



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



iCourse · 教材

# 线性代数与 空间解析几何

(第五版)

黄廷祝 成孝予

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



iCourse·教材

# 线性代数与 空间解析几何

(第五版)

黄廷祝 成孝予



高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书主要内容包括矩阵及其初等变换、行列式、几何空间、 $n$  维向量空间、特征值与特征向量、二次型与二次曲面、线性空间与线性变换等。前六章内容自成体系,完全满足教育部大学数学课程教学指导委员会制订的工科类线性代数与空间解析几何课程教学要求;第七章线性空间与线性变换供教学要求较高的学校选用。

本书对线性代数与空间解析几何的传统内容进行了重新处理,特别是代数与几何的结合,将矩阵的初等变换作为贯穿全书的计算和重要的理论推导工具,注重不同知识点与重要理论的内在本质联系,将几何空间、 $n$  维向量空间到抽象线性空间概念的建立从特殊到一般进行铺垫,精选了大量的应用实例,注重将数学建模思想融入课程教学等。这些使得本书在理论体系的处理上更加科学简洁、深入浅出、可读性强、易教易学。

本次修订在于:补充完善数字资源,包括重点难点、重难点分析微视频、典型例题讲解微视频、知识点注释、自测题、应用案例、习题答案等,数字资源与纸质教材一体化设计,紧密配合,便于学生自主学习。

本书是普通高等教育“十二五”国家级规划教材,此前的版次分别入选“十一五”和“十五”国家级规划教材。

本书可作为工科和其他非数学类专业的教材或教学参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/黄廷祝,成孝予编著

. -- 5 版. -- 北京:高等教育出版社,2018.3

iCourse·教材

ISBN 978-7-04-049215-6

I. ①线… II. ①黄… ②成… III. ①线性代数-高等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材  
IV. ①O151.2 ②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 002595 号

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 兰莹莹 封面设计 赵阳 版式设计 马云  
责任校对 刘莉 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	保定市中国画美凯印刷有限公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	16.75	版 次	2000 年 8 月第 1 版
印 数	360 千		2018 年 3 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2018 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	36.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 49215-00

# 线性代数与空间解析几何 (第五版)

黄廷祝 成孝予

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/127197>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 [abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



扫描二维码  
下载 Abook 应用



重难点分析



典型例题讲解



应用案例


<http://abook.hep.com.cn/127197>



## 第五版前言

本书自高等教育出版社出版第一版(2000年)、第二版(普通高等教育“十五”国家级规划教材,2003年)、第三版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材,2008年)和第四版(“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材,2015年)以来,被全国高校较广泛地采用为教材。

随着信息技术在教学中的广泛应用,国际国内都在大力推动信息技术与教育教学的深度融合,更加重视教学方法改革,更加重视学生自主学习和终身学习能力的培养。随着国家精品资源共享课和在线开放课程的建设与推广,本次修订为适应学生学习方式改变的新趋势,以“纸质教材+数字课程”的方式对教材的内容和形式进行了整体设计。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计,以新颖的版式设计和内容编排,方便学生使用。数字课程对纸质内容起到巩固、补充和拓展的作用。

数字教学资源以知识点为基础,设置了重点难点、重难点分析微视频、典型题讲解微视频、知识点注释、自测题、习题答案、应用案例等。与正文相关知识点对应的数字教学资源用  标出。

数字教学资源建设或配备由黄廷祝、何军华、王转德、房秀芬、蒲和平、李厚彪、荆燕飞和于佳丽等老师完成。

向付出辛勤劳动的高等教育出版社数学分社的编辑老师表示衷心感谢。

另外,“爱课程”网有与本书完全配套和同名的中国大学MOOC课程和国家级精品资源共享课(扫描下方二维码可查看相关内容),还为学生配备了开拓视野的国家级精品视频公开课“线性代数与信息科技”,为师生的教与学带来方便,欢迎师生使用。

编者

2017年8月于成都





## 第四版前言

本书自高等教育出版社出版第一版(2000年)、第二版(普通高等教育“十五”国家级规划教材,2003年)和第三版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材,2008年)以来,被全国高校较广泛地选为教材。我们根据几年来的教学实践与体会和高等教育出版社的宝贵建议,本次修订除了对个别地方进行勘误外,主要进行了如下修订:

1. 对少量内容在处理上进行了优化和适度补充;
2. 把原写在第七章的关于 $\mathbf{R}^n$ 的基变换与坐标变换内容调至第四章的“ $\mathbf{R}^n$ 的基、维数与坐标”当中;
3. 对少量例题和习题进行了增删;
4. 增加了与本书配套的数字课程资源。

另外,在“爱课程”网(<http://www.icourses.cn>)有与本教材完全配套和同名的国家级精品资源共享课,欢迎师生使用。课程相关资源为师生的教与学带来了方便。

借本书再版的机会,向给予我们工作关心和支持的教育部大学数学课程教学指导委员会、高等教育出版社数学分社和全国高校的同行人致以诚挚谢意。

编者

2015年2月于成都



## 第三版前言

本书自高等教育出版社出版第一版(2000年)和第二版(普通高等教育“十五”国家级规划教材,2003年)以来,被全国多所高校采用为教材。经过几年来的教学实践并广泛征求同行们的宝贵建议,根据我们的教学体会和对教材的细致再研究,在保持原来的框架和风格的基础上,此次修订有如下几个方面:

1. 除了对个别地方进行了勘误外,对部分内容进行了增删、优化。

2. 较大幅度增加了习题、复习题和例题,其中不少为近些年来出现的新题型。

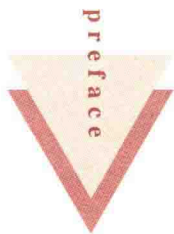
3. 在每章复习题后新增了进一步的“思考题”,有利于加深读者对重要概念的理解和数学思维的培养。

4. 对于第二版中作为最后一章的应用实例,现经修订,融入每章的正文中,更有利于将数学建模思想融入到课程教学与学习中。

借本书再版的机会,向对于我们工作给予关心、支持的教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会和高等教育出版社数学分社致以诚挚的谢意。

编者

2007年9月于成都



## 第二版前言

本书自 2000 年出版以来,我们采用它作为教材已经历了三年的教学实践。根据我们在教学过程中的体会和使用本教材的同行们所提出的宝贵意见,此次所做的调整和修改主要有以下几个方面:

一、考虑到国内部分高校已将“数学实验”列为一门单独的课程开设,故在此次修改时,原书中关于“数学实验”的内容没有再编入本书。

二、为便于教学实施和读者阅读,将原书中关于应用的内容集中在第八章,同时增加了一些应用实例,以便读者在学习本门课程之后,对本课程理论与方法的应用有初步的了解,并增强应用意识,提高应用能力。

三、对几何空间中“内积”的定义方式进行了调整,以使其与“外积”的定义方式协调一致。

四、在“线性空间与线性变换”一章中增加了“欧氏空间”一节,以期使读者对抽象的“空间”概念有更全面的了解。

此外,在例题和习题的选配上,也作了一些修改和调整。

借本书再版的机会,向对本书给予了大力支持和关心的清华大学谭泽光教授、北京理工大学史荣昌教授、电子科技大学李正良教授、谢云荪教授、钟守铭教授,成都信息工程学院张志让教授,以及对本书提出宝贵意见的同行们表示衷心的感谢,并对高等教育出版社理工分社对本书的关心和扶持致以诚挚谢意。

编者

2003 年 1 月





# 第一版前言

电子科技大学是国家工科数学课程教学基地建设单位,根据基地建设规划的要求,已出版了多部教材,《线性代数与空间解析几何》是其中的一本。本书是在该教材的基础上,根据 21 世纪科技人才素质的要求,吸取国内外改革教材的长处修改而成的,具有以下特点:

## 一、重视代数与几何的结合

本书将线性代数与空间解析几何的内容结合在一起,用代数方法解决几何问题,为代数理论提供几何背景。在讲几何空间向量的运算规则时,有意识地将它们按线性空间的八条公理形式表述,为线性空间的定义奠定几何基础。在介绍  $n$  维向量的线性相关性定义与性质时,特意介绍三维空间中的几何背景。在特征值与特征向量概念之后介绍相应的几何意义。用正交变换的方法处理二次曲面方程化简的问题。对线性空间的概念及基变换与坐标变换的问题都从几何意义上作出了相应的解释。对代数与几何的有机结合进行了大胆而有益的尝试。

## 二、将初等变换作为贯穿全书的计算工具

线性代数中解线性方程组、求矩阵的秩与逆、确定向量组的最大无关组与秩、矩阵的特征值与特征向量的计算、行列式的性质(保值初等变换)等,都与矩阵的初等变换有着密切关系,因此本书将初等变换作为贯穿全书的一个基本计算工具。在第一章就尽早引出矩阵的行初等变换,利用行初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵与行简化阶梯形矩阵,然后研究初等变换的有关性质,使学生在计算过程中尽可能地使用初等变换。使用同一种计算手段解决不同类型的问题,更有利于计算过程与计算格式的程序化。在理论推导中多次使用矩阵的初等变换使推导过程更容易理解,同时使理论推导与计算方法的介绍更加紧密且自然地结合在一起。

### 三、精选应用实例，安排数学实验

工科学生在学习数学课程之后应该了解数学的应用，学会用数学思维与方法分析和解决实际问题。本书对重要概念都尽可能地介绍应用背景，重要结果都尽可能地举出应用实例。应用范围涉及经济、社会、生物、医学等学科领域，许多典型应用与数学建模结合起来。在某些应用性较强的章节后除编写了应用实例外，还安排了数学实验，培养学生建立数学模型和利用数学软件解决实际问题的意识与能力。

### 四、内容结构合理，可读性强，便于教学

本书既考虑到教学改革的发展与需要，又充分考虑到教学的实际情况与可能，将传统与现代，理论与应用进行了较好的结合。

本书在克拉默法则、矩阵可逆的等价条件、矩阵乘积的行列式等的证明中，采用了简便的处理方法。注意强调重要理论的内在联系，多次使用一系列等价命题的方式给出重要定理。将线性空间作为代数系统 $(V, P, +, \cdot)$ 来定义。将几何空间、 $n$ 维向量空间到线性空间的概念从特殊到一般作了较好的铺垫。

本书的编者是：黄廷祝（第一、二、四、八章），成孝予（第三、五、六、七、八章）。谢云荪教授对全书的内容体系与章节结构提出了十分宝贵的意见，对本书进行了全面的修改，并提供了部分应用实例与数学实验题目。本书由李正良教授、张志让教授、钟守铭教授主审，他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见。谨向他们表示衷心的感谢。刘金水副教授仔细地校阅了全书，电子科技大学应用数学系的教师们也对本书提出了许多修改意见，在此一并致谢。

编写具有改革新意的线性代数与空间解析几何教材，缺乏经验，限于水平，疏漏之处，恳请同行专家及读者提出宝贵的意见。

编者

2000年1月



# 目 录

第一章 矩阵及其初等变换 .....	001
§ 1.1 矩阵及其运算 .....	001
一、矩阵的概念 .....	001
二、矩阵的线性运算 .....	003
三、矩阵的乘法 .....	006
四、矩阵的转置 .....	012
习题 1.1 .....	014
§ 1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换 .....	015
一、高斯消元法 .....	016
二、矩阵的初等变换 .....	018
三、初等矩阵 .....	023
习题 1.2 .....	026
§ 1.3 逆矩阵 .....	027
一、逆矩阵的概念与性质 .....	027
二、用行初等变换求逆矩阵 .....	031
习题 1.3 .....	035
§ 1.4 分块矩阵 .....	036
习题 1.4 .....	041
复习题一 .....	042
思考题一 .....	044
📖 知识点注释一 .....	044
📖 综合自测题一 .....	044
第二章 行列式 .....	045
§ 2.1 $n$ 阶行列式的定义 .....	045
习题 2.1 .....	049
§ 2.2 行列式的性质与计算 .....	050
一、行列式的性质 .....	050
二、行列式的计算 .....	054

三、方阵乘积的行列式 .....	059
习题 2.2 .....	061
§ 2.3 拉普拉斯展开定理 .....	062
习题 2.3 .....	065
§ 2.4 克拉默法则 .....	066
习题 2.4 .....	071
§ 2.5 矩阵的秩 .....	071
一、矩阵秩的概念 .....	071
二、矩阵秩的计算 .....	073
三、矩阵秩的性质 .....	075
习题 2.5 .....	078
复习题二 .....	079
思考题二 .....	080
 知识点注释二 .....	081
 综合自测题二 .....	081
第三章 几何空间 .....	082
§ 3.1 空间直角坐标系与向量 .....	082
一、空间直角坐标系 .....	082
二、向量及其线性运算 .....	083
习题 3.1 .....	089
§ 3.2 向量的乘法 .....	089
一、内积 .....	089
二、外积 .....	091
三、混合积 .....	093
习题 3.2 .....	094
§ 3.3 平面 .....	095
一、平面的方程 .....	095
二、平面与平面的位置关系 .....	097
习题 3.3 .....	099
§ 3.4 空间直线 .....	099
一、空间直线的方程 .....	099
二、直线与直线的位置关系 .....	101
三、直线与平面的位置关系 .....	103
习题 3.4 .....	107
复习题三 .....	108
思考题三 .....	108
 知识点注释三 .....	109





综合自测题三 .....	109
--------------	-----




第四章 $n$ 维向量空间 .....	110
---------------------	-----

§ 4.1 $n$ 维向量空间的概念 .....	110
一、 $n$ 维向量空间的概念 .....	110
二、 $\mathbf{R}^n$ 的子空间 .....	112
习题 4.1 .....	114
§ 4.2 向量组的线性相关性 .....	114
一、向量组的线性组合 .....	114
二、向量组的线性相关性 .....	117
习题 4.2 .....	123
§ 4.3 向量组的秩与极大无关组 .....	124
一、向量组的秩与极大无关组 .....	124
二、 $\mathbf{R}^n$ 的基、维数与坐标 .....	129
习题 4.3 .....	130
§ 4.4 线性方程组解的结构 .....	131
一、齐次线性方程组 .....	131
二、非齐次线性方程组 .....	137
习题 4.4 .....	146
复习题四 .....	147
思考题四 .....	150
综合自测题四 .....	150

第五章 特征值与特征向量 .....	151
--------------------	-----

§ 5.1 特征值与特征向量的概念与计算 .....	151
习题 5.1 .....	157
§ 5.2 矩阵的相似对角化 .....	158
一、相似矩阵的基本概念 .....	158
二、矩阵的相似对角化 .....	159
习题 5.2 .....	165
§ 5.3 $n$ 维向量空间的正交性 .....	166
一、内积 .....	166
二、 $n$ 维向量的正交性 .....	167
三、施密特正交化方法 .....	169
四、正交矩阵 .....	171
习题 5.3 .....	172

§ 5.4 实对称矩阵的相似对角化 .....	173
习题 5.4 .....	181
复习题五 .....	181
思考题五 .....	183
 知识点注释五 .....	183
 综合自测题五 .....	183
第六章 二次型与二次曲面 .....	184
§ 6.1 实二次型及其标准形 .....	184
一、二次型及其矩阵表示 .....	184
二、用配方法化二次型为标准形 .....	187
三、用正交变换化二次型为标准形 .....	189
习题 6.1 .....	191
§ 6.2 正定二次型 .....	192
习题 6.2 .....	196
§ 6.3 曲面与空间曲线 .....	196
一、曲面 .....	197
二、空间曲线 .....	200
习题 6.3 .....	203
§ 6.4 二次曲面 .....	203
一、椭球面 .....	204
二、抛物面 .....	205
三、双曲面 .....	206
习题 6.4 .....	213
复习题六 .....	214
思考题六 .....	215
 知识点注释六 .....	215
 综合自测题六 .....	215
* 第七章 线性空间与线性变换 .....	216
§ 7.1 线性空间的概念 .....	216
一、线性空间 .....	216
二、子空间 .....	219
习题 7.1 .....	221
§ 7.2 线性空间的基、维数与坐标 .....	222
一、基与维数 .....	222
二、坐标 .....	224

三、基变换与坐标变换 .....	226
习题 7.2 .....	231
§ 7.3 欧氏空间 .....	232
一、内积 .....	232
二、内积的性质 .....	233
三、标准正交基 .....	234
习题 7.3 .....	235
§ 7.4 线性变换 .....	235
一、线性变换的概念与性质 .....	235
二、线性变换的运算 .....	237
三、线性变换的矩阵 .....	238
习题 7.4 .....	241
复习题七 .....	242
思考题七 .....	243
 综合自测题七 .....	244
 应用案例 .....	245
 部分习题参考答案 .....	245

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关,并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究.甚至有些表面上完全没有联系的、性质完全不同的问题,归结成矩阵问题以后却是相同的.这就使矩阵成为数学中一个极其重要的、应用广泛的工具,因而也就成为代数、特别是线性代数的一个主要研究对象,尤其是随着计算机的广泛应用,矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础.

重点难点

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵.

## § 1.1 矩阵及其运算

### 一、矩阵的概念

在物资调运中,某类物资有 3 个产地、5 个销地,它的调运方案可在表 1.1 中反映.

表 1.1

单位:t

调运数		销地				
		I	II	III	IV	V
产地	I	0	3	4	7	5
	II	8	2	3	0	2
	III	5	4	0	6	6

如果我们用  $a_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3,4,5$ ) 表示从第  $i$  个产地运往第  $j$  个销地的运量(如  $a_{12}=3, a_{24}=0, a_{35}=6$ ), 这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$



用这种数表来表达某种状态或数量关系,在自然科学、技术科学以及实际生活中都是常见的.这种数表我们称为矩阵.

**定义 1** 由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个  $m$  行  $n$  列矩阵,简称为  $m \times n$  矩阵,其中  $a_{ij}$  表示第  $i$  行第  $j$  列处的元(或称元素), $i$  称为  $a_{ij}$  的行指标, $j$  称为  $a_{ij}$  的列指标.

元是实数的矩阵称为实矩阵,元是复数的矩阵称为复矩阵.本书中的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.

通常用大写黑体字母  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots$  或者  $(a_{ij}), (b_{ij}), \cdots$  表示矩阵.若需指明矩阵的行数和列数,常写为  $\mathbf{A}_{m \times n}$  或  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ .

例如,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  为一个  $2 \times 3$  矩阵.

$n$  元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数可以组成一个  $m$  行  $n$  列矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组的系数矩阵;而系数及常数项可以组成一个  $m$  行  $n+1$  列矩阵

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组的增广矩阵.我们将利用矩阵这一工具来研究线性方程组.

元全为零的矩阵称为零矩阵,记作  $\mathbf{O}_{m \times n}$  或  $\mathbf{O}$ .如

$$\mathbf{O}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



重难点分析  
矩阵的概念