高等学校教材

BIANFENFA JICHU J

变分法基础及其在固体力学中的应用

王光钦 王涛 编

BIANFENFA

GaoDeng XueXiao JiaoCai

BIANFENFA JICHU
JIQI ZAI GUTI
LIXUE ZHONG DE
YINGYONG

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

西南交通大学出版基金资助出版

高等学校教材

变分法基础及其在固体力学中的应用

王光钦　王　涛　编

中　国　铁　道　出　版　社

2007年·北京

内 容 简 介

本书共分八章，第一章作为全书的基础，介绍变分法的基本概念，并以最简泛函为主要对象讨论泛函的极(驻)值条件。第二章到第四章以弹性力学为依托，分别讨论弹性力学中的各类常见的变分原理以及运用最小势能原理、最小余能原理和广义变分原理的直接解法。第五章介绍变分问题的反问题，即如何写出与微分方程对应的泛函。第六章介绍变分法在薄板弯曲问题中的应用。第七章阐述塑性力学中的变分原理。第八章为变分法在最优控制中的应用。

本书可作为高等学校力学、土木、机械类相关专业研究生和力学类本科生教材，也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

变分法基础及其在固体力学中的应用/王光钦，王涛编.—北京：中国铁道出版社，2007.8

高等学校教材

ISBN 978-7-113-07823-2

Ⅰ.变… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.变分法—应用—固体力学—高等学校—教材 Ⅳ.0176 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 038784 号

书　　名：变分法基础及其在固体力学中的应用
作　　者：王光钦　王　涛　编
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：程东海　　　**编辑部电话**：(010)51873135
封面设计：陈东山
印　　刷：北京彩桥印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：16.75　字数：412 千
版　　本：2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～2 000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-07823-2/O・158
定　　价：38.00 元

前言 Preface

自然科学和工程科学中的问题在数学上常常归结为微分方程的边值问题和泛函的极值问题。微分方程方法在各类学科中又常常是一种主流方法。究其原因，是因为这种方法研究比较深入，相当一部分问题可以得到解析形式的解答，这当然是符合人们所希望的，这是其一。变分法始于17世纪末，几乎是在微分方程理论发展的同时就已经提出来了。变分法是求泛函的极值，它是物理或几何问题极大、极小、最优、最省的一种直观描述，分为间接解法和直接解法，前者在理论上又回归到微分方程方法上，这是其二。第三，在某些学科中，微分方程描述已经存在的条件下，变分描述常常是居于较次要的地位，不外乎是通过直接法用它来寻求问题的近似解。但是，从另一个层面来看，变分原理常常是以学科的基本原理提出来的，由它可以导出问题的控制方程，从而代表了它在学科中的重要地位。另外，由于自然和工程问题的复杂性，导致了微分方程及其定解条件往往具有比较复杂的形式，在现有的理论基础上很难得到它的严格解，因而人们就不得不转而去寻求它的近似解，微分方程的变分解法已经成为微分方程理论一个重要组成部分。自求解泛函极值问题的里兹法问世以来，用直接法求泛函近似解的方法已日趋完善，特别是在20世纪60年代发展起来的有限单元法已经成为科学和工程领域中的不可替代的强有力的数值计算方法，其数学基础就是变分法。目前，变分法已广泛地应用在科学和工程的各个领域，比如物理学、几何学、一般力学、固体力学、流体力学、信息论及现代控制理论等。

变分方法在各类学科的表述中，常常是局限在本学科的范围内，孤立地加以阐述的，很难联系到它作为一种数学工具在其他学科领域所具有的共性。由于它和专业的物理概念结合较紧，以致使人弄不清楚数学意义上变分的一般概念。本教材试图将变分学的概念和方法与固体力学的变分方法有机地结合在一起，将固体力学的变分方法视为变分法的一种应用。当读者涉及其他学科领域的变分问题时，不难结合该学科的专业知识加以适当延伸。作为一种尝试，教材中编入了最优控制一章，限于读者对象，其中的例题侧重于有关力学的控制问题。

本书共分八章，第一章作为全书的基础，介绍变分法的基本概念，并以最简泛函为主要对象讨论了泛函的极(驻)值条件。第二章到第四章以弹性力学为依托，分别讨论了弹性力学中的各类常见的变分原理以及运用最小势能原理、最小余能原理和广义变分原理的直接解法。第五章介绍了变分问题的反问题，即如何写出与微分方程对应的泛函。薄板是工程结构中的一种常见的结构件，第六章介绍变分法在薄板弯曲问题中的应用。第七章阐述了塑性力学中的变分原理，材料在进入塑性以后，由于应力—应变关系的非线性，自然在变分原理的描述上将会引进一些新的特点。第八章为变分法在最优控制中的应用。尽管有限单元法已形成了自己的独立理论体系，而且已有不少专著论述，鉴于有限单元法与变分法在理论上的依存关系，在第二章到第七章的相关部分，仍然用了一些篇幅来阐述如何对弹性和塑性力学问题、薄板问

题进行有限元列式。

本书是作者在多年变分法和能量原理教学基础上改编和扩充而成的，主要对象是力学、土木、机械类相关专业研究生和力学类本科生，也可供相关工程技术人员参考。

本书由西南交通大学应用力学与工程系王光钦和电气工程学院王涛共同编写。王涛负责第一章、第八章以及第五章部分，其余各章及附录由王光钦编写。

本书曾获西南交通大学研究生特色教材立项，并由西南交通大学出版基金资助出版，特此鸣谢。

由于作者水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

二〇〇七年七月

目录 Content

第一章　变分问题与泛函极值

变分法是 17 世纪末开始发展起来的一个数学分支，它研究泛函的极值问题。在微积分形成的初期，变分问题就已经提出来了。比如，牛顿曾提出，对运动于介质中的旋转物体，什么样的体形才能使其所受的阻力为最小？以及约翰·伯努利（Johan Bernoulli）的捷线问题等。随着科学技术的发展，变分法在力学、物理学、现代控制理论、信息论等学科领域都有越来越多的应用。这一章是后面各章的数学基础。

§1-1　变分问题与泛函的概念

为了引入泛函的概念，我们先来看几个变分问题。

1. 变分问题的提出

(1) 捷线问题（又称最速降线问题） Tmin

捷线问题的数学提法是：初速度为零的质点，在重力作用下，沿光滑而固定的曲线由定点 A 滑行到定点 B（A、B 不在同一铅垂线上）。问沿什么样的路径（曲线）滑行时间为最短？

取 A 点为坐标原点，向下为 y 轴的正方向，坐标系如图 1-1 所示。设曲线段 AB 的方程为 $y=y(x)$，两定点 A、B 的坐标分别为 $(0,0)$ 和 (x_1,y_1)。由机械能守恒定律，初速度为零，质量为 m 的质点在重力作用下从点 A 滑移到任一点 $P(x,y)$ 时，有如下关系：

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy\Rightarrow v=\sqrt{2gy}$$

式中，g 为重力加速度。于是滑行微弧段 $\mathrm{d}s$ 所需时间

$$\mathrm{d}T=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}$$

故总的滑行时间为
$$T=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{1-1}$$

显然，下滑时间 T 由所选路径 $y=y(x)$ 决定，即 T 是函数 $y(x)$ 的函数。这里的问题就是要选择过 A、B 两点的曲线 $y=y(x)$ 使 T 取极小值。

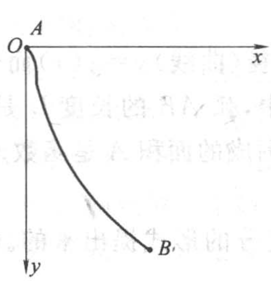

图　1-1

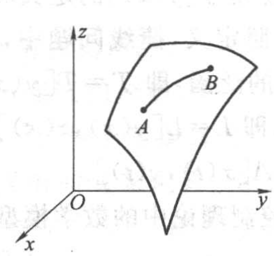

图　1-2

(2)短程线问题 min

它的数学提法是：在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上给定两点 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$，问：在曲面上所有连接 A、B 两点的曲线中哪一条曲线为最短(图 1-2)？

设 AB 弧的方程为 $$y=y(x),\quad z=z(x)$$

弧 AB 的长度 $$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1-2}$$

注意到，问题要求连接两定点的弧线须在给定的曲面上，因此，这里的问题就是在约束条件 $F(x,y(x),z(x))=0$ 下，选择过 A、B 的曲线使 L 为最小。

(3)等周问题

等周问题的数学提法是：在平面上一切有定长(l)的简单闭曲线中，确定一条围成最大面积的曲线。 S_{max}

设曲线的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[t_0,t_1]$$

闭曲线的长度等于定长的条件可表示为 $l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t$

而闭曲线所围成的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

所以，问题就是在约束条件 $l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t$ 下，选择闭曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$，使 A 为极大值。

如果我们在金属环 D 与细线 C 之间张一张肥皂膜，由于皂膜的收缩，细线 C 将在保持周长不变的情况下张成一个圆(图 1-3)，可以证明，其面积为最大。

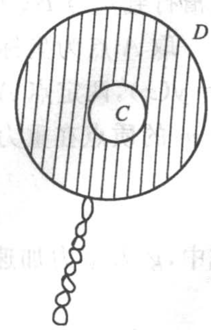

图 1-3

从以上问题，我们看到，积分 T、L 或 A 的值是由一个(捷线问题)或多个(短程线问题、等周问题)函数来确定的，函数的形态不同，其值也不相同。这类依赖于函数的函数在变分学中称为泛函；求泛函极值的问题称为变分问题。

泛函：
函数 → 数值

2. 泛函的定义

定义：设$\{y(x)\}$为已给定的函数集合，如果根据某种法则，对于集合中的每一个函数$y(x)$都有一个确定的数值 J 与之对应，则称因变数 J 为依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记为 $J=J[y(x)]$。泛函 $J[y(x)]$ 所依赖的函数 $y(x)$，叫做泛函 J 的宗标或自变函数，函数集合$\{y(x)\}$称为泛函 $J[y(x)]$的定义域。

显然，按照定义，捷线问题中，下滑时间 T 是随下滑路径(曲线)$y=y(x)$而变化的，故 T 是函数 $y(x)$的泛函，即 $T=T[y(x)]$。同理，短程线问题中，弧 AB 的长度 L 是函数 $y(x)$、$z(x)$的泛函，即 $L=L[y(x),z(x)]$；等周问题中，闭曲线所围成的面积 A 是函数 $x(t)$、$y(t)$的泛函，即 $A=A[x(t),y(t)]$。

力学和控制理论中的数学模型，在很大程度上都是以变分的形式提出来的。材料力学中，储蓄在弯曲梁中的应变能$U=\frac{1}{2}\int_0^l EJ(y''(x))^2\mathrm{d}x$是挠曲线$y(x)$的泛函；在分析力学中，哈密

顿(Hamilton)作用量 $I=\int_{t_0}^{t_1}L[q_v(t),\dot{q}_v(t),t]\mathrm{d}t$ 是广义位移 $q_v(t)$ 的泛函；在控制理论中，性能指标 $J=\theta[x(t)]_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_1}F[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t$ 是状态函数 $x(t)$ 和控制函数 $u(t)$ 的泛函等等，都是这样的例子。

依赖于单个一元函数的泛函，一般地可以写为

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x \tag{1-4}$$

将

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1-5}$$

称为最简泛函。

按照定义，泛函中的因变数 J 与宗标是根据某种法则联系的，故 $J[y(x)]=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}y(x)$ 也是一种泛函关系。但在古典变分的意义下，几乎毫无例外地采用定积分的形式，如前面所看到的各种例子。在这里，我们也不例外，并且主要是围绕最简泛函来讨论，其结论不难推广到其他形式的泛函中。

§1-2 泛函的极值

回顾数学分析中普通函数求极值的问题，首先要指定自变量 x 的取值范围，然后才能回答函数 $y(x)$ 有无极值；其次，为了确定函数在某点 x_0 处是否有极值，需要对其邻域内的函数值进行比较。与此类似，为了定义泛函的极值，在变分学中首先要引入可取函数类及函数邻域的概念。

1. 可取函数(容许函数)类

在变分学中，通常用下列记号来表示具有不同光滑度的函数类：

C^0——连续的函数类；

C^1——具有一阶连续导数的函数类；

C^2——具有二阶连续导数的函数类；

…

C^n——具有 n 阶连续导数的函数类。

2. 容许函数的定义

泛函 J 是随着函数 $y(x)$ 的变化而变化的，而函数 $y(x)$ 是不可以任意选择的。显然，它应该满足两个基本条件：

(1)具有足够的光滑度

①要使积分可积。一般地，应避免积分中任何项出现无穷大的情况。

下面，我们先来考察一个函数类连续，但其一阶导数不连续的函数，即 C^0 类函数，见图 1-4(a)。在点 $\bar{x}$ 处斜率不连续，但其一阶导数可积[图 1-4(b)]。为了考察其二阶导数在点 $\bar{x}$ 处的性态，我们在 $\bar{x}$ 点附近取一个微小区间 Δ，在该区间内用光滑曲线来代替[图 1-4(a)中的虚线]，则一阶导数变成了一条连续光滑曲线[图 1-4(b)中的虚线]。其二阶导数如图 1-4(c)所示。当 $\Delta\to 0$ 时，图 1-4(b)中的曲线 $\overset{\frown}{ab}\to$ 铅垂线 $a'b'$。注意到，一阶导数在 $\bar{x}$ 点处为负，即表明当 $\Delta\to 0$ 时，在图 1-4(c)的二阶导函数曲线在点 $\bar{x}$ 处趋于负无穷。

以上分析表明,如果函数为 C^0 类函数,其一阶导数可积,二阶导数可能趋于负无穷而不可积。导数也是函数,因此可以类推,即如果函数是 C^{r-1} 类函数,则其 r 阶导数可积,而 $r+1$ 阶导数可能不可积。反过来,要求 r 阶导数可积,则要求函数为 C^{r-1} 类函数即可。因此,对于最简泛函(1-5),要求 $y(x)$ 为 C^0 类函数就可以了。对于式(1-4)所示泛函,则要求 $y(x)$ 为 C^{n-1} 类函数。在有限单元法的相容性要求中正是依据这个道理规定的。

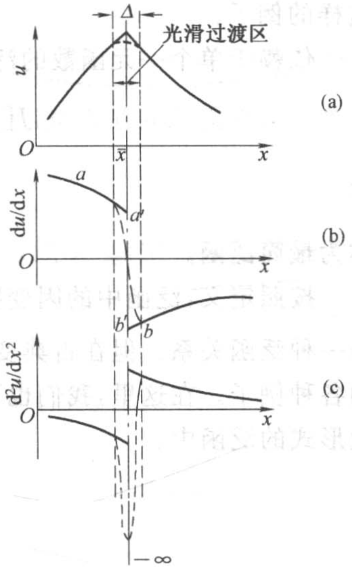

图 1-4

②满足微分方程对导数连续性的要求。

后面我们将会看到,求泛函式(1-5)的极值等价于求解微分方程:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{1}$$

而与泛函(1-4)等价的微分方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0 \tag{2}$$

从求解微分方程的角度来看,方程(1)和(2)分别要求自变函数 $y(x)$ 为 C^2 和 C^{2n} 函数类中的函数。

③对函数 $y(x)$ 光滑性的要求与邻域的大小有关。

因为邻域的大小是用函数 $y(x)$ 及其导数来定义的,故函数 $y(x)$ 的光滑性就由导数的最高阶数来确定。比如,零级邻域内的函数,只要求 $y(x)$ 为 C^0 类函数即可,而一级邻域内的函数,则要求 $y(x)$ 为 C^1 类函数,余可类推。

从以上的讨论可以看出,对函数 $y(x)$ 光滑性的要求与分析问题的性质有关。如果仅仅是要求积分可积,对光滑性的要求相对地要低一些。今后,我们假定函数 $y(x)$ 具有足够的光滑性。

(2)满足具体问题的附加条件

比如,在捷线问题中,要求满足两个端点的边界条件:

$$y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1$$

在短程线问题中,要满足两端的边界条件和约束条件:

$$y(x_0)=y_0, \quad z(x_0)=z_0; \quad y(x_1)=y_1, \quad z(x_1)=z_1$$

$$F(x, y(x), z(x))=0$$

容许函数的定义:使泛函有定义,而且满足某些规定条件的函数 $y(x)$,称为容许函数或容许曲线。容许函数的全体,则称为容许函数类。这一定义可以推广到多元函数的情况。

3. 函数(曲线)间的距离与函数的邻域

在微分学中,极值具有局部性质。类似地,给出函数的邻域,就可以定义泛函的极值。为此,先引入函数距离的概念。

零级距离:在区域 (a,b) 内,函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 之差模的上确界

$$\sup_{x\in(a,b)} \left| y(x) - y_1(x) \right| \tag{3}$$

叫做函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 的零级距离。

一级距离:设函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 在 (a,b) 内可导,上确界:

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|y(x)-y_1(x)\right|,\quad \sup_{x\in(a,b)}\left|y'(x)-y'_1(x)\right| \tag{4}$$

中最大的一个数叫做函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 的一级距离。

式(4)的第 2 式是关于两个导函数的差，而式(4)的第 1 式是关于两个函数的差。显然，两个函数相差不大时，其斜率可能相差很大，即零级距离比较小的两条曲线，其一级距离可能相差很大[图 1-5(a)]；反过来，一级距离比较小的两条曲线，其零级距离一定比较小[图 1-5(b)]。

m 级距离：设函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 在 (a,b) 内具有直到 m 阶的导数，上确界：

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|y(x)-y_1(x)\right|,\sup_{x\in(a,b)}\left|y'(x)-y'_1(x)\right|,\cdots,\sup_{x\in(a,b)}\left|y^{(m)}(x)-y_1^{(m)}(x)\right| \tag{5}$$

中最大的一个数叫做函数 $y(x)$ 与函数 $y_1(x)$ 的 m 级距离。

有了距离的概念以后就可以来定义函数的邻域了。

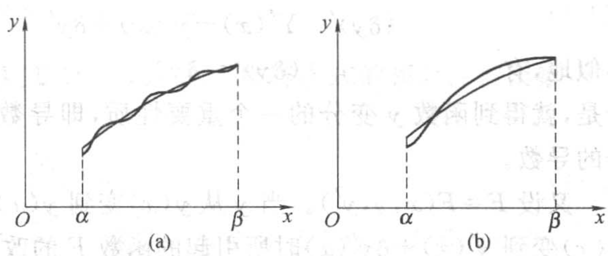

图 1-5

零级邻域：函数 $y_0(x)$ 的零级 δ 邻域是指与 $y_0(x)$ 的零级距离小于正数 δ 的函数全体，简称为零级邻域。零级邻域内的曲线 $y=y(x)$ 称为具有零级接近度曲线

一级邻域：函数 $y_0(x)$ 的一级 δ 邻域是指与 $y_0(x)$ 的一级距离小于正数 δ 的函数全体，简称为一级邻域。一级邻域内的曲线 $y=y(x)$ 称为具有一级接近度曲线。显然，若两个函数的一级距离小于 δ，则它们之间的零级距离也必小于 δ，故函数一级 δ 邻域实际上是其零级 δ 邻域的一部分。

类似地，可以定义二级、三级 δ 邻域及相应的二级、三级接近度曲线等。

以上的概念可以推广到多元函数的情形。

4. 泛函极值的定义

设 $y_0(x)$ 属于某可取函数类，$y(x)$ 是类中任一函数，如果泛函 $J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)]$，则说泛函 $J[y]$ 在 y_0 上取极小值；如果泛函 $J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)]$，则说泛函 $J[y]$ 在 y_0 上取极大值。

如果这种比较是在全体容许函数中进行的，则称为绝对极小(极大)值；如果这种比较是在 $y_0(x)$ 的某邻域进行的，则称为相对极小(极大)值。

使泛函取极值的函数(曲线)，称为极值函数(曲线)。

在零级 δ 邻域内使泛函取极值的曲线，称为强极值曲线。如果只在一级 δ 邻域内使泛函取极值的曲线，称为弱极值曲线。

如果泛函 $J[y]$ 在 $y_0(x)$ 上取强极值，它也在该函数上取得弱极值。反之，在 $y_0(x)$ 上取弱极值，则未必能取得强极值。因为函数的一级 δ 邻域是其零级 δ 邻域的一部分，在较宽的范围内能取得极值，在范围较窄的部分域上更能取得，反之则不然。

§1-3 泛函的变分

泛函是由函数的积分来定义的，因此，在讨论泛函变分以前，我们先来介绍一下函数的变分。

1. 函数的变分

当自变函数 $y(x)$ 的形式发生变化而成为新的函数 $Y(x)$ 时，定义这两个容许函数的差为函数的变分，用 δy 表示，即

$$\delta y = Y(x) - y(x) \tag{1-6}$$

与函数的微分 dy 不同，函数的变分是 x 不变，由于曲线形状变化而发生的函数的变化量；而函数的微分是函数不变，由于 x 发生变化而引起的函数的改变量，如图 1-6 所示。由于 $y(x)$ 与 $Y(x)$ 都来自同一函数类，所以 δy 也具有这个函数类的特征（如光滑度等）。如果边界固定，则 $\delta y = 0$。

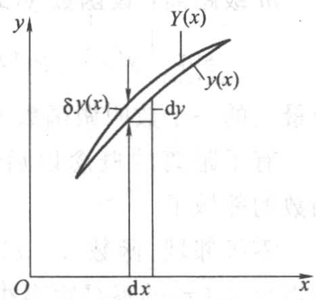

图 1-6

对式(1-6)两边求导，并根据函数变分的定义可得

$$(\delta y)' = Y'(x) - y'(x) = \delta y' \tag{1-7}$$

类似地，有 $(\delta y)^n = \delta y^{(n)}$

于是，就得到函数 y 变分的一个重要性质，即导数的变分等于变分的导数。

又设 $F = F(x, y, y')$。当 y 从 $y(x)$ 变到 $y(x) + \delta y(x)$，y' 从 $y'(x)$ 变到 $y'(x) + \delta y'(x)$ 时所引起的函数 F 的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y') \\ &= (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') + \frac{1}{2}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] + \cdots\end{aligned}$$

上式右端第一部分为函数增量 ΔF 的线性主部，称为函数 F 的一阶变分，用 δF 表示，即有

$$\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \tag{1-8}$$

右端第二部分定义为函数 F 的二阶变分，它是函数 y 及其导数变分的二次项部分，用 $\delta^2 F$ 表示，即有

$$\delta^2 F = \frac{1}{2}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] \tag{1-9}$$

注意：这里函数 F 的增量是由自变函数 y 及其导数 y' 的变化引起的，而不是坐标 x 的变化引起的。

由定义可得函数 F 变分的运算规则：

(1) $\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$

(2) $\delta(F_1 F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2$

(3) $\delta(F_1/F_2) = (F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2)/F_2^2$

(4) $\delta F^n = nF^{n-1}\delta F$

下面证明运算规则(4)：

证 将 F^n 视为复合函数，按定义式(1-8)有

$$\begin{aligned}\delta F^n &= \frac{\partial}{\partial y}F^n \delta y + \frac{\partial}{\partial y'}F^n \delta y' = nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \\ &= nF^{n-1}(F_y \delta y + F_{y'} \delta y') = nF^{n-1}\delta F\end{aligned}$$

证毕。

其余运算规则可按类似方法求证。

2. 泛函的变分

考虑最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于函数的变分所产生的泛函的增量为

$$\Delta J = J[y+\delta y] - y[y] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

泰勒

假设函数 $F(x,y,y')$ 充分光滑，运用多元函数的戴劳公式，上式可展开为

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] + \frac{1}{2!}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] + \cdots \right\} \mathrm{d}x \\ &= \delta J + \delta^2 J + \cdots \end{aligned} \tag{1-11}$$

式中

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\mathrm{d}x \tag{1-12}$$

定义为泛函 J 的一阶变分，它是函数及其导数变分 δy、$\delta y'$ 的一次齐次式的积分。按函数 F 一阶变分的定义(1-8)，则有

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta F \mathrm{d}x \tag{1-13}$$

即泛函的一阶变分等于函数 F 一阶变分的积分。泛函的一阶变分又简称为泛函的变分。

$$\begin{aligned}\delta^2 J &= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1-14}$$

最后一个等式运用了函数 F 二阶变分的定义(1-9)，称 $\delta^2 J$ 为泛函 J 的二阶变分，它是函数及其导数变分 δy、$\delta y'$ 的二次齐次式的积分，或等于函数 F 二阶变分的积分。

对式(1)两边取变分，得

$$\delta J = \delta \int_{x_0}^{x_1} F \mathrm{d}x \tag{2}$$

与式(1-13)比较，有

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta F \mathrm{d}x \tag{1-15a}$$

同理，由式(1-14)，并注意到式(1)，可得

$$\delta^2 \int_{x_0}^{x_1} F \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \mathrm{d}x \tag{1-15b}$$

于是，我们就证明了泛函变分的一个重要性质：积分的变分等于变分的积分，即变分号可以从积分中提出来。

例 1-1 设 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2)\mathrm{d}x$，求 δJ 和 $\delta^2 J$、$\delta^3 J \cdots$。

解法 1 $\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \{[(y+\delta y)^2 + (y'+\delta y')^2] - (y^2 + y'^2)\}\mathrm{d}x$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (2y\delta y + 2y'\delta y')\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} [(\delta y)^2 + (\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

上式右边的第一项积分为函数及其导数变分 δy 和 $\delta y'$ 的一次齐次式的积分，故就是泛函的一阶变分，即

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (2y\delta y + 2y'\delta y')\mathrm{d}x$$

第二项积分为函数及其导数变分 δy 和 $\delta y'$ 的二次齐次式的积分，故就是泛函的二阶变分，即

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y)^2+(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

而 ΔF 中不含函数 y 及其导数变分的三次及其以上的项，故

$$\delta^3 J=\delta^4 J=\cdots=0$$

这里，求解泛函各阶变分的方法是：首先写出泛函的增量，再按函数及其导数的变分归并，其线性项部分就是一阶变分，二次项部分就是二阶变分等等。

解法 2

$$F=y^2+y'^2\Rightarrow F_y=2y, F_{y'}=2y'$$

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}(2y\delta y+2y'\delta y')\mathrm{d}x$$

$$F_{yy}=2,\quad F_{yy'}=0,\quad F_{y'y'}=2$$

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[2(\delta y)^2+2\cdot 0\cdot\delta y\delta y'+2(\delta y')^2]\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y)^2+(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

由于 F 对 y 及 y' 三阶以上的导数都为零，故 $\delta^3 J=\delta^4 J=\cdots=0$。

这里是直接采用各阶变分的定义来求解的。可见，两种方法的结果是一致的。

3. 泛函变分的 Lagrange 定义

设 ε 为 $|\varepsilon|\leqslant 1$ 的实参数，$\eta(x)$ 是任意选定的函数，令

$$\delta y=\varepsilon\eta(x) \tag{3}$$

由于 $\eta(x)$ 的任意性，函数 $\overline{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$ 包含了全部容许函数。又由于 y 和 η 是确定了的，所以将式(3)代入式(1-10)积分以后，泛函增量 ΔJ 实际上是关于 ε 的普通函数，用 $I(\varepsilon)$ 表示。将 $I(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 点处展开，有

$$\Delta J=I(\varepsilon)=\varepsilon I'(0)+\frac{\varepsilon^2}{2!}I''(0)+\frac{\varepsilon^3}{3!}I'''(0)+\cdots \tag{4}$$

注意到式(3)及泛函一阶变分的定义式(1-12)，上式右端第 1 项有如下关系：

$$\begin{aligned}\varepsilon I'(0)&=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\{J[y+\varepsilon\eta]-J[y]\}\Big|_{\varepsilon=0}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')\right]_{\varepsilon=0}\mathrm{d}x\\&=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,y,y')\eta+F_{y'}(x,y,y')\eta']\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,y,y')\delta y+F_{y'}(x,y,y')\delta y']\mathrm{d}x=\delta J\end{aligned} \tag{5}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^2}{2}I'(0)&=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}F[x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta']\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}x\\&=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x=\delta^2 J\end{aligned} \tag{6}$$

将(5)、(6)两式略去中间的推导过程，重新列写如下：

$$\delta J=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}=\varepsilon I'(0) \tag{1-16}$$

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\varepsilon^2}{2}I'(0) \tag{1-17}$$

式(1-16)和式(1-17)就是一阶变分和二阶变分的 Lagrange 定义。类似地可定义更高阶的各

阶变分。在式(1-16)和式(1-17)中的因子 ε 和 ε^2 是为了保持符号上的统一而引入的。

例 1-2 设 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$,用 Lagrange 定义求 δJ 和 $\delta^2 J$ 。

解

$$\delta J=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}[(y+\varepsilon\eta)^2+(y'+\varepsilon\eta')^2]\mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}[2(y+\varepsilon\eta)\eta+2(y'+\varepsilon\eta')\eta']_{\varepsilon=0}\mathrm{d}x$$

$$=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}[2y\eta+2y'\eta']\mathrm{d}x=2\int_{x_0}^{x_1}[y\delta y+y'\delta y']\mathrm{d}x$$

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_1}[(y+\varepsilon\eta)^2+(y'+\varepsilon\eta')^2]\mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{x_0}^{x_1}2(\eta^2+\eta'^2)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y)^2+(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

这里,求解泛函变分的步骤是:首先,引入参数 ε,写出泛函 $J[y+\varepsilon\eta]$表达式;其次,将 $J[y+\varepsilon\eta]$ 对 ε 求偏导;最后,利用公式 $\delta J=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}$ 可得泛函的一阶变分。余类推。

4. 其他形式泛函的变分

(1)依赖于多元函数泛函的变分

泛函
$$J[u(x_1,x_2,x_3)]=\iiint_\Omega F(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

为依赖于三元函数 $u(x_1,x_2,x_3)$泛函。Lagrange 定义的两种形式在本质上是一样的,下面采用式(1-16)的第二种形式,即 $\delta J=\varepsilon I'(0)$来计算变分。

例 1-3 设泛函 $J[u]=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+2uf(x_1,x_2,x_3)\right]\mathrm{d}v$,求 δJ。

解 取 $\delta u=\varepsilon\eta$,因为

$$I(\varepsilon)=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_3}\right)^2+2(u+\varepsilon\eta)f\right]\mathrm{d}v-$$
$$\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+2uf\right]\mathrm{d}v$$

$$I'(\varepsilon)=2\iiint_\Omega\left[\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+\frac{\partial(u+\varepsilon\eta)}{\partial x_3}\frac{\partial\eta}{\partial x_3}+\eta f\right]\mathrm{d}v$$

故
$$\delta J=\varepsilon I'(0)=2\varepsilon\iiint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial\eta}{\partial x_3}+\eta f\right]\mathrm{d}v$$
$$=2\iiint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial\delta u}{\partial x_3}+\delta uf\right]\mathrm{d}v$$

(2)依赖于多个一元函数泛函的变分

设泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$,则相应的 $I(\varepsilon)$可写成

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\varepsilon\eta,z+\varepsilon\zeta,y'+\varepsilon\eta',z'+\varepsilon\zeta')-F(x,y,z,y',z')]\mathrm{d}x$$

式中 η、ζ 为任意选定的函数。这时,泛函的一阶变分就可定义为

$$\delta J=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta,z+\varepsilon\zeta]\Big|_{\varepsilon=0}=\varepsilon I'(0)\tag{1-18}$$