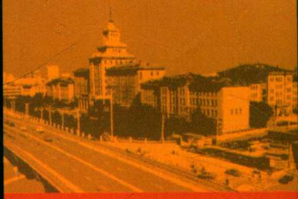

The Course of Differential Equation

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

微分方程教程

[苏] 史捷班诺夫 著　卜元震 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

微分方程教程

The Course of Differential Equation

[苏] 史捷班诺夫 著

卜元震 译

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共十章，包括：一般概念、已解出导数的一阶方程的若干可积类型，已解出导数的一阶方程的解案存在问题，未解出导数的一阶方程，高阶微分方程，线性微分方程的一般理论，特殊形状的线性微分方程，常微分方程组，偏微分方程、一阶线性偏微分方程，一阶非线性偏微分方程，历史概论，最后附有答案。

本书适合数学专业师生及数学爱好者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程教程/(苏)史捷班诺夫著；卜元震译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.6

ISBN 978－7－5603－6675－3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①史… ②卜… Ⅲ.①微分方程—教材
Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 131374 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茜艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 27.5 字数 494 千字
版 次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－6675－3
定 价 78.00 元

◎ 目录

第一章 一般概念、已解出导数的一阶方程的若干可积类型

§1 引　　言

1. 从形式的数学观点看来，解(积分)微分方程的问题就是微分的逆运算的问题。微分学的问题就是求已知函数的导数。最简单的逆运算问题在积分学中就已经遇到：给定已知函数 $f(x)$，求其原函数(不定积分)。如果用 y 表示原函数，那么，这个问题就可以用方程的形式表示

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x) \tag{1}$$

或

$$\mathrm{d}y=f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

互相等价的方程(1)和(2)是最简单的微分方程。我们已经能够求它们的解。实际上，从积分学中大家知道，满足方程(1)或(2)的最普遍的函数 y 的形状是

$$y=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C \tag{3}$$

在解(3)中的不定积分表示某一个原函数，C 是任意常数。所以，由方程(1)或(2)所确定的未知函数并不是唯一的。这个微分方程有无数个解，其中任何一个解，都可以由给予任意常数 C 一个适当的数值而得到。含有任意常数 C 的解(3)叫作方程(1)的通解；给通解中的常数 C 一个确定的数值而得到的解叫作特解。

我们来讨论下面的一个力学问题。研究在地心引力作用下 m 点沿着直线的运动。取 m 点沿着运动(落下)的那一条铅直线为 Oy 轴,将原点放于地面上,并且规定向上的方向为正向;要知道运动情况,也就是要知道运动开始(对应于 $t=0$) t s 后 m 点的位置,就必须知道这个点的坐标 y 由函数 t 表出的式子。这样,t 就是自变数,而 y 是未知函数。现在我们要作出求 y 的方程。根据二阶导数在力学上的意义,知道加速度等于$\frac{d^2y}{dt^2}$;另一方面,我们知道在地面上以及地面临近的每一点重力加速度是常数,而且(近似地)等于 981 cm/s^2,我们用字母 g 来表示,$g\approx 981\ cm/s^2$;它的方向是向下的,因此在我们的坐标系中,它的前面必须加一负号。使这两个点加速度的表达式相等,我们就得到以 y 为未知函数的方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{4}$$

现在已知 y 的二阶导数,而要求出这个函数。这个微分方程是容易解(积分)的。[①] 把等式(4)的两端对 t 求两次不定积分,那么我们顺次可得

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1 \tag{5}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{6}$$

式(6)是方程(4)的通解,它含有两个任意常数 C_1 和 C_2。我们来说明这些常数的物理意义。在方程(5)中让 $t=0$,就得到

$$C_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \quad (\text{动点的初速})$$

同样,从方程(6)可得

$$C_2 = (y)_{t=0} = y_0 \quad (\text{动点的原始位置})$$

用任意常数的这些新记号,我们就可以把微分方程的通解写为

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0 \tag{7}$$

现在可以看清楚需要哪些补充条件以便获得一个描述完全确定的运动的特解:必须知道动点的原始位置 y_0 和初速 v_0 的数值(原始条件)。

---

① 通常用“积分微分方程”来代替“解微分方程”这句话,为避免混淆起见,我们称求不定积分的运算为“求积”。

问　题

1. 求初速度为零自 10 m 高处落下的点的运动方程。问它在几秒后落于地面上？

2. 求以初速 1 m/s 上抛的点的运动方程。问几秒后达到最高点？

3. 求下列方程的通解：$\frac{dy}{dx}=2,\frac{dy}{dx}=-x^3,\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$。

2. 方程(1)中只出现未知函数的一阶导数。这是一阶微分方程。一般的一阶微分方程具有下面的形状

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0 \tag{8}$$

其中 F 是三个变元的已知连续函数；它可以不依凭 x 或 y（或对于二者皆不依凭），但是必须含有$\frac{dy}{dx}$。如果方程(8)确定$\frac{dy}{dx}$为其余两个变元的隐函数[①]（以后我们永远假定这个条件是适合的），那么它可以用解出$\frac{dy}{dx}$的形状表达

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{9}$$

这里 f 是 x,y 的已知连续函数（特别地，它可以不含一个或两个变元：在方程(1)中 f 不依凭 y；在问题 3 的第一问中，方程的右端既不依凭 x，又不依凭 y）。在微分方程(8)或(9)中，x 是自变数，y 是未知函数。这样，一阶微分方程是联系未知函数、自变数以及未知函数的一阶导数间的关系式。

任何函数 $y=\varphi(x)$，如果代入方程(8)或(9)后使之成为恒等式，就叫作微分方程(8)或(9)的解。

方程(4)含有未知函数的二阶导数，这是二阶方程。二阶微分方程的一般形状是

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{10}$$

或者是就二阶导数解出（如果能够解出的话）表达式

① 要使方程 $F(x,y,y')=0$ 确定的隐函数 $y'=f(x,y)$ 存在，而且当 $x=x_0,y=y_0$ 时取值 y_0'，其充分的条件是：等式 $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 成立，在数值 x_0,y_0,y_0' 的邻域中连续偏导数 $F'_{y'}$ 存在，而且 $F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')\neq 0$，这样式(8)就在数值 x_0,y_0 的邻域中确定一连续函数(9)，而且 $f(x_0,y_0)=y_0'$。

$$y''=f(x,y,y') \tag{10'}$$

(为了简写起见,我们用撇表示 y 对 x 的导数)。这里 F 和 f 是其各个变元的已知连续函数,x 是自变数,y 是未知函数;x,y,y' 中某些变元(或全部)可以在方程中不出现,但 y'' 一定要出现。将函数 $\varphi(x)$ 代替方程(10)(或(10′))中的 y,如果使方程成为恒等式,则称 $\varphi(x)$ 为解。一般地,方程所含的未知函数的最高阶导数的阶数称为方程的阶。这样,n 阶方程的形状是

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

但方程中必须出现 $y^{(n)}$。

3. 一阶微分方程有几何解释,它能使我们明白这种方程的解有很多性质。设给定方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

我们取 x,y 为平面上的笛卡儿直角坐标,在函数 f 的定义域中,每点 (x,y) 都由方程(9)确定一个 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的数值。设 $y=\varphi(x)$ 是方程(9)的解,那么由方程 $y=\varphi(x)$ 确定的曲线称为方程的积分曲线。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是这条曲线上的切线和 Ox 轴交角的正切。这样,对于定义域中每点 (x,y),方程(9)都定出一个方向与之对应,这样我们就得到了方向场。可以这样描述出它:将与 Ox 轴交角为 $\arctan\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的箭头(箭头的正指向可以任意取,因为反正切所确定的角可以相差 π 的倍数)放在域内相应的各点。现在,微分方程的积分问题可以这样解释:求一曲线,使它在各点的切线方向与方向场在该点的方向一致。概略说来,所引曲线必须使分布在场内的箭头在每点都指示该曲线的切线的方向。

让我们更仔细地研究下面的例子

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2 \tag{11}$$

先找出那些具有相同斜率的曲线(等斜线),再分布箭头。这样,如果 $y'=0$ 就有 $x=y=0$(原点);如果 $y'=\frac{1}{2}$,则有 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$(中心在原点,半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圆),圆周 $x^2+y^2=1$ 上 $y'=1$,等等(图1)。要画方程(11)的积分曲线,就必须在平面上取一点 (x_0,y_0),经过它引一曲线,使曲线上各点具有场的方向(在圆上所画曲线经过点 $(0,0)$,$(0,-\frac{1}{2})$,$(\sqrt{2},0)$)。可见,所得的不是一个曲线,

而是含一个参数的整族曲线(例如可以取曲线与 y 轴的截距作为参数)。这结论,对于任何场,也就是任何微分方程,在一定的限制下也是正确的。所以,关于微分方程的全部积分曲线的问题我们有理由期望这样的答案:一阶微分方程的积分曲线构成独参数的曲线族

$$y=\varphi(x,C) \tag{12}$$

如果注意到函数 $\varphi(x,C)$ 对于任何 C 都是微分方程的解,那么我们就可以期望下面的结果。

一阶微分方程的通解是含有一个任意常数的式(12)。[①]

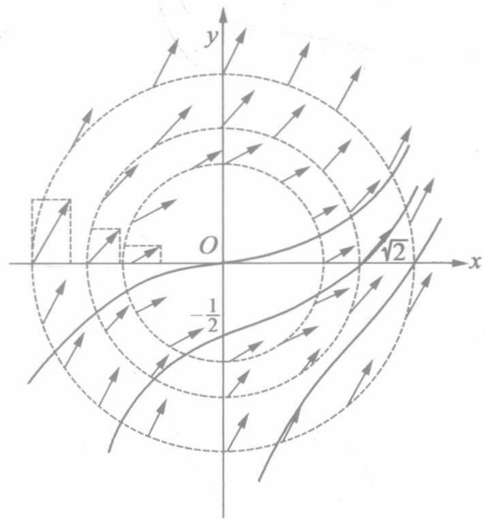

图 1

最后,注意到每一条积分曲线可由它所经过的一个定点 (x_0,y_0) 而得到,我们就能得出下面的结论:

为了唯一地确定微分方程的特解,就必须给出未知函数在自变数的值为 x_0 时所具有的值 y_0(原始值)。

实际上,如果已知 x_0 和 y_0,那么可以将它们代入方程(12)得:$y_0=\varphi(x_0,C)$——确定一个未知数 C 的方程;上面的几何推理使我们有理由期望这个方程有解。

注 第三段的推演并不是微分方程解的存在和原始条件决定唯一解的严格证明,因为这是凭着几何图像作的,讲过的一切结果,只有对函数 f 在一定的限制下才正确;严格的证明要在第二章中才讲到。我们的叙述只指出在简单的

① 通解和特解的确切定义只能在以后给出。

情况下，我们能够期望哪些结论，以及给出作积分曲线近似图像的实际方法。

问 题

4. 作出方程$\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$的方向场（作等斜线 $y'=0, y'=\pm 1, \pm 2$），并引经过(0,0)，(0,1)，(1,0)各点的积分曲线。

4. 我们看到，由最简单的例(1)所得到的一阶微分方程的通解的特性——对于一个任意常数的依凭——为前段的理由证实对于更广泛的一阶方程也是正确的。我们自然要期望一般二阶微分方程(10)或(10′)的解与方程(4)类似，也含有两个任意常数，而 n 阶微分方程的通解依凭 n 个任意常数。事实上它确是这样（在一定的限制下）；在这里我们不用几何推理，而从另一角度去解决这个问题，从而我们的思考借类比法而获得有意义的证实。

让我们提出一个问题，这个问题在某种意义上是解微分方程的反面问题。设已知关系式

$$y=\varphi(x,C) \tag{13}$$

其中 C 是参数，对 x 微分后[①]，我们得到

$$y'=\varphi'_x(x,C) \tag{14}$$

如果式(14)的右端不含 C，那么我们就已经消去参数 C，而且得到微分方程

$$y'=\varphi'_x(x) \tag{14'}$$

显然，在这种情形下，式(13)的形状是

$$y=\varphi(x)+C$$

而且是方程(14′)的解。

现在设等式(14)的右端含有 C，那么等式(13)的右端也含有 C，亦即 $\varphi'_C(x,C)\neq 0$，而且在使 $\varphi'_C(x_0,C_0)\neq 0$ 的数值 x_0,C_0 的邻域中，我们可以确定 C 为 x,y 的函数

$$C=\psi(x,y) \tag{15}$$

显然我们有恒等式（对变数 x 和 C）

$$\psi[x,\varphi(x,C)]\equiv C \tag{16}$$

将式(15)所确定的 C 值代入式(14)，我们获得了一阶微分方程

$$y'=\varphi'_x[x,\psi(x,y)] \tag{17}$$

---

① 我们假定在论证中出现的导数都存在。

在这里,我们容易证明不论 C 是任何值,(13)总是上一方程的解;实际上,如果我们将 y 的表达式(13)代入方程(17),则在左端得 $\varphi'_x(x,C)$,而在右端得 $\varphi'_x\{x,\psi[x,\varphi(x,C)]\}$,由于恒等式(16)等于 $\varphi'_x(x,C)$。

如果给出的 x,y,C 间的关系式是隐式

$$\Phi(x,y,C)=0 \tag{13'}$$

那么,将它对 x 微分,我们得到

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'=0 \tag{14''}$$

在满足隐函数论中相应条件的情况下,从关系式(13′)和(14″)消去 C,我们得到方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{17'}$$

前面的推演说明(13′)是它的解。

现在,设给定关系式

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,C_3,\cdots,C_n)=0 \tag{18}$$

它联系着函数 y 和自变数 x,而且含有 n 个参数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$。我们提出一个问题,是否可以作出一个微分方程使得不论参数取什么常数值,式(18)所确定的函数 y 满足这个微分方程?我们假定 Φ 是所有变元的连续函数,而且对 x,y 可微分足够多次。在上述假设下,对等式(18)(如果将关系式(18)所确定的函数 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 代 y,它就是恒等式)微分 n 次。我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0\\[2mm]\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y'+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y''=0\\[2mm]\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+3\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}y'+\cdots+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'''=0\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\cdots+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0\end{cases} \tag{19}$$

关系式(18)和(19)构成一组 $n+1$ 个方程,它们含有 n 个参数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$。一般来说,[①]从这组方程可以消去所有的参数,也就是从 n 个方程求得它们对 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的表达式,再将这些表达式代入第 $n+1$ 个方程。我们就得到关系式

① 即使在一次方程系的情形中,我们知道 n 个方程不一定能决定 n 个未知数。

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{20}$$

也就是得到 n 阶微分方程。我们已经指出,用函数 $\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 代方程(18)中的 y 就得到恒等式,这对于方程(19)同样正确;所以,作为方程(18)和(19)的结果的方程(20),当其中的 y 被函数 $\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 所替代时,也成为恒等式,而这正意味着由式(18)所确定的 y 是方程(20)的解。由此看来,这个含有 n 个任意常数的函数乃是某个 n 阶微分方程的解。这段推理还可以进行得更精确,有如我们对于一阶微分方程所作的那样。现在我们有理由推断原来的解是通解,而反之,n 阶微分方程的通解含有 n 个任意常数。

问　题

5. 求平面上所有直线(取通式)的微分方程,并积分这个方程。

6. 求焦距为 $2c$ 的共焦点椭圆族的微分方程。

提示:曲线族方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$,其中 a 是任意参数。将 y 看成 x 的函数,对 x 微分,可得

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{a^2-c^2}=0$$

从这两个方程消去 a^2,就得到所求的一阶微分方程。

例 1　在平面上的圆族

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

含有三个参数,微分三次

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0$$

$$1+(y-\beta)y''+y'^2=0$$

$$(y-\beta)y'''+3y''y'=0$$

在微分时,消去了 α 和 γ,但是还要从最后两个方程消去 β。(使 $y-\beta$ 的两个表达式相等)我们可得

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

例 2　我们取圆锥曲线的方程作为最后一个例子,从解析几何上,大家知道,它依凭于五个参数(即六个系数的比例),其形状为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

我们假定 $a_{22}\neq0$,并由这个方程解出 y

$$y=-\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\right)^2-\frac{a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}}{a_{22}}}$$

或

$$y=-\frac{a_{12}}{a_{22}}x-\frac{a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\frac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2+2\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x+\frac{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}{a_{22}^2}}$$

用新的字母表示各个常数,我们最后得到

$$y=Ax+B+\sqrt{Cx^2+2Dx+E} \tag{21}$$

在这方程中有五个参数;必须将它们从已知方程和经过一次,二次,……,五次微分后所得的各方程中消去。

因此,将方程(21)两端对 x 微分

$$y'=A+\frac{Cx+D}{\sqrt{Cx^2+2Dx+E}}$$

$$y''=\frac{C(Cx^2+2Dx+E)-(Cx+D)^2}{(Cx^2+2Dx+E)^{\frac{3}{2}}}=\frac{CE-D^2}{(Cx^2+2Dx+E)^{\frac{3}{2}}}$$

A,B 两常数已被消去;在右端,分子为常数,而分母为二次三项式的$\frac{3}{2}$次方。为了以后易于消去常数起见,我们取两端的 $-\frac{2}{3}$次方,于是得到

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=(CE-D^2)^{-\frac{2}{3}}(Cx^2+2Dx+E)$$

即是说,在右端有了关于 x 的二次三项式;如果将它连续微分三次,那么所有常数都被消去,因为这时右端等于零。所以,要求的微分方程就是

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'''=0$$

我们逐次求微分

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'=-\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''',(y''^{-\frac{2}{3}})''=\frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2-\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{IV}}$$

最后得到

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'''=-\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3+\frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}}+\frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}}-\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{V}}=0$$

合并同类项,两端乘 $y''^{\frac{11}{3}}$以去掉负幂;最后再用 $-\frac{27}{2}$乘两端。这样化简后,终于得到

$$9y''^2y^{\mathrm{V}}-45y''y'''y^{\mathrm{IV}}+40y'''^3=0$$

注 1 在公式(21)的根号前,我们取的是正号;如果取负号,容易证明最后

结果是一样的。

注 2 我们指出，$C=\dfrac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}$；对于抛物线 $C=0$，而抛物线方程（依凭四个参数）的形状是

$$y=Ax+B+\sqrt{2Dx+E}$$

注 3 我们假定 $a_{22}\neq 0$，$a_{22}=0$ 的情况则留作问题。

问 题

7. 导出有 $a_{22}=0$ 的圆锥曲线的微分方程，什么几何特性把这批曲线从一切二次曲线中区别出来？（分两种情况考虑 $a_{12}\neq 0$，$a_{12}=0$）

8. 导出有 $a_{22}\neq 0$ 和有 $a_{22}=0$ 的抛物线的微分方程。

注 如果我们有含 n 个参数的 x 和 y 的一个关系式，那么我们断言，“一般说来”要消去这些参数必须有 $n+1$ 个方程。在个别情况中也可以从较少的方程消去较多的参数；例如从曲线族 $y=C_1(C_2x+C_3)$ 消去参数后，可得二阶方程 $y''=0$，因为实际上这个族决定于两个参数，C_1C_2 同 C_1C_3。

对于以原点为二重点的退化二次曲线族的方程 $y^2=2bxy+cx^2$，这事实就较难发现。作为几何的图像，这曲线族确实依凭于两个参数；但是如果解出 y，我们可得

$$y=(b\pm\sqrt{b^2+c})x$$

从函数的观点看来，作为 x 的单值函数的 y，依赖于 x 和一个参数组合

$$k=b\pm\sqrt{b^2+c}$$

而实际上，将所给关系式微分，我们可得

$$yy'=b(xy'+y)+cx$$

从原式与这个方程中消去 c，可得

$$xyy'-y^2=b(x^2y'-xy)\text{或}(y-bx)(xy'-y)=0$$

令第二因子等于零，得到所求的微分方程 $xy'-y=0$。容易看出，如果令第一因子等于零，我们就得到同一微分方程的特解。

§2 分离变数法

1. 在 §1，我们已经遇到最简单的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

我们可以用微分将它写为

$$\mathrm{d}y=f(x)\,\mathrm{d}x$$

方程(1)(或(2))称为不(显)含未知函数的一阶微分方程。假定函数 $f(x)$ 确定于某一区间 $a<x<b$,并且在这区间的一切内点处连续。此外,可以 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$,或同时 $a=-\infty$,$b=+\infty$。

在积分学中已经证明,作为函数 $f(x)$ 的原函数的未知函数 $y(x)$ 乃是不定积分(或者是以变数为上限的定积分);还证明过,任一原函数同某一固定原函数之间只差一常数项。这样,方程(1)(或(2))的解是

$$y=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C$$

C 是可取一切数值的任意常数,即 $-\infty<C<+\infty$;给 C 一切可能的数值,根据上述,我们就得到一切满足已知方程的函数 y。所以式(3)是方程(1)的通解。给 C 一个确定数值,就得到一个特解。在整个区间 $a<x<b$ 内,一切特解都是 x 的连续及可微函数。

为了解释在公式(3)中任意常数的意义,宜乎将不定积分写成以变数为上限的定积分

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x+C \qquad (3_1)$$

其中 x_0 为区间(a,b)的任一内点。如果给变数 x 以数值 x_0,则得

$$y(x_0)=C$$

用 y_0 记未知函数在 $x=x_0$ 时的值,公式(3_1)就化为

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3_2)$$

这样,如果给未知函数一个原始值,也就是它在自变数为某一确定(原始)值时所要取的值,就可以完全确定一个特解。

因而,原始数据(x_0,y_0)唯一地确定方程(1)(在右端 $f(x)$ 的全部连续区间内)的解。从几何的观点看来,给定原始值就是给定平面 xOy 上一点。对于所得结论,可以作如下的解释:在平面 xOy 的区域 $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$ 内的每一点只有方程(1)的一条积分曲线。最后,我们指出,公式(3_1),(3_2)表明任何积分曲线可以从其中的某一个得出,例如从 $y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$。只需对 y 轴作(正或负的)距程 $C=y_0$ 的平移,就能得到任何积分曲线。

例 3 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$。等式右端在开区间$(0,+\infty)$和$(-\infty,0)$内连续,对于前一区间,我们有(当 $x_0>0$)

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0$$

这个解确定于区间 $0<x<+\infty$ 内的一切 x。对于第二个区间,我们就原始值 $x_0<0$得到

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}+y_0=\ln|x|-\ln|x_0|+y_0=\ln\frac{x}{x_0}+y_0$$

这是定义在 $-\infty<x<0$ 的解。

例 4 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x=0$。解出导数,我们得到两个方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x},\frac{dy}{dx}=-\sqrt{x},0\leqslant x<+\infty$$

把这些方程积分

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C,y=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

前一个方程确定一族(含一参数)半立方抛物线的上半支,这些半立方抛物线都可以从其中一个,例如从 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$对 y 轴作平移而得到(图 2(a))。同样,第二个方程确定下半支的一族(图 2(b)),显然,在平面 $x\geqslant0,-\infty<y<+\infty$ 内的每一点,每一个方程有一条而且只有一条积分曲线经过。

如果我们直接积分所给方程,而不将它分成两个具有单值右端的方程,那么我们就得到一族完整的半立方抛物线,经过这区域的每点就有两条积分曲线(图 2(c))。

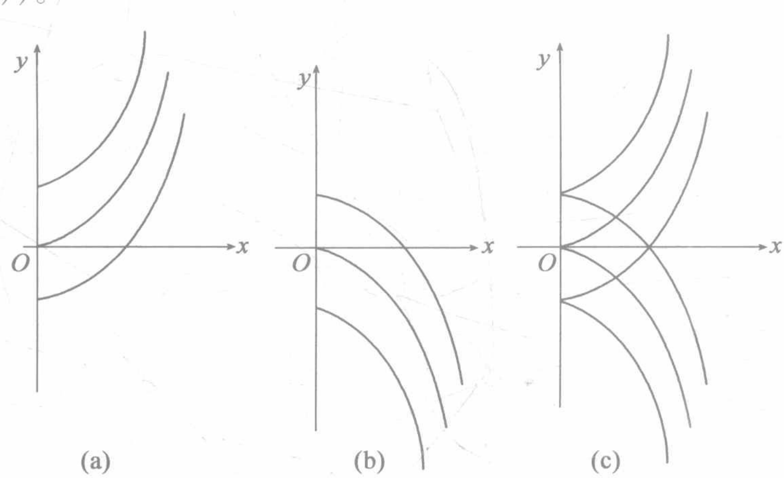

图 2