新世纪高等学校公共课重点建设教材

简明高等数学（上）习题全解指南

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

简明高等数学(上)
习题全解指南

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

简明高等数学(上)习题全解指南 / 王海敏主编.
— 杭州: 浙江工商大学出版社, 2018.9
ISBN 978-7-5178-2790-0

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 126910 号

简明高等数学(上)习题全解指南
王海敏 主编

责任编辑 吴岳婷
封面设计 林朦朦
责任印制 包建辉
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷 杭州恒力通印务有限公司
开　　本 787mm × 960mm 1/16
印　　张 30
字　　数 621 千
版 印 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5178-2790-0
定　　价 78.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88904970

前　　言

本书是王海敏主编的《简明高等数学》(浙江工商大学出版社2018年版)的配套用书。

本书按教材各章节顺序编排,每章内容由两部分组成:第一部分内容概要,主要是系统归纳总结这一章的基本概念、基本定理和基本方法,梳理知识结构;第二部分习题全解,与教材的习题一一对应进行详细解答,方便读者检查对所学内容的掌握程度,巩固学习效果。附录Ⅰ汇编了2003年至2017年全国研究生入学统一考试数学试题中高等数学部分的全部试题,按照函数与极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,多元函数积分学,无穷级数的顺序。每道试题的前面都注明了试题的年份、卷种和分值,如03104表示2003年数学一分值4分。附录Ⅱ给出了附录Ⅰ中每道试题的详细解答,有些在解答前分析了解题思路,使读者不仅能学到这个题的具体求解方法,而且能学到如何来分析这个题的求解过程。还有些在详细解答之后给出了评注,主要是对这类题型的解题方法作一个归纳总结,或指出其技巧点所在。

在这里我们建议,做题时,先自己想想,动手算一算,写出完整的解答过程,然后将自己所得出结果与书中的结果作比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么做错。如果还有不清楚的地方,可以与你的同学、老师研讨。如果用这样的态度和方法来阅读本书,不仅能提高你的解题能力,而且能使你更深刻地理解、掌握微积分的基本概念、基本理论和基本方法,习惯微积分的思维方式。

本书的第2、4、5、6、7章、附录Ⅰ、附录Ⅱ由王海敏执笔；第1、10章由袁中扬执笔；第3、8、9章由韩兆秀执笔，全书最后由王海敏统稿、定稿。

由于时间比较仓促，书中难免存在差错和欠缺，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编者

2018年6月于浙江工商大学

目 录
Contents

的图象是在区间 I 内下降的曲线.

注 函数的单调性是相对于区间而言的.一个函数可能在一个区间内单调,而在另外的区间内没有单调性;也可能在一个区间内单调增加,而在另外的区间内单调减少.

(2)有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $I \subset D$. 如果存在正数 M,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任一 $x \in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界;这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1 \in X$,使得 $|f(x_1)| > M$,那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

注 界 M 是不唯一的.所谓 $f(x)$ 有界,一定要指出 x 的一个变化范围及一个正数 M.

(3)奇(偶)函数

设 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 i 内有定义,若对于 I 内任意点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

(4)周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T,使得对 $\forall x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注 (i)对于周期函数的图象,只需关心它在一个周期内的图象,其他区间的图象可由平移得到.(ii)不是任何周期函数都有最小正周期,例如常值函数 $y=C$ 就没有最小正周期.

4.复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 Z_φ,若 $Z_\varphi \subseteq D_f$,则对于 $\forall x \in D_\varphi$,有 $u=\varphi(x)$ 与 x 对应,而 $u \in Z_\varphi \subseteq D_f$,故又有确定的 y 与 u 对应,对任意 $\forall x \in D_\varphi$,都有确定的 y 与 x 对应,按照函数的定义,确定了 y 是 x 的函数.此函数是通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系,因而,称此函数为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$.

若 $u=\varphi(x)$ 的值域 Z_φ 只有部分含在 $f(u)$ 的定义域 D_f 内,此时仍能确定复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,只不过这时它的定义域也只是 D_φ 的一部分.

注 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x-2$ 就不能复合.函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 能复合成一个复合函数的条件是 $Z_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$.

5. 反函数

设 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中的任意一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则此时按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

注 （ⅰ）$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 要注意的是，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象相同.（ⅱ）单调函数必定存在反函数，但函数的单调性质只是函数存在反函数的一个充分条件，并不是必要条件.

6. 基本初等函数和初等函数

(1) 基本初等函数

称以下六种函数为基本初等函数：

①常值函数　$y=C$（C 为常数）.

②幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为实数）.

③指数函数　$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

④对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记 $y=\ln x$）.

⑤三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$,
$y=\sec x, y=\csc x$.

⑥反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

二、数列的极限

1. 数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}$，如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也可记为 $x_n\to a(n\to\infty)$. 此时称数列 $\{x_n\}$ 收敛. 若 $\{x_n\}$ 的极限不存在，则称数 $\{x_n\}$ 发散.

注 （ⅰ）把 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 理解成"当 n 充分大后，x_n 越来越接近于 a"是不妥的. 因为"x_n 越来越接近于 a"一般理解为"$|x_n-a|$ 单调减少"，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则表示当 n 无限增大时，$|x_n-a|$ 趋于零. $|x_n-a|$ 单调减少不见得趋于零，而趋于零也不一定单调减少. 例如，当 n 充分大后，数列 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$ 越来越接近于 0，但 $x_n\not\to0$（$n\to\infty$）. 又如，数列 y_n

$= \frac{2+(-1)^n}{n} \to 0(n\to\infty)$，但 $|y_n - 0|$ 并非单调减少，不能说"y_n 越来越接近于0". 因此，应当说，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示"只要 n 充分大，x_n 与 a 就可以接近到预先任意给定的程度(即 $|x_n - a|$ 可以小于预先任意给定的正数 ε)."

(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 定义中的 N 与 ε 有关，但不能说 N 与 ε 之间存在函数关系. 因为对任意给定的 $\varepsilon > 0$，如果存在一个满足定义要求的 N_0，那么任何一个大于 N_0 的正整数 N 都可作为定义要求的 N，这就是说 N 的值并不是由 ε 的值唯一确定的，按照函数的定义，N 与 ε 之间不存在函数关系.

(ⅲ)从定义可以看出，数列是否有极限，只与它从某一项以后有关，而与它前面的有限个项无关. 因此，在讨论数列的极限时，可以添加、去掉或改变它的有限个项的数值，对数列的收敛性和极限都不会发生影响.

2. 数列极限的性质

(1)(极限的唯一性)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则极限唯一.

(2)(收敛数列的有界性)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则数列 $\{x_n\}$ 有界，即 $\exists M > 0$，使得对 $\forall n$ 均有 $|x_n| \leqslant M$.

(3)(收敛数列的保号性)①若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$(或 $a < 0$)，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$x_n > 0$(或 $x_n < 0$)；②若数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \geqslant 0$.

(4)(收敛数列与其子数列间的关系)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

注 证明数列发散的通常办法是找出它的一个发散子列或找出它的两个有不同极限的子列.

(5)(单调有界收敛准则)单调增加有上界或单调减少有下界的数列必有极限.

(6)(夹逼准则)对于数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，若 $\exists N$，当 $n > N$ 时满足 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

三、函数的极限

1. 当自变量趋于无穷时函数极限的定义

(1)如果对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，或 $f(x) \to A(x\to\infty)$.

(2)如果对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，或 $f(x) \to A(x\to+\infty)$.

(3)如果对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 是

$f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

2. 当自变量趋于某定点时函数极限的定义

(1) 如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

(2) 如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$,或 $f(x_0-0)$.

(3) 如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$,或 $f(x_0+0)$.

3. 无穷小的定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则称数列 $\{x_n\}$ 为当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

类似地,可定义当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

4. 无穷大的定义

如果对于 $\forall M>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地,可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$. 还可定义当 $x\to\infty$ 与 $n\to\infty$ 时的无穷大.

5. 函数极限的性质

(1)(唯一性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则极限唯一.

(2)(局部有界性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,使得 $f(x)$ 在此邻域内有界.

(3)(局部保号性)①若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则 $\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$). ②若 $f(x)\geqslant0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$.

(4)(极限与左、右极限的关系)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(5)(夹逼准则)若在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

以上有关函数极限的性质当 $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 时也有相应的形式.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$.

注 通过变量替换,这两个公式可写成更加一般的形式:设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1, \quad \lim_{x \to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}.$$

7. 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = AB$.

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立. 在数列极限的运算中也有完全类似的法则.

8. 无穷小阶的定义

设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, α 是比 β 高阶的无穷小,记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, α 是与 β 同阶的无穷小,记为 $\alpha = O(\beta)$. 特别地,当 $C=1$ 时,则称当 $x \to x_0$ 时,α 是与 β 等价的无穷小,记为 $\alpha \sim \beta$.

(4) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0, k > 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, α 是关于 β 的 k 阶无穷小,

类似地,可定义当 $x \to \infty$ 与 $n \to \infty$ 时的情形下的无穷小的阶.

9. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(4)在自变量的同一变换过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(5) β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

(6)设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

注　利用等价无穷小替换求极限时,可以将分子、分母整体或分子、分母中的乘积因子用其等价无穷小替换,但分子或分母中用"+""-"连结部分不宜分别用其等价无穷小替换.

10. 高阶无穷小的运算

当 $x \to 0$ 时,

(1) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l)$,其中 $l = \min\{m, n\}$.

(2) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$.

(3) $o(kx^m) = o(x^m)$,其中 $k \neq 0$ 是常数.

注　不能认为 $x \to 0$ 时,有 $\dfrac{o(x^m)}{o(x^n)} = o(x^{m-n})(m > n)$. 例如,$x \to 0$ 时,$x^3 = o(x^2)$,$x^4 = o(x)$,但 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4} = \infty$.

11. 常用等价无穷小替换

当 $x \to 0$ 时,

$\sin x \sim x$;　$\tan x \sim x$;　$\arcsin x \sim x$;　$\arctan x \sim x$;

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$;　$\ln(1 + x) \sim x\left(\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}\right)$;

$e^x - 1 \sim x(a^x - 1 \sim x\ln a)$;　$\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x\left[(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x\right]$;

$\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$;　$x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$.

四、函数的连续性

1. 函数连续的定义

(1)设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \text{ 即 } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续.

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 右连续;若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 左连续.

(3)若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续;若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,还在 $x=a$ 处右连续,在 $x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续.

2. 函数间断点的定义及分类

(1)若在 $x=x_0$ 处,$f(x_0)$ 无定义或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 间断,$x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的间断点.

(2)若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点,则有

①若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则称 $x=x_0$ 是可去间断点.

②若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,但不相等,则称 $x=x_0$ 是跳跃间断点.

③若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,则称 $x=x_0$ 是无穷间断点.

④若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,且当 $x\to x_0$ 时,函数值摆动,则称 $x=x_0$ 是振荡间断点.

上述间断点中,①②两类称为第一类间断点,③④两类称为第二类间断点.

3. 连续函数的运算性质

(1)若 $f(x)$,$g(x)$ 均在 $x=x_0$ 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 也在 $x=x_0$ 处连续.

(2)若 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,$y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,$f(u)$ 在 $u=a$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$.

(4)若 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续,则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在相应的区间 $I_y=\{x\mid x=f(y),\ y\in I_y\}$ 上单调且连续.

(5)基本初等函数在其定义域内连续.

(6)初等函数在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1)(有界性)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2)(最值性)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

(3)(介值性)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到介于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值与最小值之间的一切值.

(4)(零点定理)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

习题全解

习题1.1 函数

1. 判断下列各组中的函数是否相同？为什么？

(1) $y = x + 1$， $s = t + 1$.

解 相同.因为定义域和对应法则都相同.

(2) $y = x$， $y = \sqrt{x^2}$.

解 不相同.因 $y = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 与 $y = x$ 对应法则不同.

(3) $y = \ln x^2$， $y = 2\ln x$；

解 不相同.因 $y = \ln x^2$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$，而 $y = 2\ln x$ 的定义域为 $\{x \mid x > 0\}$.

(4) $y = 1$， $y = \sec^2 x - \tan^2 x$.

解 不相同.因 $y = 1$ 的定义域为全体实数，而 $y = \sec^2 x - \tan^2 x$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 4x}$.

解 由 $x^2 - 4x \neq 0$，解得 $x \neq 0$ 或 $x \neq 4$，故定义域为

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0, x \neq 4\}.$$

(2) $y = \lg(5 - x) + \lg(x - 3)$.

解 由 $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$，解得 $3 < x < 5$，故定义域为 $(3,5)$.

(3) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 由 $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0$，解得 $-1 \leq x < 1$，故定义域为 $[-1,1)$.

(4) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

解 由 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$，解得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$，故定义域为 $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

(5) $y = \arcsin(x - 3)$.

解 由 $-1 \leq x - 3 \leq 1$，解得 $2 \leq x \leq 4$，故定义域为 $[2,4]$.

(6) $y = e^{\frac{1}{x}}$.