。因此，当我们面对一个特殊问题而不易解决时，不妨采用"以进求退"策略。

例1 证明：方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1991}$在自然数集中没有解。

证明：请注意，$1991=11\times181$，而11与181都是质数。我们先来看一个一般性命题：当p_1与p_2是不同的质数时，证明新方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$在自然数集中无解。事实上，新方程两边平方后得：

$p_1p_2=x+y+2\sqrt{xy}$，

考虑$(p_1p_2-x+y)^2$，并利用上式，则有：

$$
\begin{aligned}
&(p_1p_2-x+y)^2\\
&=(x+y+2\sqrt{xy}-x+y)^2\\
&=(2y+2\sqrt{xy})^2\\
&=4[\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})]^2\\
&=4yp_1p_2。
\end{aligned}
$$

因为p_1与p_2是质数，所以上式仅当$y=k^2p_1p_2$（k为非负整数）时才能被满足。

若$k=0$，则$y=0$，$x=p_1p_2$；

若$k=1$，则$y=p_1p_2$，$x=0$；

若$k>1$，则$\sqrt{y}>\sqrt{p_1p_2}$，而$\sqrt{x}+\sqrt{y}\geqslant\sqrt{y}$，故推得$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{p_1p_2}$，从而与新方程矛盾。

因此，在自然数集中，新方程无解。由于原方程是新方程的特殊情况，因此，在自然数集中，原方程也无解。

例2 求证：$25^{49}>49!$。

分析：本题要直接进行证明，较难奏效。我们从分析所给数字的特征入手，考虑把问题"进"到一般情形来研究。

证明：注意到$25=(49+1)/2$，于是原不等式可改写为：

$[(49+1)/2]^{49}>49!$ ………… ①

为此，我们更一般地考虑不等式：

$[(n+1)/2]^n>n!$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$）…………………………………… ②

不等式②可用算术－几何平均值不等式给出证明：

$$
\begin{aligned}
\because\ &(n+1)/2=(1+2+\cdots+n)/n\\
&>\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n}=\sqrt[n]{n!}，
\end{aligned}
$$

$\therefore[(n+1)/2]^n>n!$。

在不等式②中，令$n=49$即得$25^{49}>49!$。

例3 以三角形的3个顶点和它内部的7个点，共10个点为顶点，能把原三角形分割成小三角形的个数是（　　）

A. 11　　B. 15

C. 19　　D. 不能确定

解：先"进"到一般情况，考虑三角形内部有n个点。

当$\triangle ABC$的内部增加一个点P_1，则

以 A、B、C、P_1 为顶点的不重叠的三角形有三个（如图 1），即增加了两个三角形。

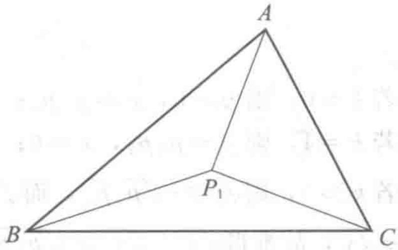


图 1

再增加一个点 P_2，不妨设点 P_2 在 $\triangle ACP_1$ 的内部，这样 $\triangle ACP_1$ 又割成三个三角形（如图 2），于是又增加两个三角形。若点 P_2 恰好落在 P_1C 上，结论仍不变（如图3）。由此可知，$\triangle ABC$ 内每增加一个点，就增加两个三角形。

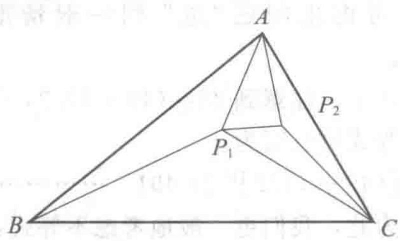


图 2

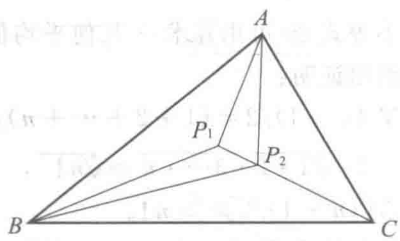


图 3

所以当 $\triangle ABC$ 的内部有 n 个点时，分割成的三角形的个数为 $1+2n$。

原题中 $n=7$，则 $1+2n=15$，故应选 B。

例4 某足球邀请赛有 16 个城市参加，每个市派出甲乙两队。根据比赛规则，每两队之间至多赛一场。并且同一个城市的两个队之间不进行比赛。比赛若干天后组委会进行统计，发现除 A 市甲队外，其他各队已比赛过的场数各不相同。问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论。

解：对问题作一般的讨论，设有 n 个满足题设条件的城市参加比赛。记 A 市乙队已赛过的场数为 a_n，显然 $a_1=0$。

在 n 个城市的情形下，根据比赛规则，每队至多赛 $2(n-1)$ 场。由题设条件，除 A 市甲队外的 $2n-1$ 个队，它们赛过的场数应分别是 $0, 1, 2, \cdots, 2(n-1)$。为确定起见，设 B 市甲队赛了 $2(n-1)$ 场，它已赛完全部场次，这样，除 B 市乙队以外的其余各队至少赛了一场，所以 B 市乙队赛过的场数为 0。现将 B 市两个队去掉，考虑余下的 $n-1$ 个城市，这时除 A 市甲队外，各队赛过的场数为 $1-1=0$，$2-1=1$，$\cdots$，$(2n-3)-1=2(n-2)$（各减去与 B 市甲队赛过的一场）。由于在 $n-1$ 个城市的情况下，A 市乙队所赛的场数为 a_{n-1}，故 $a_n=a_{n-1}+1$，$n\geqslant 2$。由此得知，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=0$，公差 $d=1$ 的等差数列，于是 $a_n=0+(n-1)\cdot 1=n-1$。

把 $n=16$ 代入上式即得 A 市乙队已赛过 15 场。

例5 把 1 到 100 这一百个自然数依次排成一横行，称第一行；把第一行中相邻的两数相加得第二行；再把第二行中相邻的两数相加得第三行……这样继续下去，最后得到的一个数是多少？

解：本例是一个由许多特殊数字组成的求值问题。由于难以直接找出这些特殊数字之间的规律，所以，直接计算，势必显得繁难和费时。为易于寻找解题的关键，能否变更命题而提出一个一般性命题？为此，我们先退一步进行个别考察：

先退到 1 个、2 个元素时，看不出规律。