江西理工大学清江学术文库

扩散型过程的
非参数统计推断方法研究

王允艳　唐明田　熊小峰　著

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

江西理工大学清江学术文库

扩散型过程的非参数统计推断方法研究

王允艳　唐明田　熊小峰　著

北京
冶金工业出版社
2018

内 容 提 要

本书主要介绍了二阶扩散过程的复加权估计，二阶扩散过程的经验似然推断，二阶扩散过程的基于经验似然的拟合优度检验，扩散过程的变带宽局部极大似然型估计，跳扩散过程的局部极大似然型估计等。

本书可作为高等院校随机过程及其应用、非参数统计等方向的研究生和科研人员阅读，也可供有关领域的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

扩散型过程的非参数统计推断方法研究/王允艳，唐明田，熊小峰著．—北京：冶金工业出版社，2018.9

（江西理工大学清江学术文库）

ISBN 978-7-5024-7755-4

Ⅰ.①扩…　Ⅱ.①王…　②唐…　③熊…　Ⅲ.①随机微分方程—非参数统计—研究　Ⅳ.①O211.63

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 199411 号

出 版 人　谭学余
地　　址　北京市东城区嵩祝院北巷 39 号　邮编　100009　电话　(010)64027926
网　　址　www.cnmip.com.cn　电子信箱　yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑　杨盈园　美术编辑　彭子赫　版式设计　孙跃红
责任校对　王永欣　责任印制　牛晓波

ISBN 978-7-5024-7755-4

冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2018 年 9 月第 1 版，2018 年 9 月第 1 次印刷
169mm×239mm；10 印张；194 千字；151 页

54.00 元

冶金工业出版社　投稿电话　(010)64027932　投稿信箱　tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社营销中心　电话　(010)64044283　传真　(010)64027893
冶金书店　地址　北京市东四西大街 46 号(100010)　电话　(010)65289081(兼传真)
冶金工业出版社天猫旗舰店　yjgycbs.tmall.com

（本书如有印装质量问题，本社营销中心负责退换）

前　言

扩散型过程是由随机微分方程确定的一类连续的随机过程，被广泛用于随机建模，例如，其在社会、物理、工程建设、生命科学以及金融经济等领域中都有着广泛的应用. 对于扩散型过程的研究主要可分为两大类：一类是关于过程的统计推断问题的研究；一类是关于过程在上述各个领域中的应用研究，而如果不能对过程中的未知函数作出正确的估计就无法进一步利用过程进行应用研究，所以扩散型过程的统计推断问题是这类过程应用于实际的前提. 因此不论从理论研究还是从实际应用的观点来看，扩散型过程的统计推断都是非常重要的.

本书的主要目的是研究扩散型过程的非参数统计推断方法，扩散型过程研究的趋势是采用可获得的高频收益率数据，避免有严格限制的参数方法，使用灵活的、计算简单的非参数方法. 本书为金融经济、物理和工程领域的动态建模提供了理论与应用基础，同时也为想了解扩散型过程和非参数统计推断方法的读者提供了有价值的参考.

全书共包括六章：第一章是预备知识，主要介绍了由随机微分方程确定的扩散过程，二阶扩散过程和带跳扩散过程的发展历史和国内外研究现状. 第二章主要是在扩散过程的基础上对二阶扩散过程中的扩散系数进行统计推断，给出扩散系数的复加权估计量，这种新的估计量解决了边界偏差较大的问题而又与扩散系数本身的性质不相矛盾，进一步，本章得到了复加权估计量的相合性和渐近正态性，并通过蒙特卡洛模拟证明了复加权估计量同时吸收了 Nadaraya-Watson 估计量和局部线性估计量的优点，具有

相对较好的表现．第三章主要是在扩散过程的基础上对二阶扩散过程中的漂移系数和扩散系数进行统计推断，给出漂移系数和扩散系数的经验似然估计量，并研究这些估计量的相合性和渐近正态性，进一步在经验似然方法的基础上给出漂移系数和扩散系数的非对称的置信区间，并将此与在正态逼近基础上得到的对称的置信区间相比较，从而得到两种不同基础上的置信区间的差别和优劣．第四章在经验似然方法的基础上对二阶扩散过程进行了拟合优度检验．本章利用经验似然技术来构造二阶扩散过程的拟合优度检验的检验统计量，并讨论了检验统计量的渐近分布．进一步，通过随机模拟将提出的检验程序应用到具体的模型中去．第五章在离散观察值的基础上，研究了扩散过程的漂移系数和扩散系数的局部线性变带宽极大似然型估计量，新的估计量不仅保留了局部线性估计量的优点，而且克服了最小二乘估计量不稳健的缺点，是局部线性技术和稳健技术的完美结合，进一步，本章在相对温和的条件下，得到了局部线性变带宽极大似然型估计量的相合性和渐近正态性，最后，通过模拟说明了新的估计量在稳健性方面的优异表现．第六章结合线性平滑技术和稳健技术得到了带跳扩散过程的无穷小条件矩的局部线性极大似然型估计量，并证明了该估计量的相合性和渐近正态性．最后，通过模拟说明了新的估计量在稳健性方面的优异表现．

本书所涉及内容的研究得到了国家自然科学基金（11401267、11461032）、江西省自然科学基金（20161BAB211014、20171BAB201008）的大力支持，同时本书的出版也得到了江西理工大学清江青年英才支持计划的资助，作者谨在此一并表示感谢．

由于作者水平有限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正．

作　者

2018年5月

符　号　表

EX	随机变量 X 的数学期望
$\mathrm{Var}X$	随机变量 X 的方差
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	随机变量 X 与 Y 的协方差
$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$	随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 X
$X_n \xrightarrow{\mathrm{D}} X$	随机变量序列 $\{X_n\}$ 依分布收敛于随机变量 X
$\mathbf{R}^k$	k 维欧式空间
$a_n = O(b_n)$	$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$
$a_n = o(b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$
$a_n = O_p(b_n)$	a_n/b_n 依概率有界
$a_n = o_p(b_n)$	a_n/b_n 依概率趋于 0
$a_n \sim b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$
$\sigma(X_s, s \leqslant t)$	由随机变量 X_s，$s \leqslant t$ 生成的 σ 域
$I(A)$	集 A 的示性函数

目　录

1 绪　论

在现实生活中，我们所面临的许多问题都具有不确定性，而要处理这种带有不确定性的问题，从而做出正确的判断和决策，往往需要统计推断. 统计推断是利用样本的数据，对总体的数量特征做出具有一定可靠程度的估计和判断. 统计推断的基本内容有估计和检验两方面. 概括地来讲，估计是指研究一个随机变量，推断它的数量特征和变动模式. 而假设检验是检验随机变量的数量特征和变动模式是否符合我们事先所作的假设. 估计和假设检验的共同特点是它们对总体都不很了解，都是利用部分样本所提供的信息对总体的数量特征做出估计或判断. 所以，统计推断的过程必定伴有某种程度的不确定性，需要用概率来表示其可靠程度，这是统计推断的一个重要特点.

众所周知，在数理金融中随机微分方程对模型的描述起着重要的作用，尤其是 Cox，Ingersoll 和 Ross（1985）所建立的利率模型以及 Black 和 Scholes（1973）所建立的期权定价模型更加体现了这一点. 本书主要对由随机微分方程确定的连续时间随机过程进行统计推断. 下面先来介绍一下由随机微分方程确定的三类扩散型过程.

1.1　扩散过程

扩散过程（diffusion process）在物理、化学、生物、工程、经济等领域中有着广泛的应用，例如，在分子运动、带噪声的通信系统、有干扰的神经生理活动、生物膜中的渗透过程、进化过程中的基因更替、期货与期权定价等一系列研究中，扩散过程都是一个很好的近似模型. 此外，扩散过程理论也与微分方程的研究有着密切的关系. 许多扩散过程的泛函，例如击中分布、平均吸收时间、占位时间分布、不变测度等都是一些微分方程的边值或初值问题的解.

考虑时齐的由以下随机微分方程确定的一维扩散过程

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t$$

其中，$\{B_t, t \geqslant 0\}$ 是标准的布朗运动，$\mu(\cdot)$ 是漂移系数（drift coefficient），即无穷小均值函数，$\sigma(\cdot)$ 是扩散系数（diffusion coefficient），即无穷小方差函数.

在现代金融领域里，扩散过程起着核心的作用. Bachelier（1900）首先使用布朗运动来描述标的资产价格的分布，并给出了一些实际的应用. Merton（1969，1973a），Black 和 Scholes（1973）等人也在使用连续时间的随机过程来描述标的资产价格中作出了巨大贡献，Black 和 Scholes（1973）的“期权定价和公司债券”和 Merton（1973b）的“理性的期权定价原理”使得期权定价理论得到了突破性的进展. 从而在随后的三四十年里，连续的随机过程模型，特别是扩散过程模型在资产定价、衍生物定价、利率期限结构理论和投资组合的选取等领域都得到了广泛的应用.

正是由于其在金融经济领域的这种广泛应用，扩散过程受到经济学家和统计学家的青睐. 而扩散过程可以通过漂移系数和扩散系数来完全刻画，因此关于扩散过程的统计推断问题实质上就是对漂移系数和扩散系数的估计、检验和识别. 近二十年来，关于扩散过程的统计推断的研究已经有了较大发展，其研究方法分为参数、半参数和非参数三大类. 参数方法适合于模型的具体形式完全已知，仅含有未知参数的情形；而当对研究总体缺少有把握的具体模型假定，只有一些定性的描述时，要对总体的一些未知特征进行推断，基于数据来选择模型的非参数方法往往会更加灵活；半参数方法是介于参数和非参数方法之间的一种方法，这意味着漂移系数和扩散系数中有一个完全由未知参数来确定. 一般常用的参数方法有极大似然估计方法、最小二乘估计方法、极大似然型估计方法（M-估计方法）、鞅估计函数方法等函数估计方法和广义矩估计方法、Bayes 估计方法等. Florens-Zmirou（1989），Bibby 和 Sørensen（1995），Aït-Sahalia（2002），Bibby 等人（2002），Tang 和 Chen 等人（2009）对扩散过程的参数统计做出了很大贡献. 随着半参数估计理论的日渐成熟，半参数估计方法在扩散过程的统计推断中也发挥着越来越大的作用. 其中，Kristensen（2004），Shoji（2008），Nishiyama（2009），Kristensen 等人（2010）对扩散过程的半参数估计做出了深入的研究和探索. 至于扩散过程的非参数估计，自 Nadaraya 和 Watson 于 1964 年开创性地提出了漂移系数和扩散系数的 Nadaraya-Watson 估计量后，Stanton（1997），Bandi 和 Phillips（2003），Fan 和 Zhang（2003），Comte 等人（2007），Xu 等人（2010）通过不同方法给出了漂移系数和扩散系数的不同形式的非参数估计量.

在扩散模型的检验和识别方面，也得到了很大的发展. Aït-Sahalia（1996）考虑了两种参数检验方法，一个是建立在核平稳密度估计量和参数平稳密度的距离基础上的检验，另一个是建立在由 Kolmogorov 向前和向后方程得到的转移概率分布的差异性测度上的. 为了克服 Aït-Sahalia（1996）中所提出的检验方法的局限性，Chen 等人（2008）在检验中引入了经验似然方法. Gao 和 Casas（2008）提出了半参数检验方法，并且证明了检验统计量的相合性. Negri 和 Nishiyama（2009，2010）提出了遍历扩散过程的非参数检验方法.

但是，在扩散过程的漂移系数和扩散系数的稳健估计方面的研究相对较少，目前只有 Yoshida（1990）给出的针对多维参数扩散模型的最大化一个正的随机过程的极大似然型估计，Bishwal（2009）得到的关于漂移系数的参数极大似然型估计. 对于非参数情形下漂移系数和扩散系数的稳健估计问题，目前尚缺少相关研究，而基于数据来选择模型的非参数方法往往比参数方法要灵活得多，因此，如能得到漂移系数和扩散系数的非参数稳健估计量，将能极大地推动扩散过程在金融经济、物理和工程上的应用.

1.2 二阶扩散过程

二阶扩散过程（second-order diffusion process），又被称为和分扩散过程（integrated diffusion process），是由如下二阶随机微分方程确定的随机过程

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = X_t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t \end{cases}$$

其中，$\{B_t,\ t\geqslant 0\}$ 是标准的布朗运动，$\mu(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 分别是漂移系数（drift coefficient）和扩散系数（diffusion coefficient）. 在这个模型中，Y 是一个可微过程，它表示如下积分过程

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t X_u \mathrm{d}u$$

由于由布朗运动驱动的扩散过程具有无界变差并且是处处不可导的，这类扩散过程有一个很大的缺点，即不能建模分析可微的随机过程. 而二阶扩散过程克服了布朗运动的不可微性，它可以建模可微的过程，并且二阶扩散模型通过差分将非平稳的随机过程转换成平稳过程，这在一般的扩散过程中是不能实

现的（由于其所有的样本轨道是几乎处处不可导的），因此这类过程在经济分析中起到了很重要的作用，从而引起了许多研究者的兴趣，Gloter（2000）利用 Euler 展开得到了二阶扩散过程中扩散系数的一个参数估计量，并证明了其渐近混合正态性，Gloter（2001）得到了可积 Ornstein-Uhlenbeck 过程的参数估计量，Ditlevsen 和 Sørensen（2004）建立了预报基础上的估计函数并得到了其相合估计量，Gloter（2006）给出了二阶扩散过程的漂移系数和扩散系数的最小偏差估计量，Gloter 和 Gobet（2008）证明了二阶扩散过程的局部渐近混合正态性质.

但是，对于二阶扩散过程的非参数估计研究相对比较少，目前只有 Nicolau（2007）给出的二阶扩散过程的建立在新的观察值基础上的 Nadaraya-Watson 估计量，Wang 和 Lin（2010）给出的局部线性估计量，Comte 等人（2009）建立的基于惩罚最小二乘方法基础上的非参数适应估计量. 然而 Nadaraya-Watson 估计量得到的估计结果边界偏差比较大，局部线性估计量虽然边界偏差得到了很好的控制，但是扩散系数的估计会有负数出现，这和扩散系数始终非负的性质是矛盾的. 其次，目前所建立的二阶扩散过程的漂移系数和扩散系数的置信区间都是建立在正态逼近基础上的对称的区间. 但是由于对称的区间事先对区间的形式进行了限制，并且需要构造枢轴量，因此这与众多文献中提及的经验似然基础上的非对称置信区间相比有着很多的缺点. 最后，对于二阶扩散过程的模型识别和检验问题至今未见有文献发表. 因此，结合国内外同行的研究报道与我们的研究基础，不难推断，如能给出同时解决边界偏差较大的问题而又与扩散系数本身的性质不相矛盾的估计量，得到漂移系数和扩散系数的经验似然基础上的非对称的置信区间，给出二阶扩散模型中各项系数的检验方法将能极大地推动二阶扩散过程在经济、物理和工程上的应用，而这种提出新的估计量，得到非对称的置信区间以及进行模型识别的方法也能给其他统计推断工作以提示，这在理论和实践上都有着重要的意义.

1.3 跳扩散过程

经典的金融理论仅仅考虑了连续市场的情况，也就是说随机微分方程对应的解是连续扩散过程，然而目前很多实证研究已经表明，金融市场是重尾的. 事实上，例如新发明、战争、经济政策或其他新闻等重大事件的发生都会导致股票价格发生跳跃. 因此，带跳的随机微分方程被引入来描述这些市场行为.

称随机过程 X_t 为时齐跳扩散过程（jump-diffusion process），如果它满足如下

的随机微分方程

$$dX_t = \mu(X_{t-})\,dt + \sigma(X_{t-})\,dB_t + dJ_t$$

其中，$\{B_t,\ t \geqslant 0\}$ 是标准的布朗运动，$\{J_t,\ t \geqslant 0\}$ 是与 $\{B_t,\ t \geqslant 0\}$ 独立的纯跳过程. $\mu(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 分别是漂移系数（drift coefficient）和扩散系数（diffusion coefficient）. 如果一个跳过程在每一个有限时间区间内都仅发生有限次跳，则称该跳过程具有有限跳（finite activity，FA），否则就称为具有无限跳（infinite activity，IA）. 一般地，一个跳过程都包含有限跳和无限跳.

跳扩散过程是扩散过程的自然推广，在许多领域都有广泛的应用. 例如，酸雨模型、水文学、人口模型，特别是应用于间断、突变的经济环境和金融市场. 许多学者从股价回报的实际数据研究发现股价呈尖峰宽尾特征. 1976 年，Merton 首先提出并研究股价具有不连续回报时的期权定价，开创性地提出了用跳扩散模型来解决 Black 和 Scholes（1973）中的方法不能很好的反映资产价格和股票价格的动态性的问题. 后来，人们着手从理论和实际应用两方面寻找更接近现实股价的动态方程，来克服连续扩散模型的不足，消除期权隐含波动率“微笑”现象，使之能更好地适应市场突变性对资产价格的影响. 越来越多的证据表明跳风险因素在资产定价中不容忽视，而且可能蕴涵了重要的经济意义. 近年来，研究不连续市场模型的金融数学问题已越来越受人们喜爱和关注. 例如，读者可参考 Andersen 等人（2002），Bakshi 等人（1997），Duffie 等人（2000）关于股票市场的讨论，或者 Das（2002），Johannes（2004），Piazzesi（2000）对固定收入市场中跳扩散行为的描述.

在数理金融学领域，跳扩散过程常被用于刻画资产或期权的价格，其中“跳”在刻画利率动态模型中起着举足轻重的作用，因此，对跳扩散模型中的各项系数进行统计推断引起了许多统计学家的兴趣. 在全部的样本轨道可被观察的条件下，Sørensen（1989，1991）给出了跳扩散过程的极大似然估计. 但事实上，在给定的时间区间里，观察全部的样本轨道是不可能的，Shimizu 和 Yoshida（2006），Shimizu（2006）提出了一种近似对数似然方法的估计方法，这种方法解决了只能观察到离散样本的推断问题，但是这种方法仍旧有它的局限性，其中涉及门限的选取问题，但是这两篇论文中并没有给出选取门限的方法，而在实际应用中，门限的选取是至关重要的. Shimizu（2008）解决了上述问题，给出了选取门限的方法. 正是由于实际中完全样本轨道的不可观察性，关于跳扩散过程的基于离散样本的统计推断近年来得到了很大的发展，例如，Bandi 和 Nguyen

(2003) 给出了跳扩散模型的无穷小矩的非参数估计；Mancini (2004) 给出了一般 Poisson 扩散过程中跳的特性的估计；Mancini 和 Renò (2011) 分别在有限跳和无限跳的情形下给出了漂移系数和扩散系数的非参数门限估计量；Shimizu (2009) 得到了一种跳扩散过程的模型选择方法.

但是和一般扩散过程一样，目前在漂移系数和扩散系数以及跳强度的稳健估计方面的研究上比较欠缺. 因此，如能得到它们的非参数稳健估计量，将能极大地推动跳扩散过程在酸雨模型、水文学、人口模型以及金融经济市场上的应用，这对于了解掌握间断、突变的经济环境和金融市场有重要的意义.

1.4 随机变量序列的两种收敛性

本书主要讨论扩散型过程的非参数估计和假设检验问题，而非参数估计量好坏的评价标准离不开估计量的大样本性质，即在样本量无限增加时，所得到的非参数估计量的极限性质. 因此，本节将不加证明地介绍一些极限理论方面的定理和结论，这些定理和结论可以在诸如 Billingsley (1999) 和林正炎等人 (2015) 专门的概率论的著作中找到.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，$\{X_n\}$ 为定义在其上的一随机变量序列，X 为定义在其上的另一随机变量，$F_n(x)$ 和 $F(x)$ 分别为它们的分布函数.

定义 1.1 如果对 $\forall \varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0$$

则称随机变量序列 X_n 依概率收敛于 X，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

注 1.1 依概率收敛表示随机变量序列 $\{X_n\}$ 和随机变量 X 相差不小于任一给定量的可能性将随着 n 的增大而越来越小，直至趋于零. 大数定律中的收敛性就是随机变量 X 为常数时的依概率收敛. 在非参数估计中，如果非参数估计量 $\{X_n\}$ 依概率收敛于待估函数 X，则表示当样本容量 n 无限增加时，估计的精度可以在一定条件下任意地改善，非参数估计量的这种大样本性质称为相合性. 一般而言，对应着依概率收敛性的统计大样本性质称为是弱相合性，此时也称非参数估计量 $\{X_n\}$ 是待估函数 X 的弱相合估计量，简称相合估计量.

定义 1.2 如果对 $F(x)$ 的任一连续点 x，有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称随机变量序列 X_n 依分布收敛于 X，记作 $X_n \xrightarrow{D} X$. 此时也称分布函数序列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$，记作 $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$.

注 1.2 依分布收敛是用分布函数序列的收敛性来定义相应的随机变量序列的收敛性，但是可以忽略函数 $F(x)$ 的不连续点. 中心极限定理的收敛性就是依分布收敛. 在非参数估计中，如果存在 $a_n>0$，使得 $a_n(X_n - X) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$，则称非参数估计量 $\{X_n\}$ 是待估函数 X 的渐近正态估计，此时也称非参数估计量 $\{X_n\}$ 具有渐近正态性.

注 1.3 依分布收敛性和依概率收敛性相比是一种较弱的收敛性，即上述两种收敛性的关系如下：$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$. 一般情况下，其逆不真，但在 X 为常数 C 时，两种收敛性就等价了，即 $X_n \xrightarrow{P} C \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{D} C$.

下面给出关于这两种收敛性的一些主要结果，这些结果可以用来寻求一些估计量的渐近分布.

定理 1.1（Slutsky 定理） 设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 为两个随机变量序列，C 为一常数，如果

$$X_n \xrightarrow{D} X,\ Y_n \xrightarrow{P} C$$

则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + C$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} CX$$

$$X_n / Y_n \xrightarrow{D} X/C,\ C \neq 0$$

定理 1.2 设 $\{X_n\}$ 为一随机变量序列，C 为一常数，且 $X_n \xrightarrow{D} C$，又函数 $g(\cdot)$ 在点 C 处连续，则

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(C)$$

定理 1.3 设 $\{a_n\}$ 为一趋于∞的序列，b 为一常数，并且对随机变量序列 $\{X_n\}$，有

$$a_n(X_n - b) \xrightarrow{D} X$$

又设 $g(\cdot)$ 为可微函数，且 $g'(\cdot)$ 在点 b 处连续，则有

$$a_n[g(X_n)-g(b)]\xrightarrow{\mathrm{D}}g'(b)X$$

注 1.4　设 $\{X_n\}$ 为定义在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的随机变量序列，关于 $X_n\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ 成立的条件，使用最广泛且最方便的是对某个 $r>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}E\mid X_n\mid^r=0$$

2 二阶扩散过程的复加权估计

2.1 二阶扩散模型和背景

众所周知，连续的随机过程模型，特别是扩散过程模型在资产定价、衍生物定价、利率期限结构理论和投资组合的选取等领域都得到了广泛的应用. 由如下随机微分方程定义的伊藤扩散

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t \tag{2-1-1}$$

常常被用来建模分析股票价格、利息率和汇率. 其中，$\{B_t, t \geqslant 0\}$ 是布朗运动，μ 是局部有界可料漂移函数，即无穷小均值函数，σ 是右连左极（cadlag）波动函数，即无穷小方差函数. 对于 $\mu(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 的统计推断研究是现代经济计量学的一个很重要的研究内容，例如，在连续采样基础上的统计推断研究，读者可参考 Dalalyan（2005）和 Spokoiny（2000）以及这些论文中的参考文献. 而在离散采样下的相关研究，还取决于是低频采样还是高频采样. 低频采样是指样本在等间隔的离散时间点上取得，观测时间间隔固定，这时得到的数据被称为低频数据. 基于低频采样方法的研究有很多，在参数估计方面读者可参考 Bibby 和 Sørensen（1995），Bibby 等人（2002），在非参数估计方面可参考 Gobet（2004）等. 高频采样是指当样本数趋向于无穷大时，采样的最大时间间隔趋向于零，这时得到的数据被称为高频数据，相关的统计推断研究有 Bandi 和 Phillips（2003），Comte 等人（2007），Fan 和 Zhang（2003）等.

然而，正如 Nicolau（2007）所指出的那样，由式（2-1-1）确定的由布朗运动驱动的扩散过程的样本轨道具有无界变差并且是处处不可导的，因此这类模型不能用于建模可微的随机过程. 但是，可微的随机过程是一类重要的连续过程，且在金融领域被广泛使用，所以许多研究者不直接观察由式（2-1-1）定义的过程 X_t 的离散样本，而是观察积分过程 $Y_t = Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}s$ 的离散样本. 即考虑由如下二阶随机微分方程定义的二阶扩散过程