高等院校“十三五”规划教材

高等数学

张建业 等 编著

南开大学出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

高等院校“十三五”规划教材

高等数学

主　编：张建业　王洪林

副主编：田　飞　肖金桐　顾晓青　张　敏

杜绍坤　孟　杰　王焕东　焦　艳

南開大學出版社

NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 张建业等编著. -- 天津：南开大学出版社，2017.5
ISBN 978-7-310-05382-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 120655 号

南开大学出版社出版发行
出版人:刘立松
地址:天津市南开区卫津路 94 号　　邮编编码:300071
营销部电话:(022)23508339　23500755
营销部传真:(022)23508542　　邮购部电话:(022)23502200

*

三河市海新印务有限公司印销
全国各地新华书店经销

*

2017 年 5 月第 1 版　　2017 年 5 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　16 开本　13 印张　291 千字
定价:34.80 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换。电话:(022)23507125

前　言

“高等数学”作为高等院校理工类和管理类专业一门重要的基础理论课，对提高学生的素质，优化知识结构，培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力，提高创新意识，开阔视野，为后续课程的学习打下坚实的数学基础起着重要的作用，在公共基础课中有着重要的地位.因此，我们组织了多年从事高校数学教学的一线教学骨干教师针对高等职业教育及部分应用型本科教育学生的特点，结合目前该课程教学的实际情况，根据我们的教学研究成果，在对比多种同类教材的基础上，编写了本书.本书有如下特色：

1.增加基础知识一章，使学生熟悉学习微积分所必须的代数、几何知识.

2.简化、重组了传统高等数学的教学内容，以一元函数微积分学为主，概念、定理的编写上注重直观引入、弱化理论证明，适当减少例题的类型和难度，将简化的数项级数放在数列极限部分、简化的幂级数放在高阶导数部分、简单的微分方程放在不定积分部分、简化的二元函数的微分学放在一元函数微分学后、简化的二元函数的积分学放在定积分后.

3.便于讲练结合的方式进行课堂教学，每个知识点后都有精选的例题和课堂练习题，学生如进一步学习，每节有习题、每章有复习题.

4.选取了和教学内容相关的数学文化知识，增加教学的思想性和趣味性，开阔学生的视野.

5.教材中安排了一些实际例子，使教学内容有一定的实用性.

6.介绍了符号运算软件 Microsoft Mathematics（微软数学软件），中文界面简单易用.

本书由张建业负责全书的内容设计及组织协调工作，参加编写工作的老师有：张建业、王洪林、田飞、肖金桐、顾晓青、张敏、杜绍坤、孟杰、王焕东、焦艳等.

由于作者水平有限，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善.

编者

2017 年 3 月

目录

CONTENTS

第一章 基础知识回顾

在本节主要回顾一下学习微积分理论所必备的一些基础知识，诸如数、数集的各种运算、初等代数、平面几何、立体几何、解析几何以及函数的概念等基础知识，其中还穿插介绍了一些相关的数学文化和二元函数的概念，并且介绍了一个简单易学的数学软件 Microsoft Mathematics（微软数学软件）．

§1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合的概念

集合是我们在数学学习中经常用到的概念，由于它是数学中的基本概念，故无法对集合给出一个确切的定义（就像在几何中无法定义点、直线一样），我们只能对它进行一些说明．

把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**．集合一般用大写拉丁字母 A、B 等表示，这个整体的每一个对象称为**集合的元素**，一般用小写拉丁字母 a、b 等表示．表示元素和集合之间的关系，有属于"$\in$"和不属于"$\notin$"两种情形，若 a 是集合 A 中的元素，记作 $a \in A$，若 b 不是集合 A 中的元素，记作 $b \notin A$．

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外，还可以是其他对象．其中，由有限个元素构成的集合叫做**有限集**；而由无限个元素构成的集合叫做**无限集**．

数学中常用的数集及其记法：全体非负整数组成的集合称为**非负整数集**（或**自然数集**），记作 $\mathbf{N}$；所有正整数组成的集合称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}_+$；全体整数组成的集合称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数组成的集合称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；全体实数组成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$；全体复数组成的集合称为**复数集**，记作 $\mathbf{C}$．

集合表示的三种方法，分别是**列举法**、**描述法**和**图示法**．一般地，表示有限集合常用列举法；表示无限集合常用描述法；描述抽象集合常用维恩图法．

把集合的元素一一列举出来，并用"{}"括起来表示集合的方法叫做列举法．例如：把"地球上的四大洋"组成的集合表示为{太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}，把"方程 $(x-1)(x+1)=0$ 的所有实数根"组成的集合表示为 $\{1,-1\}$．

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法．具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中所具有的共同特征．例如："方程 $(x-1)(x+1)=0$ 的所有实数根"组成的集合

也可表示为$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$或$\{x \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

在高等数学的学习中经常用到数集:区间和邻域.

满足不等式$a \leqslant x \leqslant b$的实数$x$的集合叫做**闭区间**,表示为$[a,b]$;

满足不等式$a < x < b$的实数x的集合叫做**开区间**,表示为(a,b);

满足不等式$a \leqslant x < b$或$a < x \leqslant b$的实数x的集合叫做**半开半闭区间**,分别表示为$[a,b)$或$(a,b]$;

a、b称为区间的端点,它们也可分别取$-\infty$、$+\infty$.

设x_0和δ是两个实数,且$\delta > 0$,数集$\{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$称为**点$x_0$的$\delta$邻域**,记为$N(x_0,\delta)$,它等价于开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;数集$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$称为**点$x_0$的去心$\delta$邻域**,记为$N(\hat{x}_0,\delta)$,它等价于$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为**维恩图**.

1.1.2 集合中元素的性质

集合中的元素具有**确定性**、**互异性**和**无序性**.

任何一个对象都能确定它是或不是某一集合的元素,而且必居其一,这是集合的最基本特征.在集合概念刚出现的时候,并没有对元素的确定性进行要求,但是,随着研究的深入,数学家认为元素的确定性对集合来说是必不可少的.英国数学家罗素提出的"理发师悖论"就是一个生动的例子.罗素悖论:一个小镇上有一个理发师,他说:"我不给自己刮胡子的人刮胡子",令$A = \{$理发师给刮胡子的人$\}$,$B = \{$理发师不给刮胡子的人$\}$,那么,A、B不能构成集合,因为理发师对集合A、B来说是不确定的元素.

集合中的任何两个元素都是不同的对象,即在同一集合里不能重复出现相同的元素.

在同一集合里,通常不考虑元素之间的顺序.但是对于数集来说,它的元素(数)之间有一个天然的大小顺序.

1.1.3 集合之间的关系和运算

1.包含关系

如果集合A中的任意一个元素都是集合B中的元素,那么集合A叫做集合B的**子集**或称为集合B**包含**集合A,记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$,显然$A \subseteq A$,且$A \supseteq A$.

2.相等关系

如果集合A中的每一个元素都是集合B中的元素,反之,集合B中的每一个元素也都是集合A中的元素,那么就说**集合A等于集合B**,记作$A = B$.

对于两个集合A与B,如果$B \supseteq A$,同时$A \supseteq B$,那么集合A与集合B相等.

3.真包含关系

如果集合A是集合B的子集,并且B中至少有一个元素不属于A,那么集合A叫做集合B的**真子集**或称为集合B**真包含**集合A,记作$A \subset B$或$B \supset A$.

4.空集

不含任何元素的集合叫做**空集**,记作$\varnothing$.空集是任何集合的子集,是任何一个非空集合的真子集.

5. 交集

由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

6. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$.

7. 补集

在研究某一集合问题的过程中，所有集合都是一个给定集合的子集，这个给定的集合就称为**全集**，记作 U. 设 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 相对于集合 U 的**补集**，记作 $\overline{A}$. U 和 $\varnothing$ 互为补集.

8. 集合运算中常用的算律

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 摩根律　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

课堂练习

1. 用维恩图表示集合之间的关系和运算.

2. 求：$[1,5]\cap[4,8]$，$(4,10]\cup[6,20)$，$\overline{(2,6)}$，$\overline{(3,7)\cup[4,9]}$.

3. 某班由 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组，每名同学至多参加两个小组，已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26、15、13，同时参加数学和物理小组的有 6 人，同时参加物理和化学小组的有 4 人，则同时参加数学和化学小组的有几人.

1.1.4　映射

设 A、B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**映射**.

在生活中，有很多映射的例子.

例 1.1.1　以下给出的对应是不是从集合 A 到 B 的映射？

(1) 集合 $A=\{x\mid x \text{ 是某场电影票上的号码}\}$，集合 $B=\{x\mid x \text{ 是某电影院的座位号}\}$，对应关系 f：电影票的号码对应于电影院的座位号；

(2) 集合 $A=\{x\mid x \text{ 是实验中学的班级}\}$，集合 $B=\{x\mid x \text{ 是实验中学的学生}\}$，对应关系 f：每一个班级都对应班里的学生；

(3) 集合 $A=\{x\mid x \text{ 是实验中学的学生}\}$，集合 $B=\{x\mid x \text{ 是实验中学的班级}\}$，对应关系 f：每一个学生都对应他所在的班级.

解　(1) 某场电影电影票上的号码对应电影院唯一的一个座位号，所以 $f:A\to B$ 是一个映射；反过来，电影院的一个座位号也对应某场电影电影票上唯一的号码.

形如这样，对于两个非空的集合 A、B，如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应；反过来，对于集合 B 中的任意一个元素 y，在集合 A 中都有唯一确定的元素 x 与之对应，那么就称对应 $f:A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个一一映射.

(2) 实验中学的每一个班级里的学生不止一个，即与一个班级对应的学生不止一个，所以 $f:A \to B$ 不是一个映射.

(3) 对于实验中学的每一个学生，都有唯一的一个班级与之对应，所以 $f:A \to B$ 是一个映射，但不是一一映射，因为有多个学生对应一个班级.

1.1.5 一一映射与集合的基数

集合中含有元素的个数有多有少，可能是有限个，也可能是无穷多个，集合中含有元素的个数(或集合的大小)称为集合的基数. 我们可以用一一映射来比较两个集合的大小.

如果集合 A 与 B 之间存在一个一一映射，则称 A 与 B 是**等势**的. 例如：对于三个集合 $A = \{1,2,3\}$、$B = \{a,b,c\}$、$C = \{甲,乙,丙,丁\}$，A 与 B 等势，A 与 C 不等势.

显然，对有限集而言，两个集合等势即表示两个集合有相同的元素个数.

对于无限集，我们看下面一个例子.

例 1.1.2 自然数集 $\mathbf{N}$ 与其真子集 $S = \{1,3,5,7,\cdots\}$ 均为无限集且 $\mathbf{N}$ 与 S 之间存在一个一一映射 $f:n \in \mathbf{N} \to s = 2n+1 \in S$，因此，$\mathbf{N}$ 与 S 等势.

从这个例中也可以看到无限集的一个特性：无限集可以与其一个真子集等势，这种性质在有限集中是不可能有的. 下面我们给出最常见的无限集 —— 可列集的定义.

凡与自然数集等势的集合称为**可列集**，就是说，能与自然数集建立一一映射关系的集合是可列集. 我们将有限集和可列集合称为**可数集**，故可列集也可称为可数无限集.

课堂练习

证明偶数集和整数集都是可列集.

1.1.6 一一映射与数

数的出现与数的学习都离不开一一映射. 很早以前，人们就注意到了集合间的一一对应关系，可以用一个简化的集合含有元素的个数来表示另一个集合含有元素的个数，逐渐地人们开始用符号表示数. 如我国的山顶洞人采取在骨管上打眼的方法来计数，一个圆点表示 1，两个圆点表示 2. 20 世纪 30 年代，美国一个考古队曾在伊拉克境内发现一个空心封口泥罐，泥罐的表面画着某种牲畜，里面放着 48 颗泥粒，经考古学家分析认为，这是一个记数凭据. 利用手指计数、数数也是根据集合间的一一对应关系，甚至表示数的符号还保留着这样的印迹，例如罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅴ、Ⅹ. 现在世界通用的所谓阿拉伯记数法用特定的符号记数，可以表示不同集合的共同的数量特征，使用、学习起来非常方便. 它的前身是印度计数法，13 世纪初，经阿拉伯人改进后传入欧洲，它不仅推动了数学的发展，还起到了普及数学知识的作用.

我们知道，实数集可以和数轴的点集之间建立一一对应的关系，即是说，每一个实数

都对应数轴上的一个点，数轴上的每一个点也对应一个实数. 数轴上的点是连在一起的，相应地，实数也是连在一起的，比如说，一个闭区间包含的所有的数对应到数轴上就是一条包含两个端点的线段（如图 1.1.1 所示），实数的这个性质称为实数的连续性. 后面所介绍的函数的连续性就是建立在实数的连续性基础之上的.

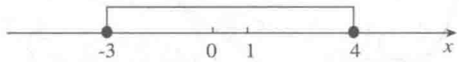

图 1.1.1

§1.2 初等代数

初等代数就是用字母代表数、用特殊的符号代表运算来研究数的运算性质和规律，它使很多问题的表述和推演变得简单，把算术研究的个别问题进化到代数研究的一类问题，例如：方程 $x^2-3x+2=0$ 和 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 就是个别和类的区别. 代数式的引入方便了人们研究两个数集之间的对应关系，变量随之出现，数学研究进入变量时代，函数成为数学研究的主要对象，它推动了科学技术的巨大进步.

1.2.1 数的运算及运算性质

在高等数学的学习中，我们主要用到的是实数及其运算. 若 x（或 y、a 等字母）是一个数，没有特别的说明，它就是一个实数，很少用到复数；实数的运算主要是四则运算、指数幂和对数运算.

实数的常用运算性质：

交换律： $a+b=b+a,\ ab=ba$；

结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$；

分配律： $a(b+c)=ab+ac$，$(ab)c=a(bc)$；

消去律： $ab=ac\Rightarrow b=c$，其中 $a\neq 0$.

指数幂的运算性质： $a^r a^s=a^{r+s}$，

$$(a^r)^s=a^{rs},$$

$$(ab)^r=a^r b^r,$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

其中 n、m 为正整数，a、b 的取值为使各式有意义的实数.

对数的运算性质： $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$，

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a M^n=n\log_a M\ (n\in\mathbf{R}),$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

$$a^{\log_a b}=b,$$

其中 a、b、c、M、N 的取值为使各式有意义的实数.

课堂练习

1. 填空题

(1) $\dfrac{3}{2+\dfrac{4}{5}}=(\quad)$; (2) $\dfrac{1}{2\times 3}=\dfrac{1}{(\quad)}-\dfrac{1}{(\quad)}$;

(3) $\dfrac{1}{5\times 7}=\dfrac{1}{(\quad)}-\dfrac{1}{(\quad)}$; (4) $\sqrt[3]{-8}=(\quad)$;

(5) $\sqrt{(-10)^2}=(\quad)$; (6) $\sqrt[3]{a^2}=a^{(\quad)}$;

(7) $\log_2 16=(\quad)$; (8) $\lg 53=\dfrac{\ln(\quad)}{\ln(\quad)}$;

(9) $2^4=(\quad)^{(\quad)\ln(\quad)}$.

2. 化简下列各式

(1) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{25}$; (2) $\dfrac{(a^2)^3\cdot a^5}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; (3) $\log_2(4^7\times\sqrt[3]{8})$.

3. 用 $\log_a x$、$\log_a y$、$\log_a z$ 表示 $\log_a\dfrac{x^2\cdot\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}$.

拓展阅读

几个特殊的数

在数学的学习过程中，会经常遇到数 0、1、π、e、i，到目前为止，它们可以说是数学上最常用、最重要的几个数.

我们通常把 1 称为单位，0 对应没有或空. 在乘法运算中任何数与 1 相乘还等于这个数，根据乘法和 1，我们定义了倒数，即如果 $ab=1$，则称 a、b 互为倒数. 在加法运算中数 0 有类似的性质，任何数与 0 相加还等于这个数，根据加法和 0，我们定义了相反数，即如果 $a+b=0$，则称 a、b 互为相反数，在这个意义下，可以说 0 是加法运算中的单位. 在数的运算中经常用到：$a^0=1\ (a\neq 0)$，$a^1=a$，$0^b=0(b>0)$，$\log_a 1=0$.

π 是圆的周长和它的直径的比值，同样也是一个圆的面积与其半径的平方的比值. 不同文明的远古智者们都注意到了这一现象，并试图求出该比值. 我国数学家刘徽在公元 263 年完成的《九章算术注》中就给出了 $\pi\approx 3.14$，祖冲之(429—500)得到了 $3.1415926<\pi<3.1415927$. 虽然关于 π 的近似值有很多结果，但是 π 到底是一个什么样的数一直困扰着人们. 直到 1767 年德国数学家兰伯特才证明了 π 是无理数，1882 年德国数学家林德曼给出了结论：π 不能满足任何代数方程；因此，它是一个超越数，用尺规作图来化圆为方是不可能的. 到此，对 π 的研究并未停止，因为对它的研究可以解决信息学、数值计算中遇到的超越数的逼近问题.

相对于 π，常数 e 出现的比较晚，大概在 16 世纪末或 17 世纪初人们才知道它. 数 e 的出现与复利的计算有关. 假设我们考虑一年定期存款，本金为 1，利率为 100%，一年结束后，本息和为 2；现在我们假设将利率降低到 50%，但是每半年单独结算一次，一年结束后，一年的本息和为 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=2.25$；以此类推，我们再缩短计息周期，一年结束后所得

本息和如下表：

计息周期	季度	月	周	天	小时	分	秒
本息和	2.44141	2.61304	2.69260	2.71457	2.71813	2.71828	2.71828

从表中我们可以观察到，随着计息周期的缩短，本息和越来越多，但不会无限增大，它越来越接近一个数，这个数就是 e，$e\approx 2.718281828459$. 以 e 为底的指数函数和对数函数在理论及应用中都有十分重要的意义，经济的增长、人口的增长、放射性的衰变及统计学中的正态分布等都要用以 e 为底的指数函数来描述. 大数学家欧拉在 1737 年证明了 e 是无理数，1840 年法国数学家刘维尔证明了 e 不是任何 2 次方程的解，1873 年法国数学家埃尔米特开创性地证明了 e 是超越的(不是任何代数方程的解)，9 年后，林德曼沿用埃尔米特的方法证明了 π 是超越的.

i 是虚数单位，$i^2=-1$ 或 $i=\sqrt{-1}$，设 x 和 y 是实数，则 $z=x+iy$ 称为复数，x 称为复数 z 的实部，y 称为复数 z 的虚部，若复数的虚部为 0，此复数就是实数，若复数的虚部不为 0，此复数称为虚数，实部为 0 的虚数，称为纯虚数. 大数学家欧拉在研究级数时发现了著名的欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

用 0、1、π、e、i 可以得到一个等式：$e^{i\pi}+1=0$. 数学家们公认这个公式是数学里最美妙的公式.

3n + 1 问题

对许多提法简单的数学问题的理解也必须有一定的数学基础知识，例如什么是素数. 但对于 $3n+1$ 问题，则几乎不需要什么基础知识.

$3n+1$ 问题：不管从什么正整数 n 出发，我们进行如下的一系列运算，最终在有限步内达到 1. 这里的运算很简单，你碰到的数无非是两类：奇数和偶数. 碰到 n 是奇数时，你就求 $3n+1$；而当 n 是偶数时，你就把它除以 2，当然得数仍是整数. 不管是奇数还是偶数，都照这个办法做下去，你最终总可以到达 1. 数学家用计算机算了几万亿以上个数，结果无一例外. 许多著名的数学家试图证明它，都以失败告终，原籍波兰的当代最伟大的数学家之一爱尔特希(Paul Erdss，1913—1996) 不无悲观地承认：“当代数学还没有发展到解决这个问题的水平.”尽管没人能攻克这个堡垒，但从它引出的各种问题对数学的发展很有用. 它与丢番图逼近、一致分布、遍历理论、可计算理论等密切相关.

负负得正

众所周知，两个负数相乘的结果是一个正数. 但是，我们学习“负负得正”这个运算规律的时候，一般情况下，老师既不证明，也不给解释，只是让我们记着这样用，但这给我们学习带来了困扰.

19 世纪法国著名作家司汤达(Stendhal，1783—1843) 小时候很喜爱数学，用他自己的话说，数学是他的“至爱”. 但当老师教到“负负得正”这个运算法则时，他一点都不理解. 他希望有人能对负负得正的缘由作出解释. 可是，他所请教的人都不能为他释此疑问，而且，司汤达发现，他们自己对此也不甚了了. 司汤达的数学补习老师夏贝尔(Chabert) 先生在司汤达的追问之下感到十分尴尬，不断重复课程内容，这动摇了司汤达学数学的信心. 美国著名数学史家和数学教育家 M·克莱因解决了曾经困扰司汤达的“两次负债相乘，结果

为收入"的问题：一人每天欠债5美元，给定日期(0美元)3天后欠债15美元. 如果将5美元的债记成-5，那么每天欠债5美元，欠债3天，可以用数学来表达：$3\times(-5)=-15$. 同样，一人每天欠债5美元，那么给定日期(0美元)3天前，他的财产比给定日期的财产多15美元. 如果我们用-3表示3天前，用-5表示每天欠债，那么3天前他的经济情况可表示为$(-3)\times(-5)=+15$.

前苏联著名数学家盖尔范德(I. Gelfand，1913—2009)则作了另一种解释：

$3\times 5=15$：得到5美元3次，即得到15美元；

$3\times(-5)=-15$：付5美元罚金3次，即付罚金15美元；

$(-3)\times 5=-15$：没有得到5美元3次，即没有得到15美元；

$(-3)\times(-5)=+15$：未付5美元罚金3次，即得到15元.

1.2.2 代数式的基本概念及运算

1. 代数式的基本概念

用运算符号把字母或数字连接而成的式子叫做**代数式**. 用数字代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫做**代数式的值**. 例如：$x^2y+2a-\ln a$就是一个代数式，当$x=2$，$y=3$，$a=1$时，此代数式的值为14.

只含有数字与字母乘积的代数式叫做**单项式**，单项式的数字因数叫做单项式的系数，单项式中所有的字母的指数和叫做这个**单项式的次数**. 例如：$3x^2yz^3$就是一个单项式，系数为3，次数为6.

几个单项式的和叫做**多项式**；特殊地，一个多项式可以仅含有一个单项式. 多项式中的每一个单项式叫做**多项式的项**，其中不含字母的项称为**常数项**. 多项式中次数最高项的次数叫做**多项式的次数**. 例如：$a^3+3ab-2$是一个3次多项式. 仅含有一个字母的一个多项式称为一元多项式，例如：$2x^3-4x^2+x-8$就是一个一元三次多项式.

所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做**同类项**. 把两个同类项的和写成一个单项式叫做**合并同类项**，合并同类项法则：把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变. 例如：$a^2b-2a^2b=a^2b+(-2)a^2b=-a^2b$.

2. 代数式的基本运算

(1) 代数式的四则运算

单项式乘以单项式：把它们的系数、相同的字母分别相乘，对于只在一个单项式中含有的字母，连同它的指数作为积的一个因式. 例如：$(2x^2y)\cdot(3xyz)=6x^3y^2z$.

多项式乘以多项式：把每个多项式中的单项式看做一个"数"，利用数的乘法对加法的分配律乘开，再利用单项式乘以单项式和合并同类项进行化简.

例 1.2.1 化简$(a+b)(a-b)+b(a+2b)-b^2$.

解 原式$=a(a-b)+b(a-b)+ba+b\cdot 2b-b^2$

$=a^2-ab+ba-b^2+ab+2b^2-b^2$

$=a^2+ab+b^2$

(2) 因式分解

把一个多项式在某个范围内(一般是在实数范围内)化为几个最简多项式的积的形

式，这种变形叫做**因式分解**，也叫做**分解因式**. 其中，最简多项式是指在给定范围内不能进行因式分解的多项式. 因式分解的常用方法：

提公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$；

公式法：平方差公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

立方和(差) 公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

十字相乘法：$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$

二项展开式：$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$，其中 $n\in \mathbf{N}_+$.

3. 分式

两个代数式 A、B 的商可以表示为 $\dfrac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有字母，那么称 $\dfrac{A}{B}$ 为**分式**. 如果 A、B 都是一元多项式，这样的分式称为**有理分式**；如果分子的次数大于或等于分母的次数，这样的有理分式称为**假分式**；反之，称为**真分式**. 例如：$\dfrac{x^2+2x-6}{x^3-6x}$ 就是一个有理分式，且为真分式. 一个假分式可以写成一个多项式与一个真分式之和. 例如：$\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}$.

课堂练习

1. 将下列多项式分解因式.

(1) $3a^2-27$； (2) $2x^3-4x^2+2x$； (3) x^3-1； (4) $8x^3+64$； (5) x^2-3x+2.

2. 化简下列各式.

(1) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$； (2) $\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)\div\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$； (3) $\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$； (4) $\dfrac{x^5+\sqrt{x}}{x^2}$.

3. 将下列分式写成两个分式的和.

(1) $\dfrac{1}{x^2-1}$； (2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

4. 将下列各式写成一个分式的形式.

(1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$； (2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$； (3) $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$.

5. 将下列分式分母有理化.

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$； (2) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{3+\sqrt{2x+1}}$.

1.2.3 一元 n 次方程

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的方程称为**一元 n 次方程**，其中 x 为未知数，a_i，$i=0,1,2,\cdots,n$ 为常数(一般为实数)，且 $a_n\neq 0$. 在代数学发展的初期，代数基本上就是关于解实系数或复系数多项式方程，因此，我们也把一元 n 次方程称为代数方程. 例如：