"十三五"国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列
Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

微积分 上册 第2版

CALCULUS

陈一宏 张润琦 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“-[illegible]规划教材

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

微积分

上册

第2版

主编　陈一宏　张润琦

参编　程杞元　李翠哲　苏伟宏

主审　李心灿

机械工业出版社

本书是根据教育部颁布的高等学校工科本科生《高等数学课程教学基本要求》，参考研究生入学考试《数学考试大纲》编写而成的，上册包含一元函数微积分和常微分方程等内容，下册包含多元函数微积分和级数等内容.

本书尽量从实际问题引入数学概念，注意培养学生用微积分的思想和方法观察、解决问题的能力. 例题、习题题型丰富，有些是研究生入学考试试题，其中不少题目紧密结合实际应用，有利于培养学生的应用意识以及分析解决问题的综合能力.

本书是工科本科生的教科书，也可以作为研究生入学考试复习用书.

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 上册/陈一宏，张润琦主编. —2 版. —北京：机械工业出版社，2017. 8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

ISBN 978-7-111-47731-0

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①陈…②张…　Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 191710 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：郑　玫　　责任编辑：郑　玫

版式设计：霍永明　　责任校对：肖　琳

封面设计：鞠　杨　　责任印制：李　昂

三河市宏达印刷有限公司印刷

2017 年 9 月第 2 版第 1 次印刷

190mm×210mm · 17 印张 · 572 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-47731-0

定价：49.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

前 言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，它是根据教育部颁布的高等学校工科本科生《高等数学课程教学基本要求》，参考研究生入学考试《数学考试大纲》编写而成的. 上册包含函数的极限和连续，一元函数微积分，常微分方程等内容. 下册包含向量代数和空间解析几何，多元函数微积分以及级数等内容.

为了能够让学生在较少的学时内理解和掌握微积分的重要概念、思想和方法，编写时注意到了下述几个方面：

1. 对主要概念尽量先从各类实际问题入手进行数学分析，逐步抽象出严格的数学概念.

2. 在理解微积分基本概念和理论的基础上，注意培养学生应用微积分的思想和方法解决实际问题的能力. 在本书的微分、积分和微分方程各部分内容中，都有较多的实例和习题. 通过对这些问题的分析、求解，不断提高学生运用数学知识建立实际问题的数学模型的能力.

3. 努力提高学生的综合解题能力. 每章最后一节为综合例题. 这些例题和习题为精选的典型问题，有些是研究生入学考试试题，有些问题的素材取自国外的参考书. 教师可根据具体情况在习题课上选用.

本书是教学改革研究项目“大学数学课程的改革和建设”的成果之一，是在长期的教学实践过程中，不断总结广大教师的教学经验，修改原有教材逐步形成的.

本书的编写得到数学教育家李心灿教授的指导和帮助，他还认真审阅了全稿，提出了诸多宝贵建议，在此表示衷心感谢. 机械工业出版社对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢.

本书上册第 0 章、第 1 章和第 5 章由李翠哲执笔，第 2 章和第 3 章由程杞元执笔，第 4 章由苏伟宏执笔，下册第 6 章和第 7 章由毛京中执笔，第 8 章、第 9 章和第 10 章由张润琦执笔. 全书由陈一宏和张润琦统稿.

书中标有 * 号的内容不作基本要求.

由于水平、经验所限，书中的不妥之处，恳请读者批评指正.

编 者

于北京理工大学

目　录

第 0 章 预备知识

高等数学的核心内容是微积分，它与以前所学的初等数学有很大的区别．初等数学研究的“数”是常数或常量，研究的几何形体是孤立的、不变的规则几何形体，主要研究常数间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系．与此相反，高等数学研究的“数”是变数或变量，研究的几何形体是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边形和曲面形等．高等数学将数和几何形体紧密结合起来，以函数为基本研究对象，以极限方法为基本研究方法，动态地、整体地、普遍地揭示变量间的变化规律．

在这一部分内容中，我们先对高等数学的研究对象——函数及相关知识进行简要复习和必要的补充．本部分内容是研究微积分最必要的基础知识．

0.1 集合与区间

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念，许多数学研究都离不开集合．例如，所有自然数的集合，所有有理数的集合，一个方程的根的集合，某矩形内所有点的集合，等等．一般地，具有某种确定性质的对象的总体称为**集合**或**集**，其中的对象称为集合的**元素**．通常以大写字母 A、B、M 等表示集合，而以小写字母 a、b、m 等表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）．否则，记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）．

一般地，表示集合的方法有两种．一种是**列举法**，就是把集合

的所有元素一一列出，写在一对花括号内. 例如，方程 $x^2-1=0$ 根的集合表示为 $S=\{-1, 1\}$. 另一种是**命题法**，就是指明集合元素所具有的确定性质. 例如，整数集可表示为 $\mathbf{Z}=\{x \mid \sin\pi x=0\}$. 一般地

$$A=\left\{x \,\middle|\, x\text{ 具有性质 }P\right\}$$

其中，P 是关于 x 的某个性质，意思为：$x\in A$ 的充要条件是 x 满足性质 P. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的根也可以表示为 $S=\{x \mid x^2-1=0\}$.

由某些数组成的集合称为**数集**. 全体实数构成实数集 $\mathbf{R}$. 若将数轴上的点对应到其坐标上的实数，则实数集中的数与数轴上的点就建立了一一对应关系. 因此，以后对实数与数轴上的点不严加区别. 例如，数 a 有时也说成点 a，反之亦然.

不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$ 及实数集 $\mathbf{R}$.

集合间的运算

包含：如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 B 包含集合 A，或称集合 A 包含于集合 B，记为 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$. 此时也称 A 是 B 的子集.

等于：如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

真子集：如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

交集：$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的交集.

并集：$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的并集.

差集：$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的差集.

2. 区间

高等数学中最常用的数集是区间. 介于两个实数间的全体实数构成的数集称为**区间**. 这两个实数称为区间的**端点**，两端点间的距离称为区间的**长度**. 这类区间称为有限区间. 还有一类区间称为无限区间. 一般有如下几种区间（表 0-1）：

表 0-1 中，a，b 是确定的实数，$a<b$；$+\infty$，$-\infty$ 是两个记号（不是数），分别读作正无穷、负无穷.

表 0-1

符号	定义	名称	
(a, b)	$=\{x\mid a<x<b\}$	开区间	有限区间
$[a, b]$	$=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	
$(a, b]$	$=\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	
$[a, b)$	$=\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	
$(a, +\infty)$	$=\{x\mid a<x<+\infty\}$	无穷开区间	无限区间
$(-\infty, b)$	$=\{x\mid -\infty<x<b\}$	无穷开区间	
$(-\infty, +\infty)$	$=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$	无穷开区间	
$[a, +\infty)$	$=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$	无穷半开半闭区间	
$(-\infty, b]$	$=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$	无穷半开半闭区间	

3. 邻域和内点

邻域也是一种常用的集合. 设 a 是一个实数，对于任意的正数 δ，开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的以 δ 为半径的**邻域**，简称**点 a 的邻域**，记作 $N(a, \delta)$. 其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域半径. 显然

$$N(a, \delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}$$

或写作
$$N(a, \delta)=\left\{x\,\middle|\,a-\delta<x<a+\delta\right\}$$

如果把邻域的中心点 a 去掉，所得到的集合称为点 a 的以 δ 为半径的**去心邻域**，记作 $\mathring{N}(a, \delta)$. 即

$$\begin{aligned}\mathring{N}(a, \delta)&=N(a, \delta)\setminus\{a\}\\&=\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}\end{aligned}$$

为方便起见，称开区间 $(a-\delta, a)$ 为**点 a 的左 δ 邻域**；称开区间 $(a, a+\delta)$ 为**点 a 的右 δ 邻域.**

设 I 表示某一数集，$x\in I$，若存在 x 的邻域 $N(x, \delta)\subset I$，则称 x 为 I 的内点. 开区间和无穷开区间都是由其内点构成的.

若对于任意的 $\delta>0$，$N(x, \delta)$ 中既有属于 I 的点，又有不属于 I

的点，则称 x 为 I 的边界点，边界点可以属于 I，也可以不属于 I. 如开区间（a，b）的两个端点 a、b 是边界点，不属于此开区间. 而闭区间的两个端点是边界点，且都属于此闭区间.

4. 常用符号

本书将多处使用以下四个符号：

$$\forall，\exists，\Rightarrow，\Leftrightarrow$$

分别读作“对于任意给定的”、“存在”、“推出”、“等价”. 其用法通过例子说明如下：

$$\forall x \in \mathbf{R}，有\ x \leqslant |x|$$

表示：对于任意一个实数 x，都有 $x \leqslant |x|$.

$$\forall x \in \mathbf{R}，\exists y \in \mathbf{R}，使\ y < x$$

表示：对于任意实数 x，存在实数 y，使得 $y < x$

符号“$\Rightarrow$”与“$\Leftrightarrow$”比较常用，此处不再说明.

0.2 函　数

在观察自然与社会现象时，会遇见各种不同的量，其中有些量在所考察的过程中始终保持不变，取一固定的数值，这种量称为常量；有些量在所考察的过程中发生变化，取不同的数值，这种量称为变量. 值得注意的是：一个量是常量还是变量与所考察的过程有关. 例如，局限于地球表面上某一地点而言，重力加速度 g 是常量；但在较大的地区内，g 是一个与地理位置有关的量. 通常以字母 a、b、c 等表示常量，以字母 x、y、z 等表示变量. 变量 x 所取数值的全体组成的集合称为变量 x 的变域.

在现实环境中，往往有两个或多个变量在相互关联地变化着，这就是函数现象. 函数是最重要的数学概念之一. 微积分研究的就是各类函数（包括初等函数、非初等函数、显函数和隐函数等）的各种性质，特别是函数的分析性质，如函数的导数和积分等.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y，x 的变域 D 是一非空数集. 若对于每一个 $x \in D$，总有惟一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 按某种法则 f 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，法则 f 是函数关系，记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y

称为**因变量或函数**. D 为函数的**定义域**，y 的一切值所组成的数集 $\mathbf{R}$ 称为函数 f 的**值域**. 值域常记作 $f(D)$，显然

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}=\mathbf{R}$$

在函数定义中，函数关系 f 及定义域 D 是两个重要因素，至于自变量和因变量采用什么字母表示则无关紧要. 因此，只要两个函数的定义域相同，函数关系相同，它们就表示同一个函数. 例如，函数

$$y=f(x),\ x\in X$$

与函数

$$v=f(u),\ u\in X$$

表示同一个函数.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 而对于一般的函数，其定义域是使因变量有确定实数值的自变量的全体.

例 1 从高为 h 处自由下落的物体，下落路程 s 与时间 t 的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

运动从 $t=0$ 时刻开始，到 $s=h$ 时终止，终止时刻是 $\sqrt{2h/g}$. 所以函数的定义域是 $[0,\ \sqrt{2h/g}]$.

例 2 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{5-x^2}{x-1}}$ 的定义域.

解 使函数有意义的 x 应满足 $\dfrac{5-x^2}{x-1}\geqslant 0$.

下面分两种情况讨论：

(1) $\begin{cases}5-x^2\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}$，解得 $1<x\leqslant\sqrt{5}$，见图 0-1 所示.

(2) $\begin{cases}5-x^2\leqslant 0\\ x-1<0\end{cases}$，解得 $x\leqslant-\sqrt{5}$，如图 0-2 所示.

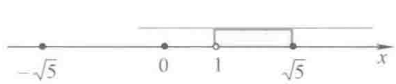

图 0-1

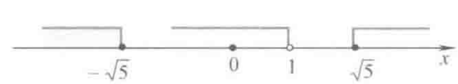

图 0-2

因此，函数的定义域为 $1<x\leqslant\sqrt{5}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{5}$，即 $D=(1,\sqrt{5}]\cup(-\infty,-\sqrt{5}]$.

例 3 设 $f(x-1)=x^2+2x-2$，求 $f(x)$.

解 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，代入已知式两端，得

$$\begin{aligned} f(t)&=(t+1)^2+2(t+1)-2\\ &=t^2+4t+1 \end{aligned}$$

所以 $$f(x)=x^2+4x+1$$

由此可知，函数关系 f 就是 $f(\quad)=(\quad)^2+4(\quad)+1$.

对于 x 的给定值 a，$f(a)=a^2+4a+1$.

设函数 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 在 Oxy 平面上取定直角坐标系后，对每个 $x\in D$ 可确定平面上一点 $M(x,y)=M(x,f(x))$. 当 x 取遍 D 中所有值时，点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 画出平面上一条曲线 $y=f(x)$，该曲线即称为函数 $y=f(x)$ 的图形（见图 0-3）. 有时也将图形直接称为函数 $y=f(x)$.

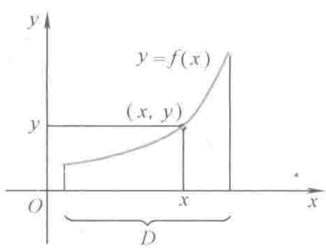

图 0-3

上面的函数表达式中仅有一个自变量，此类函数称为一元函数. 本套书上册主要讨论一元函数，下册将讨论多元（自变量个数多于一个）函数.

2. 分段函数

函数的表示方法很多，常用的有**列表法**、**图示法**和**公式法**三种.

应该注意到，在函数的定义中，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示函数关系，在很多问题中常常会遇到这种情况，就是在定义域的不同范围内，函数关系用不同的式子来表示，这种函数叫做**分段函数**.

注意：分段函数是一个函数，而不是几个函数，这一点初学者一定要弄清楚.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0\\ -x & x<0 \end{cases}$$

其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，函数图形如图 0-4所示.

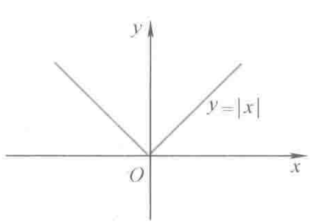

图 0-4

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R=\{-1,\ 0,\ 1\}$. 函数图形如图 0-5 所示.

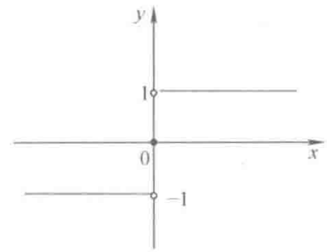

图 0-5

例 6 取整函数

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

函数值定义为小于或等于 x 的最大整数，例如 $[1.3]=1$，$[2]=2$，$[-0.5]=-1$，$[-\pi]=-4$. 其定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$，函数图形如图 0-6 所示，这是一个分为无限多段的分段函数.

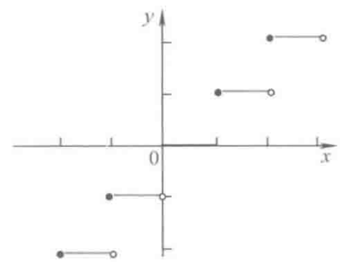

图 0-6

例 7 狄里克莱（Dirichlet）函数

$$y=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R=\{0,\ 1\}$. 这个函数的图形我们无法精确描绘，但这个函数有许多非常奇怪的性质，可以帮助我们更加深刻地理解微积分的概念. 函数图形大致如图 0-7 所示.

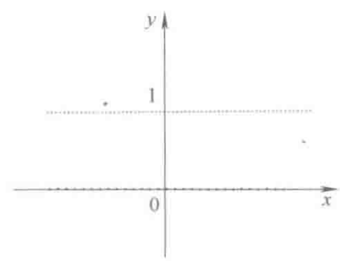

图 0-7

例 8 如图 0-8 所示，在原点与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN，试将直线 MN 左边阴影部分的面积 A 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 上点 x 的坐标位于区间 $[0,\ 1]$ 内，即 $x\in[0,\ 1]$ 时，$A=\dfrac{1}{2}x^2$.

当直线 MN 上点 x 的坐标位于区间 $(1,\ 2]$ 内，即 $x\in(1,\ 2]$ 时，

$$A=\frac{1}{2}\cdot1^2+(x-1)\cdot1=x-\frac{1}{2}$$

因此所求面积

$$A=A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & 0\leqslant x\leqslant1\\ x-\dfrac{1}{2} & 1<x\leqslant2\end{cases}$$

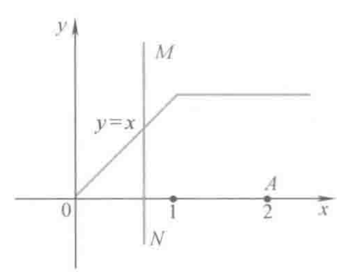

图 0-8

其定义域 $D=[0,2]$，值域 $R=\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

在科学技术和日常生活中，我们经常会遇到分段函数，例如出租汽车的计价问题，个人所得税的缴纳问题等，都需要用分段函数来表示.

例 9 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ x^2+2 & x<0\end{cases}$，试求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 和 $f(x-1)$.

解 根据分段函数的定义，有

$$f(-1)=(-1)^2+2=3$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1+1=2$$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+1 & x-1>0\\ 0 & x-1=0\\ (x-1)^2+2 & x-1<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x & x>1\\ 0 & x=1\\ x^2-2x+3 & x<1\end{cases}$$

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)-f(x-1)$.

解 先将 $x-1$ 替换 $f(x)$ 中的 x，得

$$f(x-1)=\begin{cases}0 & x-1<0\\ 1 & x-1\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

0 和 1 将 $f(x)$ 和 $f(x-1)$ 的定义域 $D=\mathbf{R}$ 分成了三部分：

当 $x<0$ 时，$f(x)-f(x-1)=0-0=0$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)-f(x-1)=1-1=0$.

当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)-f(x-1)=1-0=1$.

因此

$$f(x)-f(x-1)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0\leqslant x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$$

3. 参数方程

函数 $y=f(x)$ 在平面上表示一条曲线，若曲线上点（x，y）的两个坐标都可以表示成变量 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$$

则上式也是这条曲线的方程，称为曲线的**参数方程**，其中 t 是参数. 参数方程是函数的另一种表示方式.

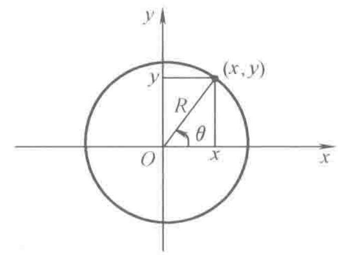

图 0-9

例 11 圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$，若选取 θ 为参数，其中 θ 为点（x，y）和（0，0）点的连线与 x 轴正向的夹角（见图 0-9），则圆的方程可以表示为

$$\begin{cases}x=R\cos\theta\\y=R\sin\theta\end{cases}\qquad \theta\in[0,\ 2\pi]$$

这就是圆的参数方程.

例 12 函数 $y=\sin\sqrt{x-1}$，若取参数 $t=\sqrt{x-1}$，则

$$\begin{cases}x=t^2+1\\y=\sin t\end{cases}\quad t\in[0,\ +\infty)$$

就是 $y=\sin\sqrt{x-1}$的参数方程.

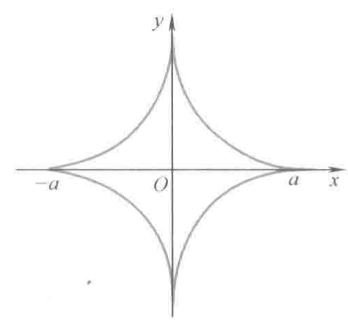

图 0-10

例 13 参数方程$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$ （$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$a>0$）表示星形线（见图 0-10）.

例 14 一轮子沿一直线无滑动地滚动，求轮子上一定点的轨迹（见图 0-11）.

解 设开始时定点与直线接触，取该点为坐标原点，直线为 x 轴. 设轮子的半径为 a，当轮子向前滚动时，定点就在平面上画出一条曲线. 当轮子滚过一圈时，定点又与直线相接触，并在平面上画出曲线的一拱. 以后轮子每滚动一圈，都画出同样形状的一拱曲线. 由周期性，只需要求出第一拱曲线的参数方程.

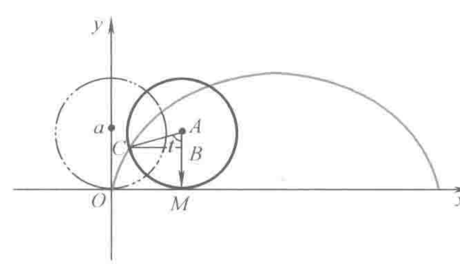

图 0-11

取半径转过的角度 t 为参数，定点 C 的坐标为（x，y），即要求出 x，y 随 t 的变化规律. 为此，过圆心 A 作 x 轴的垂线 AM，过 C 作 AM 的垂线 CB，由图 0-11 看出

$$x=OM-CB$$

$$y = AM - AB$$

因轮子无滑动，所以 $OM = \overset{\frown}{CM}$，从而有

$$\begin{aligned} x &= OM - CB \\ &= at - a\sin t = a(t - \sin t) \end{aligned}$$

$$y = AM - AB = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$$

即

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

式中，t 为参数（$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$），这就是曲线的参数方程.

我们称这条曲线为**旋轮线**，又称为**摆线**.

图　0-12

4. 极坐标系及极坐标方程

如图 0-12 所示，在平面上给定一个定点 O，从定点引一条固定的射线 OP，同时规定一个长度单位和一个固定的角度的转向作为正向（通常取逆时针方向为正向），这样就建立了一个**极坐标系**. 定点 O 称为**极点**，固定的射线 OP 称为**极轴**.

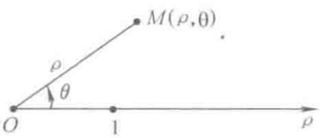

图　0-13

设 M 点为极坐标系中任意的一点，如图 0-13 所示，称点 O 与点 M 间的距离 $|OM| = \rho$ 为 M 点的**极径**，称由极轴到 OM 的转角 θ 为 M 点的**极角**，称有序数对（ρ，θ）为 M 点的**极坐标**. 一般地，在极坐标系下，M 点对应着无穷多个极坐标（ρ，$\theta + 2k\pi$），$k \in \mathbf{Z}$，如图 0-14.

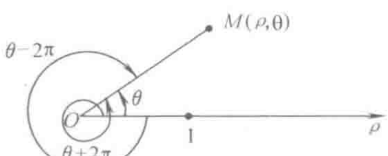

图　0-14

当 M 点为极点时，它的极坐标（ρ，θ）中的 $\rho = 0$，θ 可以取任意值.

如果限定 $\rho \geqslant 0$，$0 < \theta \leqslant 2\pi$，则除极点外，平面内的点可以和有序数对（$\rho$，$\theta$）建立一一对应关系.

在平面上，直角坐标系和极坐标系之间是可以相互转化的. 如图 0-15 所示，如果我们将两个坐标系按下述条件重合在一起：

（1）极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合.

（2）极坐标系的极轴与直角坐标系的 x 轴正向重合.

（3）极坐标系与直角坐标系的长度单位相同.

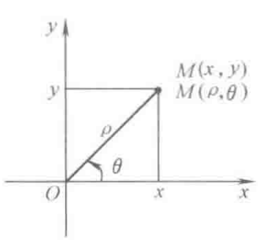

图　0-15

设 M 点是平面上的任一点，M 点的直角坐标为(x，y)，极坐标为（ρ，θ），则有关系式

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

或
$$\begin{cases}\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}\end{cases}$$

θ 的取值与点 $M(x, y)$ 的具体位置有关.

(1) 当 (x, y) 位于右半平面时，$\theta = \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

(2) 当 (x, y) 位于左半平面时，$\theta = \arctan\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

(3) 当 (x, y) 位于 y 轴正半轴时，$\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

(4) 当 (x, y) 位于 y 轴负半轴时，$\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$；

(5) 当 $(x, y) = (0, 0)$ 时，θ 任意.

平面上的曲线方程除了用直角坐标表示外，还可以用极坐标来表示. 例如，在极坐标系中，

$\rho =$ 常数，表示以原点为圆心，以该常数为半径的圆.

$\theta =$ 常数，表示与 x 轴正向夹角为 θ 的一条射线.

例 15 极坐标方程 $\rho = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 表示心形线（见图 0-16).

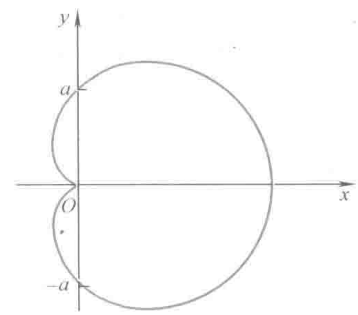

图 0-16

图形的描绘可以这样来考虑，取 θ 的一个周期 $[0, 2\pi]$，当 θ 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，ρ 从 $2a$ 变到 a；当 θ 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到 π 时，ρ 从 a 变到 0；当 θ 从 π 变到 $\dfrac{3}{2}\pi$ 时，ρ 从 0 变到 a；当 θ 从 $\dfrac{3}{2}\pi$ 变到 2π 时，ρ 则从 a 变到 $2a$.

例 16 极坐标方程 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta(a>0)$ 表示的图形是双纽线（见图 0-17).

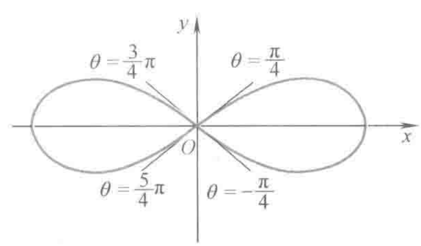

图 0-17

由 $\cos 2\theta = \dfrac{\rho^2}{a^2}$ 知，$\cos 2\theta \geqslant 0$，解得 $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$，或 $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$，所以双纽线的图形在射线 $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ 与 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$，以及 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ 与 $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$ 之间，并与之相切.

利用直角坐标与极坐标的关系可得，双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta(a>0)$