朱怀念 —— 著

时滞随机系统的微分博弈理论及应用

DIFFERENTIAL GAME THEORY
OF STOCHASTIC TIME-DELAY SYSTEMS
WITH ITS APPLICATION

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

朱怀念 ——— 著

时滞随机系统的微分博弈理论及应用

DIFFERENTIAL GAME THEORY
OF STOCHASTIC TIME-DELAY SYSTEMS
WITH ITS APPLICATION

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

图书在版编目(CIP)数据

时滞随机系统的微分博弈理论及应用 / 朱怀念著
. --北京：社会科学文献出版社，2019.1
ISBN 978-7-5201-4078-2

Ⅰ.①时… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①时滞系统-博弈论-研究 Ⅳ.①O172.1②O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 293073 号

时滞随机系统的微分博弈理论及应用

著　　者 / 朱怀念

出 版 人 / 谢寿光
项目统筹 / 任文武
责任编辑 / 周雪林

出　　版 / 社会科学文献出版社·区域发展出版中心（010）59367143
地址：北京市北三环中路甲 29 号院华龙大厦　邮编：100029
网址：www.ssap.com.cn
发　　行 / 市场营销中心（010）59367081　59367083
印　　装 / 三河市龙林印务有限公司

规　　格 / 开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：10.5　字　数：159 千字
版　　次 / 2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-5201-4078-2
定　　价 / 69.00 元

前　言

自 1965 年 Rufus Isaacs 出版了第一部微分博弈专著 *Differential Games* 以来，无论其理论还是应用研究都得到了很大的发展。今天，微分博弈已经广泛应用于生物学、经济学、国际关系、计算机科学和军事战略等诸多领域，成为科学有效的决策工具。本书以工程和经济金融领域中广泛使用的时滞随机系统为研究对象，在已有时滞系统最优控制理论和微分博弈理论的基础上，利用动态优化理论中的最大值原理、配方法等，系统研究时滞随机系统的微分博弈问题，并给出其在随机 H_2/H_∞ 控制和数理金融中的应用分析。

全书共分 9 章。

第 1 章是绪论。主要介绍了本选题的研究背景和意义，回顾了国内外学者在时滞随机系统微分博弈理论及应用研究方面的相关成果。

第 2 章研究了扩散项中包含状态和控制的时滞线性随机系统的 Nash 微分博弈问题。首先，回顾了时滞线性随机系统二次控制问题的相关结论，然后在此基础上，建立了时滞线性随机系统的两人 Nash 微分博弈模型。借助随机最大值原理给出了均衡策略的存在条件，得到了均衡策略的显式表达，拓展了已有的 Nash 随机微分博弈的研究成果。

第 3 章研究了时滞线性随机系统的 Stackelberg 博弈问题。首先，针对系统中不存在时滞的情形，借助随机最大值原理研究了无时滞动态系统的 Stackelberg 博弈问题。然后在此基础上，采用类似的方法研究了时滞线性随机系统的 Stackelberg 博弈问题，得到了均衡策略的存在条件，给出了均衡策略的显式表达，拓展了已有关于 Stackelberg 随机微分博弈的研究成果。

第 4 章考虑了时滞线性随机系统微分博弈的 Pareto 策略问题。首先，针对无时滞博弈的 Pareto 策略问题，借助配方法，得到了连续时间系统和离散时间系统 Pareto 策略存在的条件和显式表达。然后，利用此方法研究带时滞博弈的 Pareto 策略问题，推导证明了 Pareto 策略存在的条件等价于矩阵不等式存在解，同时得到了 Pareto 策略的显式解和最优值函数的一个上界。

第 5 章基于 Nash 博弈方法研究了时滞线性随机系统的 H_2/H_∞ 混合鲁棒控制问题。借助于时滞线性随机系统 Nash 博弈的结果，将控制策略设计者视为博弈的一方记为博弈人 P_1，将随机性干扰视为博弈的另一方记为“自然博弈人”P_2，从而将鲁棒控制问题转化为两人博弈问题，即博弈人 P_1 如何在预期到“自然人”P_2 的各种干扰策略情况下设计自己的策略，既实现与“自然人”的均衡又使自己的目标最优。解决了噪声同时依赖于状态、控制和干扰的时滞线性随机系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题，证明了控制器的存在性，并借助正倒向随机微分方程给出了反馈控制策略的解析表达。

第 6 章研究了广义时滞线性随机系统的多人 Nash 微分博弈问题。首先，针对无时滞情形下的广义线性随机系统，讨论了其在有限时间和无限时间域内的 N 人 Nash 微分博弈问题，借助一组推广的耦合 Riccati 方程得到了 Nash 均衡策略存在的充分条件，即耦合 Riccati 方程如果存在解，Nash 均衡策略就存在，同时给出了 Nash 均衡策略的显式表达。然后，将相关结果拓展至广义时滞线性随机系统的多人 Nash 微分博弈问题中，得到了 Nash 均衡策略的存在条件等价于一组矩阵不等式存在解。最后，将所得到的广义时滞线性随机系统的多人 Nash 微分博弈结果应用于随机 H_2/H_∞ 控制中，得到了随机 H_2/H_∞ 控制的存在条件和显式表示。

第 7 章考虑了时滞非线性随机系统的 Nash 微分博弈问题。针对一类噪声依赖于状态和控制的时滞非线性随机系统，研究了无限时间域内的两人 Nash 微分博弈问题，借助四个耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组（HJEs）得到了 Nash 均衡策略存在的充分条件，即耦合 HJEs 如果存在解，Nash 均衡策略就存在，同时给出了 Nash 均衡策略的显式表达。最后，通过一个数值算例验证了所得结论的有效性。

第 8 章在第 7 章的基础上研究了一类噪声依赖于状态、控制和干扰的无限时间域内的时滞非线性随机系统混合 H_2/H_∞ 控制问题。首先，借助于四个耦合的 Hamilton-Jacobi 方程组得到了带时滞的非线性随机系统 H_2/H_∞ 控制存在的充分性条件。然后，基于 T－S 模糊模型给出了噪声依赖状态和控制的时滞非线性随机系统 H_2/H_∞ 控制器的设计方案。控制器的设计可通过求解一组线性矩阵不等式获得，从而避开了求解耦合 HJEs 的困难。最后，数值仿真算例验证了结论的有效性。

第 9 章基于博弈分析的方法研究了数理金融中的投资组合选择问题及生产和消费选择问题。针对投资组合选择问题，将自然看成博弈的“虚拟”对手，在投资者与自然之间构建了一个两人零和随机微分博弈模型，投资者选择一个投资策略最大化其终止时刻财富期望效用，而市场选择一个概率测度代表的投资环境最小化投资者的最大化终止时刻期望财富效用。利用最大值原理得到了投资者的最优投资策略的显式解。针对生产和消费选择问题，构建了雇主和雇员之间的一个两人非零和微分博弈模型，消费策略 $c(\cdot)$ 和努力水平 $v(\cdot)$ 分别是两个博弈参与人的控制策略，两个博弈参与人分别选择 $c(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 最大化效用函数 $J_1[c(\cdot), v(\cdot)]$ 和 $J_2[c(\cdot), v(\cdot)]$，利用随机最大值原理获得了两个博弈参与人的最优策略。

最后是结论与展望，对本书的主要结论进行了总结，并提出了未来研究方向。

本书是作者对时滞随机系统微分博弈理论及应用问题研究的初步尝试和探索，由于作者的知识水平和研究能力的限制，书中一定存在不少疏忽及不妥之处，敬请读者批评指正。

符号说明

本书中用到的缩写和记号如下所述。

$\mathbf{R}^n$：n-维欧式空间，其上的范数记为 $\|\cdot\|$；

$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$\mathbf{R}^n$ 中元素的内积；

$\mathbf{R}^{n\times m}$：$n\times m$ 阶矩阵的全体；

$\mathbf{R}^+$：所有非负实数的全体；

$M>0$：M 是一个正定对称矩阵；

M^{T}：矩阵或向量 M 的转置；

rank (M)：矩阵 M 的秩；

det (M)：矩阵 M 的行列式；

deg (f)：多项式 f 的次；

S^n：$n\times n$ 阶对称矩阵的全体；

S^n_+：$n\times n$ 阶非负定对称矩阵的全体；

$\dot{S}^n_+$：$n\times n$ 阶正定对称矩阵的全体；

$\mathbf{E}$：数学期望；

$L^2_F(0,T;\mathbf{R}^n):=\{\phi\,|\,\phi(\cdot)$：$F_t$-适应的$\mathbf{R}^n$-值可测过程，使得 $\mathbf{E}[\int_0^T\|\phi(t)\|^2\mathrm{d}t]<\infty\}$；

$S^2(0,T;\mathbf{R}^n):=\{\phi\,|\,\phi(\cdot):\Omega\times[0,T]\to\mathbf{R}^n$ 是一个满足 $\mathbf{E}[\sup\limits_{-\tau\leq t\leq 0}\|\phi(t)\|^2]<\infty$ 的 F_t-适应过程$\}$；

$S^2_F(0,T;\mathbf{R}^n):=\{\phi\,|\,\phi(\cdot):\Omega\times[0,T]\to\mathbf{R}^n$ 为一个满足

$\mathbf{E}\left[\sup_{s\leqslant t\leqslant r}\|\phi(t)\|^2\right]<+\infty$的 $L_F^2(s, r; \mathbf{R}^n)$ 中的适应过程};

$M^2(0, T; \mathbf{R}^n):=\{\phi \mid \phi(\cdot): \Omega\times[0, T]\to\mathbf{R}^n$ 是一个满足 $\mathbf{E}\int_0^T\|\psi(t)\|^2\mathrm{d}t<\infty$的 F_t－适应过程};

$C(0, T; \mathbf{R}^n)$：定义于 $[0, T]$ 取值于$\mathbf{R}^n$ 的连续函数空间；

$C^{2,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$：所有定义于$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+$的函数 $V(x, t)$，其中 $V(x, t)$ 关于 $x\in\mathbf{R}^n$ 二阶连续可微，关于 $t\in\mathbf{R}^+$一阶连续可微；

$C_{F_0}^b([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$：所有 F_0－可测取值于 $C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 的有界随机变量 $\xi=\{\xi(\theta), -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$ 构成的空间。

目　　录

第1章 绪论

1.1 研究背景与意义

从系统理论的观点看，任何实际系统的过去状态不可避免地要对当前的状态产生影响，即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态，也依赖于过去某一时刻或若干时刻的状态，这类系统称为时滞系统，有时也称为泛函微分系统，英文文献中多称为Time-Delay Systems或Systems with Aftereffect。21世纪以来，许多学科中提出了大量的时滞系统问题，如电路信号系统、核物理学、生态系统、遗传问题、化工循环系统、流行病学、动物与植物的循环系统。社会科学方面主要是各种经济时滞现象的描述，如产品营销问题、国民财富分配理论、资本主义周期性经济危机、物流调度、工业管理等等。因此研究时滞系统，或者说是泛函微分系统就有了其深刻的理论和实际意义。

作者在完成国家自然科学基金和广东省自然科学基金的过程中，获得了确定性动态系统和随机系统微分博弈理论的部分结果，同时在研究线性Markov切换系统动态经济模型结构特征与控制时，发现像期权定价、多部门动态投入产出模型这样的实际经济系统模型，借助时滞随机系统模型来描述更能准确反映经济系统的动态特性。同时，鉴于微分博弈理论具有广阔的应用前景，特提出本书的研究内容，希望借此完成如下科学问题的研究。

科学问题：

正常随机线性系统的微分博弈理论⇒时滞随机系统的微分博弈理论。

亦即本书研究的科学问题是：式（1.1）描述的状态和控制均存在时滞的随机系统的微分博弈理论。

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t,X_{t-\tau},u_t^1,u_{t-\tau}^1,u_t^2,u_{t-\tau}^2)dt + \sigma(t,X_t,X_{t-\tau},u_t^1,u_{t-\tau}^1,u_t^2,u_{t-\tau}^2)dw_t, t \in [0,T], \\ X_t = \varphi_t, u_t = \xi_t, v_t = \eta_t, \quad t \in [-\tau,0], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 w_t 是定义在完备概率空间（Ω，F，$\{F_t\}_{0\leqslant t\in T}$，$P$）上的 d－维标准布朗运动，b：$[0,\ T]\ \times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_2}\times\mathbf{R}^{m_2}\to\mathbf{R}^n$，$\sigma$：$[0,\ T]\ \times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_2}\times\mathbf{R}^{m_2}\to\mathbf{R}^{n\times d}$ 为给定函数；u^i（·）是取值于 U_i 的 F_t－可测的控制变量，表示博弈人 i 的决策控制变量，$U_i\subset\mathbf{R}^{m_i}$ 为非空凸集，$i=1$，2；$\tau>0$ 为给定的有限的时间延迟，φ_t、ξ_t 和 η_t 为确定性函数，满足 $\int_{-\tau}^{0}\|\alpha^2(s)\|ds<+\infty$，$\alpha=\varphi$，$\xi$，$\eta$。

以 J_i［u^1（·），u^2（·）］表示博弈人 $i\in\{1,\ 2\}$ 的性能指标泛函：

$$J_i[u^1(\cdot),u^2(\cdot)] = \mathbf{E}\left[\int_0^T L_i(t,X_t,X_{t-h},u_t^1,u_{t-h}^1,u_t^2,u_{t-h}^2)dt + \Phi_i(x_T)\right],$$

其中 L_i：$[0,\ T]\ \times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_1}\times\mathbf{R}^{m_2}\times\mathbf{R}^{m_2}\to\mathbf{R}$，$\Phi_i$：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$i=1$，2 为给定的函数。

所谓的微分博弈问题是：博弈人 $i\in\{1,\ 2\}$ 如何在满足状态方程（1.1）的约束条件下选择自己的决策控制变量 u^i（·），使各自的性能指标函数 J_i［u^1（·），u^2（·）］达到最优[1]。

显然，如果只有一个博弈人（即单人博弈），则博弈问题退化为时滞随机系统的最优控制问题，即在如下状态方程

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t,X_{t-\tau},u_t^1,u_{t-h}^1)dt + \sigma(t,X_t,X_{t-\tau},u_t^1,u_{t-h}^1)dw_t, \quad t \in [0,T], \\ X_t = \varphi_t, u_t = \xi_t, \quad t \in [-\tau,0] \end{cases} \tag{1.2}$$

的约束下，寻找最优控制策略 u^{1*}（·），使性能指标泛函 J［u^1（·）］达到最

优。因此，时滞随机系统的最优控制理论是时滞随机系统微分博弈理论的特例。

而当 $\tau=0$，即系统中的状态变量和控制变量不存在时滞时，式（1.1）退化为一般意义下的 Itô 随机系统，即

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t,u_t^1,u_t^2)dt + \sigma(t,X_t,u_t^1,u_t^2)dw_t, & t\in[0,T], \\ X_0 = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

因此，从这个意义来说，Itô 随机系统的微分博弈理论是时滞随机系统微分博弈理论的特例，时滞随机系统是 Itô 随机系统的自然推广。

而当 σ（·，·，·，·，·，·）$=0$ 时，式（1.1）变为下述确定性（deterministic）时滞系统

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t,X_{t-\tau},u_t^1,u_{t-\tau}^1,u_t^2,u_{t-\tau}^2)dt, & t\in[0,T], \\ X_t = \varphi_t, u_t^1 = \xi_t, u_t^2 = \eta_t, & t\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{1.4}$$

显然，时滞随机系统（1.1）可以看作是 deterministic 时滞系统（1.4）的推广，相当于在系统（1.4）中加了随机扰动项 σ（·，·，·，·，·，·）dw_t。因此，deterministic 时滞系统微分博弈理论是时滞随机系统微分博弈理论的特例。

因此，本书的研究既有继承又有创新发展，是有理论意义的。

同时，时滞随机系统微分博弈理论还有重要的实际应用价值，下面从本书拟研究问题的科学需求、社会经济需求两个方面进一步分析本选题的依据和意义。社会经济需求是指对该学科有所依赖的社会经济问题的需求；科学需求是指学科自身知识体系完善的内在需求[2]（如图 1.1 所示）。

1. 社会经济需求分析

（1）所依赖的社会经济问题之一：多部门动态投入产出分析模型。1965 年，Leontief 提出了离散的动态投入产出模型[3]：

$$X(k) = AX(k) + B[X(k+1) - X(k)] + y(k), \tag{1.5}$$

其中 $X(k) = [x_1(k), x_2(k), \cdots x_n(k)]^{\mathrm{T}}$，而 $x_i(k)$ 是第 i 部门第 k 年总产出量；$y(k)$ 是第 k 年最终消费量（不包括投资）向量；A 是生产

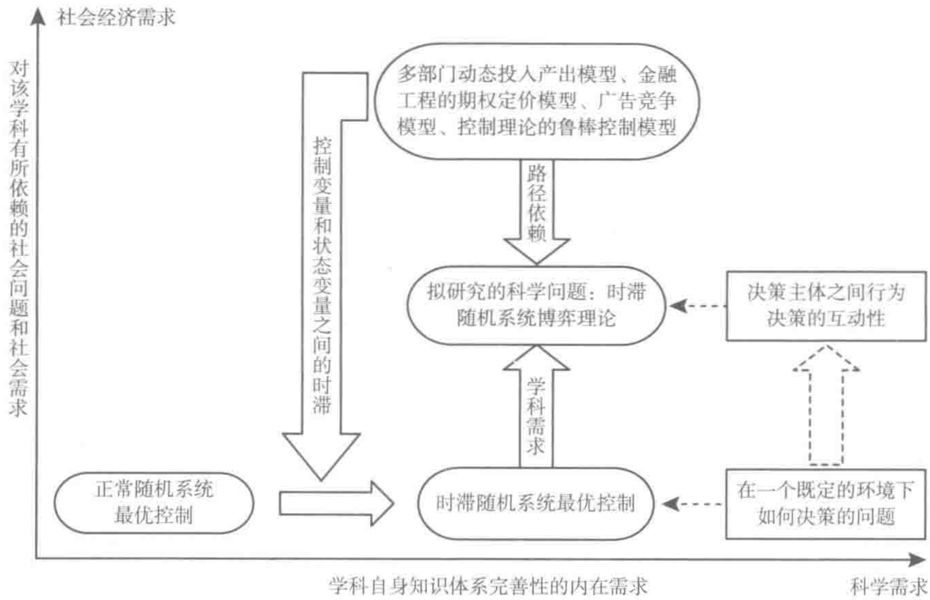

图 1.1　研究问题的科学发展需求分析两维体系

系数矩阵；B 是投资系数矩阵。模型（1.5）的提出依赖于两个假设：①各部门从投资开始到投产没有时间上的延迟，二者同时开始；②投资是一次性的，即所有投资产品，包括建筑工程、机器设备、流动资金等在工程开始时同时投入，没有时间上的先后之分。这与实际经济活动显然是不相符的。为此，必须研究考虑时滞效应下的投入产出模型，何堃研究了规划期为 m 年，具有多年时滞因素的投入产出模型[4]：

$$X(k) - A(k)X(k) - \sum_{l=1}^{z} B(k+l,l)[X(k+l) - X(k+l-1)] + y(k), \quad (1.6)$$

其中 z 表示所有投资产品中最大的时滞数；$B(k+l,\ l)$ 为第 k 年，时滞为 l 年（$l \leqslant z$）的投资产品的 n 阶投资系数矩阵。模型（1.6）即为含时滞的动态投入产出模型，它能较准确地刻画国家（或地区、部门）经济的生产、积累和消耗之间的关系，因而可以更好地进行经济预测和制定中长期规划。

此外，付雪和陈锡康综合考虑了人力资本和物资资本具有多年时滞的特点，建立了多年时滞教育经济投入占用产出模型和人力资本投入产出模型[5,6]。

因此，通过本书的研究可以分析当投资品投入与产出具有时滞时，各部门的最优投资均衡策略（鞍点均衡、Nash 均衡等），为动态投入产出分析提供新理论和新方法。

（2）所依赖的社会经济问题之二：金融工程的期权定价问题、资本投资和保险定价等问题[7-14]。20 世纪 70 年代早期，Black 和 Scholes 利用几何布朗运动 $w(t)$ 模拟期权标的风险资产在 t 时刻的价格 $S(t)$，即

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dw(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.7}$$

其中 μ 和 σ 为给定常数，分别表示风险资产的预期收益率和波动率，$w(t)$ 为一维标准布朗运动，反映金融市场的变化。尽管 Black 和 Scholes 利用式（1.7）给出了几乎完美的期权定价公式，但大量实践表明使用 Black-Scholes 公式并不能精确预测期权价格，这也促使许多学者对该模型进行改进，其中一种改进就是建立动态模型来考虑过去的事件对现在和将来的影响，即假设期权的价格不仅仅与当前的信息有关，过去的信息也应当会影响到期权的价格。于是，期权标的风险资产的价格 $S(t)$ 可以用一个时滞随机微分方程（Stochastic Delay Differential Equation）来描述：

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t-a)\,dt + g[S(t-b)]S(t)\,dw(t), & t \in [0,T], \\ S(t) = \varphi(t), & t \in [-\delta,0], \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 μ，a，b 为正常数，$\delta = \max\{a, b\}$，g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个连续函数，$\varphi(t)$ 为确定性实值函数。目前已有部分学者利用随机分析的方法讨论模型（1.8），如 Anh 和 Inoue、Kazmerchuka 等考虑了股票价格在扩散项具有时滞的期权定价[10-12]，Arriojas 等、Chang 和 Youree 研究了股票价格在漂移项和扩散项都具有时滞情形下的期权定价[7,13]。但是，他们在分析处理该问题时都会遇到一个困难：要给出由模型（1.8）所衍生出的各种形式的定价偏微分方程的解，这无疑增加了分析问题的难度。

作者认为，为了避免求解时滞随机系统（1.8）所衍生出的各种偏微分方程的困难，应将期权定价过程视为一个博弈过程，博弈人 1 为定价者，其决策控制变量为其投资策略；博弈人 2 即拟人化的风险市场随机干扰“代

理人”，该“代理人”的决策控制变量为描述随机扰动的布朗运动过程 $w(\cdot)$。而时滞随机系统（1.8）所表示的正好是博弈双方的状态演化过程。这样就可以利用时滞随机系统的非合作微分博弈理论进行研究。比如：若在上述模型（1.8）中假设 $u(t)$ 和 $V(t)$ 分别表示在 t 时刻持有某标的资产的价值和投资者的财富，则期权套期保值问题就是：如何在博弈人 2（市场干扰“代理人”）的最大随机波动干扰下，寻找自融资证券组合套期保值策略 $u(\cdot)$，使终期证券组合的价值 $V(T)$ 尽可能接近期权的到期支付 $F[S(T)]$[7]。因此，它是一个典型的时滞随机系统的鞍点均衡策略问题。研究表明：投资消费和保险定价问题也可以在一定条件下转化为时滞随机系统鲁棒控制问题[8,9,14]。因此，社会经济的实际问题研究需要用时滞随机系统微分博弈理论。

（3）所依赖的社会经济问题之三：广告模型（Advertising models）。基于数学模型的最优广告投入的研究始于 1957 年 Vidale 和 Wolfe 提出的广告销售反应模型（VW 模型）[15]和 1962 年 Nerlove 和 Arrow 提出的广告的资本股模型（NA 模型）[16]，经过 50 多年的发展，这方面研究已取得了丰硕的成果，并且有些已成为企业确定最优广告投入的依据。但实证研究表明这些成果与经验数据项的符合程度不尽人意。为此部分学者考虑了广告支出与商誉资本增值之间存在时间滞后情形下的最优广告投入问题，典型的工作见 Gozzi 和 Marinelli 等[17,18]。他们的研究考虑了单个商品的广告模型，设 $y(s)$，$0\leqslant s\leqslant T$ 表示商誉水平，z 表示广告支出，则有

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(s)=\left[a_0y(s)+\int_{-\tau}^{0}a_1(\xi)y(s+\xi)\mathrm{d}\xi+b_0z(s)+\int_{-\tau}^{0}b_1(\xi)z(s+\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}s \\ \qquad +\sigma\mathrm{d}w(s),\quad 0\leqslant s\leqslant T \\ y(0)=\eta^0;y(\xi)=\eta(\xi),z(\xi)=\delta(\xi),\quad \forall\xi\in[-\tau,0], \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $w(\cdot)$ 是定义在完备概率空间上的布朗运动，$a_0\leqslant 0$ 是一个常数值的衰减系数，$b_0\geqslant 0$ 是一个常数值的广告效果因子，$a_1(\cdot)$ 表示遗忘时间的分布函数，$b_1(\cdot)$ 表示商誉水平 $y(\cdot)$ 和广告支出 $z(\cdot)$ 之间时间滞后的密度函数，η^0 表示广告开始时的商誉水平，$\eta(\cdot)$ 和 $\delta(\cdot)$ 分别表