



普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主 编 郑德印

副主编 何颖俞 王 莉 刘春晓



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

主 编 郑德印

副主编 何颖俞 王 莉 刘春晓



本书资源操作说明

北京邮电大学出版社

• 北京 •

内 容 简 介

本书根据杭州师范大学“高等数学 C”课程教学大纲和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学三考试大纲》的内容和要求编写而成。

本书包括九章内容:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数和微分方程。

本书在保证内容的系统性和完整性的基础上,注重高等数学在经济、金融和管理等专业上的应用,强调高等数学在解决问题时的思路、方法和过程,注意培养学生的数学素质和运用数学的能力。在编写过程中力求内容由浅入深、通俗易懂、重点突出,以更好地适应教学的实际需要。

本书可以作为高等学校经济、金融、管理、营销、电子商务和医学等专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 郑德印主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2018.8

ISBN 978-7-5635-5572-7

I. ①高… II. ①郑… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 183862 号

书 名	高等数学
主 编	郑德印
责任编辑	沙一飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社 址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010 62282185(发行部) 010-82333009 62283578(传真)
网 址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经 销	各地新华书店
印 刷	北京泽宇印刷有限公司
开 本	787 mm×1 092 mm 1/16
印 张	20
字 数	509 千字
版 次	2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5572-7

定价: 49.00 元

如有质量问题请与发行部联系
版权所有 侵权必究

前 言

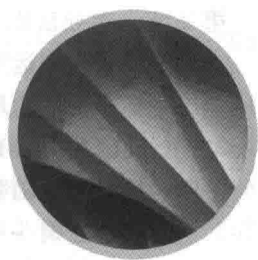
本书依据杭州师范大学“高等数学 C”课程教学大纲编写,适用于经济、金融、管理、营销、电子商务、医学等专业,内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数和微分方程.综合各专业的需求,在内容上进行了适当取舍,避免了偏多、偏深的弊端.考虑到目前高等数学教学课时普遍减少和学生数学学习的实际情况,我们在编写过程中尽力做到内容上难易适中,叙述上简明扼要、深入浅出,对于概念的引入尽量使用学生易于接受的方式,略去某些艰深难懂的定理证明,代之以几何解释或例题说明,这样便于学生的理解和掌握.我们的理念是不仅要讲清楚数学概念,更重要的是分析其蕴含的数学思想和计算方法以及应用,为此我们配置了大量的难易适度的例题和习题,通过这些题目的练习以提高学生的数学素质和解决问题的能力.此外,我们还参考了近几年的《全国硕士研究生入学统一考试数学三考试大纲》,为考研的学生留下了进一步努力的空间.对标示“*”号的内容,根据专业情况可以选讲,这些内容略去不讲也不会影响教材的系统性.

本书由杭州师范大学理学院数学系四位一线教师共同编写而成,具体分工如下:郑德印编写第 1~3 章并统稿全书,何颖俞编写第 4 章和第 8 章,王莉编写第 5 章和第 6 章,刘春晓编写第 7 章和第 9 章.

在本书出版之际,谨向关心和支持本书编写工作的杭州师范大学理学院领导、数学系领导和北京邮电大学出版社表示衷心的感谢!虽然我们希望编写一本高质量的适合当前教学实际需要的教材,但限于水平,书中仍有不少未尽人意之处,敬请读者不吝指正.

编 者
2018 年 7 月 29 日

CONTENTS 目录



第1章 函数 1

第1节 函数的概念及其基本性质 2

一、集合及其运算 2

二、区间与邻域 3

三、函数的概念 3

四、复合函数和反函数 4

五、函数的几种特性 8

第2节 初等函数 11

一、基本初等函数 11

二、初等函数 14

*第3节 经济学中常见的函数 16

一、成本函数 16

二、收益函数 16

三、利润函数 16

四、需求函数与供给函数 17

习题1 18

第2章 极限与连续 20

第1节 数列的极限 21

一、数列的概念 21

二、数列的极限 22

三、数列极限的性质及收敛准则 25

第2节 函数的极限 29

一、当自变量趋于无穷大时函数的
极限 29

二、当自变量趋于有限值时函数的
极限 30

三、函数极限的性质 33

第3节 无穷小量与无穷大量 34

一、无穷小量 34

二、无穷大量 37

第4节 函数极限的运算 39

一、极限的运算法则 39

二、复合函数的极限 42

第5节 两个重要极限 43

一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 43

二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 45

第6节 无穷小量的比较 47

一、无穷小量的比较 47

二、等价无穷小量代换 48

*第7节 极限在经济学中的应用 50

第8节 函数的连续性 52

一、函数连续性的概念 52

二、函数的间断点及其分类 54

三、连续函数的基本性质 57

四、初等函数的连续性 58

第9节 闭区间上连续函数的性质 60

习题2 63

第3章 导数与微分 67

第1节 导数的概念 68

一、引例 68

二、导数的定义 69

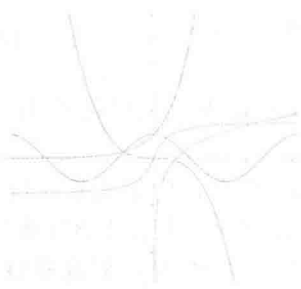
三、求导数举例 70

四、单侧导数 72

五、导数的几何意义	73	二、函数的极值	122
六、可导与连续的关系	74	第5节 最值问题	126
第2节 求导法则	75	一、闭区间上连续函数的最大值和 最小值	126
一、函数四则运算的求导法则	75	二、实际最值问题举例	127
二、复合函数的求导法则	77	* 三、经济学中的最值问题举例	129
三、反函数的求导法则	79	第6节 曲线的凸性、拐点及渐近线	133
四、基本初等函数的导数公式和 求导法则	80	一、曲线的凸性、拐点	133
五、隐函数的求导法则	81	二、曲线的渐近线	136
六、对数求导法	82	* 三、函数图形的描绘	139
七、参数方程的求导法则	83	习题4	141
第3节 高阶导数	84	第5章 不定积分	144
第4节 微分及其运算	87	第1节 不定积分的概念与性质	145
一、微分的概念	87	一、不定积分的概念	145
二、微分与导数的关系	88	二、基本积分公式	146
三、微分的几何意义	90	三、不定积分的性质	148
四、微分的运算法则	91	第2节 换元积分法	151
* 第5节 导数与微分在经济学中的 应用	93	一、第一类换元法	151
一、边际分析	93	二、第二类换元法	156
二、弹性分析	94	第3节 分部积分法	161
三、增长率	96	第4节 几种特殊类型函数的积分	165
习题3	98	一、有理函数的积分	165
第4章 微分中值定理与导数的应用	103	二、三角函数有理式的积分	169
第1节 微分中值定理	104	三、简单无理函数的积分	172
一、罗尔定理	104	习题5	173
二、拉格朗日中值定理	105	第6章 定积分	177
* 三、柯西中值定理	108	第1节 定积分概念	178
第2节 洛必达法则	109	一、定积分问题举例	178
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	109	二、定积分定义	180
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	111	三、定积分的几何意义	181
三、其他未定式	113	四、定积分的性质	183
* 第3节 泰勒公式	115	第2节 微积分基本公式	186
一、泰勒公式	115	一、积分上限函数及其导数	186
二、几个函数的泰勒公式	118	二、微积分基本公式	190
第4节 函数的单调性与极值	120	第3节 定积分的换元积分法	191
一、函数的单调性	120	第4节 定积分的分部积分法	196
		第5节 广义积分初步	198
		一、无穷区间上的广义积分	198

二、无界函数的广义积分	201	三、二重积分的计算	252
* 三、 Γ 函数	203	习题 7	259
第 6 节 定积分的应用	204	第 8 章 无穷级数	263
一、建立定积分数学模型的微元法 ..	204	第 1 节 数项级数的概念和性质	264
二、定积分的几何应用	204	一、数项级数及其敛散性	264
* 三、经济应用问题	210	二、数项级数的基本性质	266
习题 6	213	三、数项级数收敛的必要条件	267
第 7 章 多元函数微积分	219	第 2 节 正项级数及其敛散性判别法	268
第 1 节 空间直角坐标系与多元		第 3 节 任意项级数	273
函数的概念	220	一、交错级数	273
一、空间直角坐标系	220	二、绝对收敛与条件收敛	275
二、空间曲面及其方程	222	第 4 节 幂级数	277
三、空间曲线及其方程	226	一、函数项级数的一般概念	277
四、多元函数的概念	226	二、幂级数及其敛散性	278
第 2 节 二元函数的极限与连续性 ..	228	三、幂级数的运算	281
一、二元函数的极限	228	第 5 节 函数的幂级数展开	284
二、二元函数的连续性	229	* 一、泰勒级数	284
第 3 节 偏导数与全微分	231	二、初等函数的幂级数展开式	285
一、偏导数	231	习题 8	288
二、高阶偏导数	234	第 9 章 微分方程	291
三、全微分	235	第 1 节 微分方程的基本概念	292
第 4 节 多元复合函数与隐函数的		第 2 节 一阶微分方程	294
微分法	238	一、可分离变量的方程	294
一、多元复合函数的微分法	238	二、齐次微分方程	296
二、全微分形式不变性	241	三、一阶线性微分方程	298
三、隐函数的微分法	242	* 第 3 节 可降阶的二阶微分方程	301
第 5 节 二元函数的极值	244	第 4 节 二阶常系数线性微分方程 ..	304
一、二元函数的极值	244	一、二阶线性齐次微分方程的解 ..	304
二、条件极值和拉格朗日乘数法 ..	247	二、二阶线性非齐次微分方程的解 ..	307
第 6 节 二重积分	249	习题 9	311
一、二重积分的概念与性质	250		
二、二重积分的性质	252		

第1章 函数



本书的主要内容是微积分,它所关心的是运动和变化,其核心是研究变量的增量之间的变化关系,与初等数学相比它更关注变量的变化以及变与不变的矛盾,所以与初等数学有本质的不同。

函数是反应变量之间的依赖关系的,它是高等数学研究的基本对象.本章将介绍函数、函数的特性、基本初等函数、初等函数和经济学中的常用函数等概念及相关知识.

第1节 函数的概念及其基本性质

本书主要是在实数范围内研究函数. 通常函数的定义域是一个实数集或区间, 所以在介绍函数概念之前先复习一下集合、区间和邻域等概念.

一、集合及其运算

一般地, 集合(简称集)是指具有某种确定性性质的对象的全体. 组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上, 用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素. 用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素, 读作“ a 属于 A ”; 用 $a \notin A$ (或 $a \notin A$) 表示 a 不是集合 A 中的元素, 读作“ a 不属于 A ”. 含有有限多个元素的集合称为有限集; 含有无限多个元素的集合称为无限集; 不含有任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$.

集合的表示方法有两种: 列举法和描述法. 列举法就是把集合中的所有元素一一列出来, 写在一个大括号内. 如 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ 等. 描述法就是在大括号内指明该集合中的元素所具有的确定性. 如 $C = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$, $D = \{x \mid \sin x = 0\}$ 等.

一般地, 用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集, 用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集, 用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, 用 $\mathbf{R}$ 表示实数集.

对于集合 A 和 B , 若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 即若 $a \in A$, 则 $a \in B$, 这时就称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subseteq B$, 读作“ A 含于 B ”(或“ B 包含 A ”). 若 $A \subseteq B$, 且存在 $b \in B$, 使得 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的一个真子集, 记作 $A \subset B$.

规定: 空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素, 反过来, B 中的元素也都是 A 中的元素, 即 A 与 B 中的元素完全一样.

设 A, B 是两个集合, 称集合 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 即 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则:

定理 1

(集合运算律) 设 A, B, C 为三个集合, 则

(1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$; (交换律)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (结合律)

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
(分配律)

(4) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$; (幂等律)

(5) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; (同一律)

(6) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$. (吸收律)

特别地, 由于 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, 所以有, $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.

二、区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 记 $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为开区间; 记 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为闭区间; 记 $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左闭右开区间; 记 $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左开右闭区间; a, b 分别称为区间的左端点和右端点.

另外, 记 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$, $(a, +\infty) = \{x | a < x, x \in \mathbf{R}\}$, 等等.

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 记 $U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 称为 x_0 的 δ 邻域, 其中 x_0 称为这个邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 易知,

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

记 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 称为 x_0 的去心 δ 邻域. 左半区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域, 右半区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

若不想强调邻域半径 δ 的值, 而只想说明有 x_0 的邻域或去心邻域存在, 则分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$.

三、函数的概念

定义 1 设 D 为非空实数集, 若存在对应规则 f , 使得对任意的 $x \in D$, 按照对应规则 f , 都有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数, 简称函数. 实数集 D 称为 f 的定义域, 通常记作 D_f (或 $D(f)$). 对于每个 $x \in D_f$, 其对应值 y 称为函数 f 在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域, 记作 $f(D)$ 或 R_f (或 $R(f)$), 即

$$R_f = \{f(x) | x \in D_f\}.$$

注意 定义中的函数是 f , 它是一个对应规则. 这个对应规则给出了 D_f 中的每一个 x 所对应的实数 y , 所以 $f(x)$ (即 y) 是函数值, 是在对应规则 f 的规定下, x 所对应的那个值 y , 这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因, 我们习惯上也把 $f(x)$ (或 y) 称为 x 的函数, 称 x 为自变量, 称 y 为因变量.

由定义 1 可知, 确定一个函数需要确定其定义域和对应规则, 因此称定义域和对应规则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应规则都相同, 则称这两个函数相同, 否则就不是同一个函数.

函数的表示法一般有三种: 表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点, 表格法一目了然; 图像法直观形象; 解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例 1 求 $\varphi(x) = \ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x) = 2\ln \arcsin x$ 的定义域, 并判断它们是否为同一个函数.

解 我们知道, 对于用解析式表示的函数 $f(x)$, 若其定义域未给出, 则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的 x 的取值范围. 因此, 要使 $\varphi(x)$ 有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin x \neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

故 $D(\varphi) = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

要使 $g(x)$ 有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x > 0, \end{cases}$$

故 $D(g) = (0, 1]$. 由于 $D(\varphi) \neq D(g)$, 可见 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x^2+1, & x \geq 0, \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, 并作函数图形.

解 这是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数, 在定义域的不同部分上, 函数的表达式不同, 这种函数称为分段函数. 当 $x < 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x-1$ (即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$), 而当 $x \geq 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x^2+1$ (即用 x^2+1 来计算 $f(x)$). 所以

$$f(-1) = (-1) - 1 = -2,$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

函数图形可分段描绘, 并注意空心点和实心点的区别 (见图 1-1).

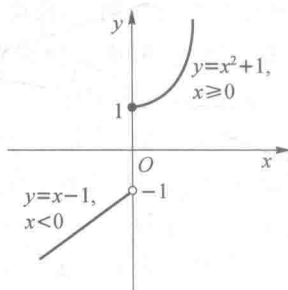


图 1-1

四、复合函数和反函数

1. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X , 且其值域 $\varphi(X) \subseteq U$, 则 y 能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为对于任给的 $x \in X$, 由于 u 是 x 的函数, 由对应规则 φ 这个 x 可确定唯一的 u 与之对应, 又由于 y 是 u 的

函数,对这个由 x 所确定的 $u = \varphi(x) \in \varphi(X) \subseteq U$,由对应规则 f 又可确定唯一的一个 y 与 u 对应,即 $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$,由函数定义知, y 是 x 的函数.其函数关系式可将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中得到: $y = f[\varphi(x)]$,称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数,定义域为 X .

例+

例 3 设 $y = f(u) = \ln u, u = \varphi(x) = \sin x$,则它们构成的复合函数为 $y = f(\varphi(x)) = \ln \sin x$.

可见,若给出两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$,要求复合函数只需作代入运算即可.但应注意,并非任何两个函数都能构成复合函数.

例+

例 4 设 $y = f(u) = \ln(u-2), u = \varphi(x) = \sin x$,问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f[\varphi(x)]$?

解 将 $u = \sin x$ 代入到 $y = \ln(u-2)$ 中,得 $y = \ln(\sin x - 2)$,由于 $-1 \leq \sin x \leq 1, \sin x - 2 < 0$,故函数的定义域为空集,所以不能构成复合函数.

由例 3 和例 4 可知,要使 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f[\varphi(x)]$,关键是要保证代入后的函数式要有意义,或者说要保证 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y = f(u)$ 的定义域内,于是,我们有

定义 2 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U ,而 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X ,值域为 $\varphi(X)$,且 $U \cap \varphi(X) \neq \emptyset$,则 y 通过变量 u 成为 x 的函数,称它为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数,记作 $f[\varphi(x)]$, u 称为中间变量.

例+

例 5 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $\varphi(x)$ 代替,得

$$f[\varphi(x)] = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$

同理,

$$\varphi[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+2x^2}}.$$

2. 反函数

在研究两个变量的函数关系时,可以根据问题的需要,选定其中一个为自变量,那么另一个就是因变量或函数.例如,在圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中,圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化的,或者说任给一个 $r > 0$,都有唯一确定的 S 与之对应,

因此 S 是 r 的一个函数, r 是自变量, S 是因变量. 但如果是要由圆面积 S 的值来确定半径 r , 则可从 $S = \pi r^2$ 中解出 r , 得 $r = \sqrt{S/\pi}$. 可见 r 是随 S 的变化而变化的, 或者说, 任给一个 $S > 0$, 都有唯一确定的 r 与之对应, 按函数定义, r 是 S 的函数, 这时自变量为 S , 而 r 为因变量. 我们称 $r = \sqrt{S/\pi}$ 为 $S = \pi r^2$ 的反函数.

定义 3 设 $y = f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 $Y = \{f(x) | x \in X\}$, 且 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 此时, 对任意的 $y \in Y$, 必存在唯一确定的 $x \in X$ 满足 $y = f(x)$, 换言之, 对 Y 中的任何一个 y , 通过函数关系式 $y = f(x)$, 可以反解出唯一的一个 x , 使得 y 与这个 x 相对应, 根据函数定义, x 是 y 的函数. 这个函数的自变量是 y , 因变量是 x , 定义域是 Y , 值域是 X , 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

显见, 若 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 则 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数, 即它们互为反函数. $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域. 并且不难知道 $f^{-1}[f(x)] = x, x \in X; f[f^{-1}(y)] = y, y \in Y$.

注意到在 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量, 但我们习惯于用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此, 反函数 $x = f^{-1}(y), y \in Y$ 常记作 $y = f^{-1}(x), x \in Y$. 相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

关于反函数还有一些常用结论:

(1) 函数 $y = f(x)$ (定义域为 X , 值域为 Y) 存在反函数 $y = f^{-1}(x) (x \in Y)$ 的充要条件是对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 那么 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) 若函数 $y = f(x), x \in X$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则在同一直角坐标系 xOy 中, $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形关于直线 $y = x$ 对称.

这是因为若点 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点, 即 $b = f(a)$, 由反函数定义知, $a = f^{-1}(b)$, 因此点 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点; 反之, 若点 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点, 则 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 的函数图形上的点. 因点 $P(a, b)$ 与 $Q(b, a)$ 关于直线 $y = x$ 对称 (即直线 $y = x$ 垂直平分线段 PQ), 故上述结论 (2) 正确 (见图 1-2).

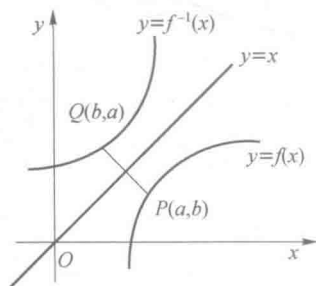


图 1-2

例6

求下列函数的反函数:

(1) $y=2^x+1$;

(2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1\leq x<0, \\ x^2+1, & 0\leq x\leq 2. \end{cases}$

解 (1) 由 $y=2^x+1$ 得 $2^x=y-1$, 两边取对数得

$$x=\log_2(y-1).$$

交换 x, y , 得反函数

$$y=\log_2(x-1), \quad x>1.$$

(2) 当 $-1\leq x<0$ 时, 由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 得

$$x=-\sqrt{1-y^2}, \quad 0\leq y<1.$$

当 $0\leq x\leq 2$ 时, 由 $y=x^2+1$ 得

$$x=\sqrt{y-1}, \quad 1\leq y\leq 5.$$

于是, 有

$$x=\begin{cases} -\sqrt{1-y^2}, & 0\leq y<1, \\ \sqrt{y-1}, & 1\leq y\leq 5. \end{cases}$$

交换 x, y , 得反函数

$$y=\begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & 0\leq x<1, \\ \sqrt{x-1}, & 1\leq x\leq 5. \end{cases}$$

3. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$. 对任意 $y\in[-1, 1]$, 有无穷多 x 与之相对应, 其图形如图 1-3 所示, 因此正弦函数在其定义域上没有反函数. 但是如果限定函数 $y=\sin x$ 的定义域为单调区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 如图 1-4(a) 所示, 那么 x 和 y 一一对应, 反函数就存在.

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数称为反正弦函数, 记为 $y=\sin^{-1}x$, 或 $y=\arcsin x$, 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 图形如图 1-4(b) 所示.

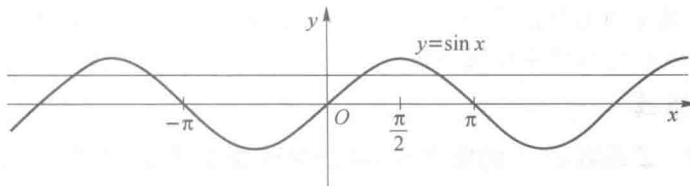


图 1-3

反函数与
反三角函数

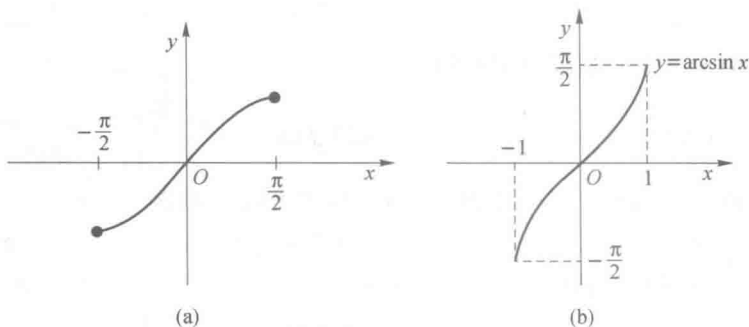


图 1-4

类似地,余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数称为反余弦函数,记为 $y = \cos^{-1} x$, 或 $y = \arccos x$, 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 图形如图 1-14(b) 所示.

正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数称为反正切函数, 记为 $y = \tan^{-1} x$, 或 $y = \arctan x$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 图形如图 1-15(a) 所示.

余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的反函数称为反余切函数, 记为 $y = \cot^{-1} x$, 或 $y = \operatorname{arccot} x$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 图形如图 1-15(b) 所示.

五、函数的几种特性

1. 单调性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$,

(1) 若有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调递增的;

(2) 若有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调递减的.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数, 区间 I 称为单调增(或减)区间. 当上述等号为严格不等号时, 分别称为严格单调递增和严格单调递减.

例如, $y = x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是单调递增函数, $y = x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内不是单调函数, 但 $(-\infty, 0]$ 是其单调减区间, $[0, +\infty)$ 是其单调增区间.

易见, 若 $f(x)$ 是 (a, b) 内的严格单调函数, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内存在反函数 $y = f^{-1}(x)$. 这是因为对任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则因 $f(x)$ 严格单调, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 故存在反函数.

2. 奇偶性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$), 对于任意的 $x \in D$,

(1) 若有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数;

(2) 若有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数.

显然, 奇函数的图形关于原点对称, 而偶函数的图形关于 y 轴对称, 如

图 1-5(a)与(b)所示.

例如, $y=x^{2k+1}$ (k 为整数) 为奇函数, $y=x^{2k}$ (k 为整数) 为偶函数. $y=\sin x$ 是奇函数, $y=\cos x$ 是偶函数, $y=C$ (C 为非零常数) 是偶函数, $y=0$ 既是奇函数也是偶函数, $y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

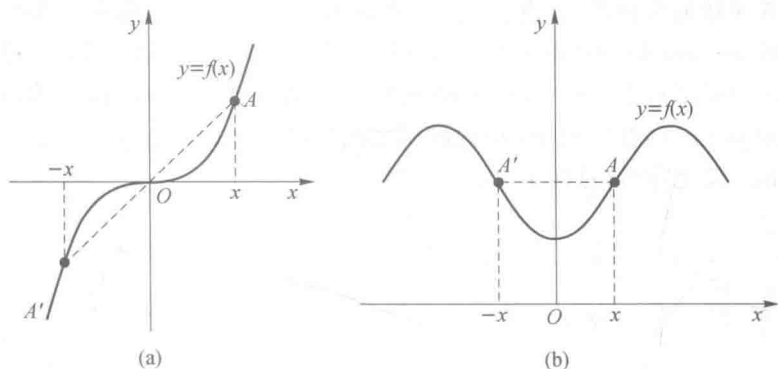


图 1-5

例 7

判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (2) $g(x)=x^2 \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解 (1) $f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
 $=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) $g(-x)=(-x)^2 \cdot \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=x^2 \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x),$

所以 $g(x)$ 是偶函数.

3. 有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 内有定义, 如果存在正数 M , 使得对任意的 $x \in D$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 D 内有界, 或称 $f(x)$ 在 D 内为有界函数, 否则称 $f(x)$ 在 D 内无界, 或称 $f(x)$ 在 D 内为无界函数.

定义 7 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 内有定义, 若存在数 A , 使得对任意的 $x \in D$, 都有

$$f(x) \leq A \quad (\text{或 } f(x) \geq A)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 D 内有上界 (或有下界), 也称 $f(x)$ 是 D 内有上界 (或有下界) 的函数. A 称为 $f(x)$ 在 D 内的一个上界 (或下界).

显然, 有界函数必有上界和下界; 反之, 既有上界又有下界的函数必是有界

函数,即函数在 D 内有界的充要条件是该函数在 D 内既有上界又有下界.

若 $f(x)$ 在 D 内有一个上界(或下界) A ,则对任何 $C > 0$, $A+C$ (或 $A-C$)都是 $f(x)$ 在 D 内的上界(或下界),可见, $f(x)$ 在 D 内的上界(或下界)有无穷多个.

有界函数的几何意义:设 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界,即存在 $M > 0$,使得对任意的 $x \in (a, b)$,有 $|f(x)| \leq M$,或 $-M \leq f(x) \leq M$. 注意到 $f(x)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的图形上点 $(x, f(x))$ 的纵坐标,因此, $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有界在几何上表示 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的函数图形必夹在两平行于 x 轴的直线 $y = \pm M$ 之间. 反之亦然(见图 1-6).

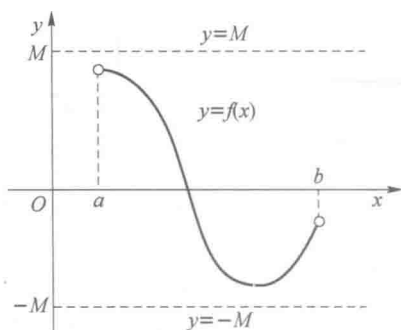


图 1-6

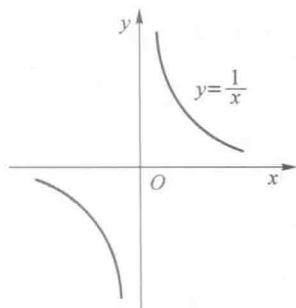


图 1-7

例如,由于 $|\sin x| \leq 1$,故 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 而 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界,这是因为虽然 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内有一个下界 0,但在 $(0, +\infty)$ 内 $y = \frac{1}{x}$ 无上界,所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界. 从几何上来看,因为 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的函数图形不能夹在任何两条平行于 x 轴的直线之间,所以, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界(见图 1-7).

4. 周期函数

定义 8 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,若存在常数 $T \neq 0$,使得对任意的 $x \in D(f)$,有 $x \pm T \in D(f)$,且 $f(x \pm T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

显然,若 T 是 $f(x)$ 的周期,则因 $f(x \pm 2T) = f[(x \pm T) \pm T] = f(x \pm T) = f(x)$,知 $2T$ 也是 $f(x)$ 的周期. 一般地,若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(x)$ 有无穷多个周期, kT ($k \in \mathbb{Z}$) 都是 $f(x)$ 的周期. 通常函数的周期是指它的最小正周期(如果存在的话).

例如 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 都是 $y = \sin x$ 的周期,而 2π 则是它的最小正周期.

并非所有的周期函数都有最小正周期. 如 $y = C$ (常数),任意 $T \neq 0$ 都是它的周期,但它没有最小正周期.