



飞机设计技术丛书

“十二五”国家重点图书出版规划项目

AIRCRAFT CONTROL AND SIMULATION
SECOND EDITION

飞机控制与仿真

(第二版)

[美] 布赖恩·L. 史蒂文斯 (Brian L. Stevens)
弗兰克·L. 刘易斯 (Frank L. Lewis)

著

唐长红 等 译



WILEY

航空工业出版社

飞机控制与仿真

(第2版)

Aircraft Control and Simulation

[美] 布赖恩·L. 史蒂文斯 (Brian L. Stevens) 著
弗兰克·L. 刘易斯 (Frank L. Lewis)
唐长红 等 译



航空工业出版社

北京

内 容 提 要

本书先回顾了经典力学的有关内容, 结合对六自由度运动的透彻论述, 详细讨论用欧拉角和四元数法来表达飞行器的飞行姿态。模拟在地球上空或围绕地球的运动。通过对六自由度运动和空气动力影响的研究, 最终建立了两个飞机真实的非线性模型。然后, 通过建模和设计软件包来说明在仿真、控制理论、计算机辅助设计技术, 以及数值计算方法方面的许多理念。最后, 基于飞机状态空间模型, 应用转换域技术, 通过许多例题对经典传统控制设计进行说明。

本书适合于飞机设计人员及航空院校师生使用。

图书在版编目 (C I P) 数据

飞机控制与仿真: 第2版/(美)布赖恩·L. 史蒂文斯 (Brian L. Stevens), (美) 弗兰克·L. 刘易斯 (Frank L. Lewis) 著; 唐长红等译. --北京: 航空工业出版社, 2017. 7

(飞机设计技术丛书)

书名原文: Aircraft Control and Simulation (second edition)

ISBN 978-7-5165-1316-3

I. ①飞… II. ①布… ②弗… ③唐… III. ①飞机—设计 IV. ①V22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 218523 号

北京市版权局著作权合同登记

图字: 01-2012-6519

Translation from the English language edition:

Aircraft Control and Simulation (Second Edition) edited by Brian L. Stevens & Frank L. Lewis

ISBN 978-0-471-37145-8

Copyright © 2003 by John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. This translation published under license.

No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of the original copyrights holder

Copies of this book sold without a Wiley sticker on the cover are unauthorized and illegal

飞机控制与仿真 (第2版)

Feiji Kongzhi yu Fangzhen (Dierban)

航空工业出版社出版发行

(北京市朝阳区北苑2号院 100012)

发行部电话: 010-84936597 010-84936343

三河市华骏印务包装有限公司印刷

全国各地新华书店经售

2017年7月第1版

2017年7月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16

印张: 33.5

字数: 751 千字

印数: 1—2000

定价: 128.00 元

《飞机控制与仿真》

译 校 人 员

唐长红 郭圣洪 许云峰
席小宁 王立行 杨 戈

译者序

飞行控制是飞机设计的基础和重要内容。伴随着相关科学技术进步，飞机控制技术的发展不断扩展飞机的性能和飞机设计的范畴。电传飞行控制系统和主动控制技术的广泛应用，在改善现代飞机基本稳定性、操纵性和机动能力的同时，极大地提升了现代飞机的执行任务能力和环境适应能力。

本书从传统飞行力学和控制理论出发，通过建立与飞行控制仿真相适应的飞机模型和控制仿真模型，系统地阐述了现代飞机控制系统的设计原理和方法，深入浅出，由浅入深。针对工程设计实践可能的未建模高频动态，介绍了多变量频域技术和鲁棒性设计方法，并对飞机控制系统实现的数字控制基础做了简要概述。

全书以两个数字仿真飞机模型为主线，列举大量例题，串通典型专题，并附相关程序代码和有强启发性的习题，非常有助于学习者循序渐进地思考，逐步深入地掌握理论方法和设计技巧。无论对学生还是航空工程师都是一部很好的学习教材和设计参考资料。

对翻译中可能存在的错误或不当之处，诚请读者批评指正。

献给迪恩、比尔及理查德

——布赖恩·L. 史蒂文斯

献给我的儿子，克里斯及罗马

——弗兰克·L. 刘易斯

第2版前言

本书主要针对航空工程专业高年级或研究生水平的学生而编写。同时，我们也希望本书对于从事具体工作的工程技术人员有所帮助，可以作为他们的参考资料，也可以用作工程教育的最新教材。

论述航空器仿真之前，为了描述清晰和统一起见，我们回顾经典力学的有关内容，结合对六自由度运动的透彻论述，详细讨论用欧拉角和四元数法来表达飞行器的飞行姿态。模拟在地球上空或围绕地球的运动，需要了解大地测量学和地球引力，对于这些专题，在 WGS-84 数据构架上进行详细介绍。从事航空工业的工程师必须掌握这些内容。具备了这方面背景知识的学生，就可以独立进行六自由度运动仿真，并从中学到知识。

在地球大气层中高速运动会受到空气动力和力矩的影响。我们对气动力模型进行回顾，提供了真实飞机气动力和力矩的许多生动示例。同时还对气动力和力矩的小扰动理论进行了详细介绍。本书通过对六自由度运动和空气动力影响的研究，最终建立了两个飞机真实的非线性模型，作为后续设计与仿真的例题。

根据这些模型，我们给出了利用 MATLAB 和 Fortran 语言编写的用以进行仿真和设计的计算机程序。通过建模和设计软件包来说明在仿真、控制理论、计算机辅助设计技术，以及数值计算方法方面的许多理念。这些设计例题很容易扩展，以适用于各类学者。

在进行反馈控制设计之前，我们回顾了线性系统理论，包括拉普拉斯变换、传递函数，以及状态空间表达方式。传递理论通过考察极点和零点来研究动态系统，有许多方便的图形化设计方法和根轨迹设计技术，而状态空间技术非常适用于计算机辅助设计，我们试图在这两种表达方式之间实现“无缝”过渡。

我们基于飞机状态空间模型，应用转换域技术，通过许多例题对经典传统控制设计进行说明。在之后几章里，直接使用状态空间模型进行现代控制设计。

最后，我们注意到，本书所选择的专题受到我们在制导、导航与控制领域经验的影响。航空工业工程师中从事飞行控制系统设计的人很少，而

从事此项设计为数不多的工程师在其职业生涯中也只能设计两三个飞行控制系统。相反，他们会参与其他许多项目，在这些项目中，对经典力学、动力学、坐标转换、大地测量学，以及导航技术的掌握非常重要。建模和模拟的重要性不管多么强调都不为过，毕竟在硬件建设之前，建立数学模型和数字仿真要花费大量经费。

本书的第一作者想要感谢佐治亚理工学院航空工程的同仁们的无私帮助，感谢教务长查尔斯·L. 利奥塔、J. V. R. 普拉萨德教授及 E. N. 约翰逊阅读手稿，并提出了非常有用的建设性建议。C. V. 史密斯提供了大量的帮助，在第1章中，C. V. 史密斯教授花费了大量的时间与我们进行有意义的讨论。同时也感谢佐治亚理工学院 B. H. 哈德森提供了计算机支持。两位作者感谢约翰·威利逊 (John Wiley & Sons) 公司员工的辛勤工作。

佐治亚理工学院 布赖恩·L. 史蒂文斯
得克萨斯大学阿灵顿分校 弗兰克·L. 刘易斯

目 录

第 1 章 飞机运动学和动力学	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 矢量运动学	(2)
1.3 运动学矩阵分析	(13)
1.4 测地学、地球重力及地文导航	(23)
1.5 刚体动力学	(29)
1.6 小结	(37)
第 2 章 飞机建模	(42)
2.1 引言	(42)
2.2 空气动力学基础	(42)
2.3 飞机的力和力矩	(51)
2.4 静态分析	(71)
2.5 非线性飞机模型	(77)
2.6 线性模型和稳定性导数	(83)
2.7 小结	(100)
第 3 章 建模、设计和仿真工具	(104)
3.1 引言	(104)
3.2 状态空间模型	(105)
3.3 传递函数模型	(113)
3.4 状态方程的数值解	(124)
3.5 飞机仿真模型	(132)
3.6 稳定状态飞行	(139)
3.7 数值线化	(151)
3.8 飞机动力学特性	(157)
3.9 反馈控制	(163)
3.10 小结	(184)
第 4 章 飞机动力学与经典控制设计	(192)
4.1 引言	(192)
4.2 飞机刚体模态	(198)
4.3 操纵品质要求	(211)

4.4	增稳	(220)
4.5	控制增稳系统	(235)
4.6	自动驾驶仪	(250)
4.7	非线性仿真	(269)
4.8	小结	(295)
第5章	现代设计技术	(301)
5.1	引言	(301)
5.2	闭环动力学的配置	(304)
5.3	带输出反馈的线性二次调节器	(316)
5.4	指令跟踪	(330)
5.5	修正性能指标	(341)
5.6	模型跟随设计	(363)
5.7	全状态反馈的线性二次型设计	(375)
5.8	动态逆设计	(380)
5.9	小结	(394)
第6章	鲁棒性及多变量频域技术	(402)
6.1	引言	(402)
6.2	多变量频域分析	(403)
6.3	鲁棒输出反馈设计	(421)
6.4	观测器和卡尔曼滤波器	(424)
6.5	线性二次型高斯/回路传递恢复	(444)
6.6	小结	(463)
第7章	数值控制	(470)
7.1	引言	(470)
7.2	数字控制器仿真	(470)
7.3	连续控制器的离散化	(473)
7.4	修正连续设计	(482)
7.5	实现问题	(491)
7.6	小结	(497)
附录A	F-16飞机模型	(500)
附录B	软件	(510)
B1	飞机稳态配平程序	(510)
B2	数字线性化子程序	(515)
B3	龙格-库塔积分	(520)
B4	输出反馈设计	(521)

第 1 章 飞机运动学和动力学

1.1 引言

本章旨在建立刚体飞机在旋转扁圆地球上空飞行的运动方程，而将飞机在无旋转、平板地球上空、受恒定重力（gravity）作用的小范围运动作为一种特例。为此，我们应用经典力学矢量分析方法建立运动方程，采用矩阵代数描述坐标系运算，利用大地测量学、重力及导航方面的概念，说明地球形状及质量引力（mass attraction）的影响。

除地球引力外，在第 2 章之前我们还将介绍作用在飞行器上的力和力矩。恰当地建立力和力矩模型，就可以利用这些模型的方程描述各种空间飞行器（包括地球卫星）的运动。由于刚体不存在任何结构挠性，故假设飞行器上所有的点始终保持不变的相对位置。这一假设对大多数情况下的飞行模拟已经足够了。如果不考虑飞机结构模态控制或气动载荷减缓，这种假设对于飞行控制系统设计也是足够的。

学者往往对于处理运动方程所必需的矢量分析感到困难，特别是角速度矢量概念。因此，首先回顾一些相关专题，在某些情况下，超越了飞行力学（flight mechanics）的传统处理方法。例如，考虑到在模拟和控制方面的“全姿态”能力和数字化优势，引入了四元数法，该方法目前广泛用于仿真、机器人、制导及导航计算、姿态控制以及动画制作。同时，我们还介绍大地测量学（处理地球形状的数学分支）、重力（地球的质量引力）以及导航知识。由于现代飞机可以在非常的高度长距离自主飞行，所以有必要对这类飞行器进行导航模拟。

运动方程式（简称方程或式）可表达为导数显式的一阶微分方程组。对于 n 个独立变量 X_i 和 m 个控制输入 U_i ，运动方程的一般形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n; U_1, \dots, U_m) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_n; U_1, \dots, U_m)\end{aligned}\tag{1.1-1}^{\textcircled{1}}$$

其中，函数 f_i 可以是仿真系统的非线性函数。如果变量 X_i 构成最小变量组，且与给定输入 U_i 可完全描述系统特性，则 X_i 为系统的一组状态变量。方程组 (1.1-1) 是系统的状态空间描述。函数 f_i 应是单值连续函数。通常可将方程组 (1.1-1) 表达为如下形式：

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U})\tag{1.1-2}$$

其中，状态矢量 $\mathbf{X}$ 是由 n 个状态变量组成的 $(n \times 1)$ 阶列数组，控制矢量 $\mathbf{U}$ 是控制

^① 本书公式、图和表按原书排序，不做修改。——译者注

变量的 $(m \times 1)$ 阶列数组, 函数 f 是一组非线性函数。在多维状态及控制空间中, 非线性状态方程组 (1.1-1) 或方程子集通常具有一个或多个平衡点, 在平衡点处导数为零。对于平衡点附近的小扰动, 通常可将方程近似处理成线性的、矩阵形式的线性状态方程:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1-3)$$

在此, 用小写的状态矢量和控制矢量表示偏离平衡状态的扰动, 虽然导数矢量具有实际值 (即零点附近的扰动)。 A 矩阵为方阵, B 矩阵的维数取决于状态变量和控制变量的个数。

在第2章和第3章中, 我们还要更详细地描述状态空间公式。那时我们会注意到, 这种表达式的突出优点在于可以数值求解非线性状态方程。最简单的数值解法是欧拉积分, 如下式:

$$X = X + f(X, U) \delta t \quad (1.1-4)$$

其中, “=” 表示用方程右端项之值替换计算机存储器中的 X 。积分时间步长 δt 必须足够小, 以使在每个 δt 间隔内可将 U 近似为常量, 且 $\dot{U}\delta t$ 是状态矢量增量的良好近似。该数值积分能使状态矢量随时间增量 δt 逐步变化, 以获得时间历程模拟 (问题 1.5-2)。

1.2 矢量运动学

定义及表示法

运动学可定义为对于物体运动的研究, 而不考虑引起运动的机械作用。我们可以通过三维空间矢量来描述物体的运动。用矢量进行运动学分析时, 将会用到下述定义:

参考系: 可用刚体或刚性关联的点系确定距离和方向 (用 F_i, F_e 等符号表示)。通常, 用小写字母下标表示参考系, 而用大写字母下标表示一个点。

惯性系: 适用于牛顿定律的参考系。或许“天体太阳”系是最佳的近似惯性系, 以太阳质心为固定点, 通过垂直于黄道平面和在位置固定的特定星体平面的投影来确定方向。

矢量: 矢量是既有大小又有方向的抽象几何量。矢量的存在不依赖于任何坐标系。本书所使用的矢量仅是三维空间中的欧几里得矢量。

坐标系: 在参考系中确定空间点位置的测量系统。在一个参考系中可能会有多个坐标系 (无相对运动), 有时不严格地称为“构架”。

选择表示法时, 必须考虑以下事实: 对于位置矢量, 必须指定描述矢量的两点间的相对位置。速度和加速度矢量是相对于参考系的矢量, 必须指定参考系和动点。矢量的导数取决于观察者所在的参考系, 该坐标系必须在表示法中予以说明。定义矢量的参考系与求导的坐标系可能不同, 于是表达一个矢量可能需要两个参考系标识。我们将采用下述表示法:

◇ 矢量用加粗字符表示。

◇ 矢量符号的右下标标识矢量两端点的位置; 对于速度或加速度矢量, 右下标

标识一个点和一个参考系。下标中的“/”表示“相对于”的意思。

◇ 矢量符号的左上标标识求导参考系；上点标表示导数。

◇ 矢量符号的右上标标识一特定坐标系，表示该矢量在此特定坐标系下的一组分量。

◇ 用两根竖线表示矢量长度，如 $|p|$ ①。

该表示法例举如下：

$p_{A/B}$ $\equiv$ A 点相对于 B 点的位置矢量；

$v_{A/i}$ $\equiv$ 在参考系 i (F_i) 下 A 点的速度；

${}^b\dot{v}_{A/i}$ $\equiv$ 在参考系 F_b 下 $v_{A/i}$ 的导数；

$v_{A/i}^c \equiv (v_{A/i})^c \equiv v_{A/i}$ 在坐标系 c 上的分量；

${}^b\dot{v}_{A/i}^c \equiv$ 在参考系 F_b 下的导数在坐标系 c 上的分量。

矢量的分量用标识坐标的下标来表示，或者，用带 x, y, z 下标的矢量符号表示。所有分量构成列矢量。转置用右上标 T 表示。例如：

$$p_{A/i}^b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad v^b = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = [v_x, v_y, v_z]^T$$

表示在坐标系 b 下的分量数组。

导数矢量

可以采用与标量导数相同的方法定义矢量导数：

$$\frac{dp_{A/B}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p_{A/B}(t + \delta t) - p_{A/B}(t)}{\delta t} \right]$$

这是由 $p_{A/B}$ 的长度变化和方向变化所产生的一个新矢量。根据观察者所在参考系的旋转情况会得到对导数的不同解释。上述表示法的另一个例题如下：

$${}^i\dot{p}_{A/B} = \text{在坐标系 } i \text{ 下矢量 } p_{A/B} \text{ 的导数}$$

注意，如果 $p_{A/B}$ 是位置矢量，则只有 B 是求导参考系的固定点时该导数才是一个速度矢量。同样地，只有在定义速度的参考系下对速度矢量求导得到的才是加速度矢量。

如果在参考系 a 下对普通矢量 v 求导，则导数矢量在与参考系 a 固定的坐标系下的分量由 v 在该坐标系下分量的变化率确定。例如，如果：

$$v^c = [v_x, v_y, v_z]^T$$

其中，坐标系 c 固定于参考系 a 中，那么：

$${}^b\dot{v}^c = [\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z]^T$$

值得对该矢量导数引起特别关注，后面将与角速度联系起来共同讨论。

矢量特性

矢量不依赖于任何坐标系，但是有些矢量运算可以得出不独立于“旋向”定则

① 根据 GB 3102.11—1993《物理科学和技术中使用的数学符号》的规定，矢量用黑斜体表示，如 a （手写体可用 $\vec{a}$ 表示）。——译者注

的伪矢量。例如, 矢量叉积的运算结果是一个矢量, 但该矢量的方向取决于所采用的是右手定则还是左手定则。关于矢量方向, 我们通常采用右手定则, 同样, 我们通常使用的笛卡儿 (旧译笛卡尔) 坐标系也是右手定则。图 1.2-1 所示为矢量 $\mathbf{p}$ 和描述 $\mathbf{p}$ 方向的参考坐标系 (固定于某参考系)。坐标轴的单位矢量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 依次构成的右手定则 (即 $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$)。相对于该坐标系, $\mathbf{p}$ 的方向由三个方向角 α , β , γ 描述。用方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 给出 $\mathbf{p}$ 在坐标轴上的投影, 应用勾股定理, 则

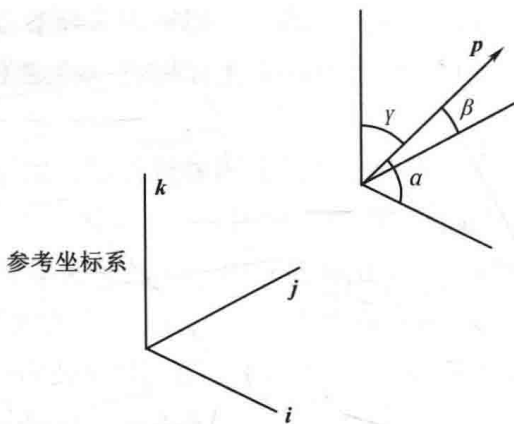


图 1.2-1 矢量的方向角

$$|\mathbf{p}|^2 \cos^2\alpha + |\mathbf{p}|^2 \cos^2\beta + |\mathbf{p}|^2 \cos^2\gamma = |\mathbf{p}|^2$$

因此, 方向余弦满足:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (1.2-1)$$

矢量的加法和减法可以根据几何意义 (平行四边形定律) 与坐标无关的定义。两个矢量的标量积是由下式定义的标量:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos\theta \quad (1.2-2)$$

其中, θ 是两个矢量间的夹角 (必要时可平移矢量, 使其交叉)。标量积运算满足交换率和分配率, 即:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

标量积的基本用途是: 求矢量的投影; 构建正交性; 求矢量的长度。例如, 用式 (1.2-2) 除以 $|\mathbf{v}|$ 便可得到 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / |\mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cos\theta$$

如果 $\cos\theta = 0$, 则 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, 于是称此两个矢量相互正交; 如果矢量与其自身进行标积运算, 则因 $\cos\theta = 1$, 于是得到矢量长度的平方值。

正交单位矢量满足如下标量积关系:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

应用这些关系, 可用分量表示两个矢量的标量积:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (1.2-3)$$

其中, 矢量可以是任何正交笛卡儿坐标系中的矢量。

矢量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的叉积, 用 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 表示, 是一个矢量 $\mathbf{w}$ 。该矢量垂直于 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 所在平面, 其方向按 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 次序构成右旋系 (必要时对矢量进行平移, 使之相交)。 $\mathbf{w}$ 的长度为 $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin\theta$, 其中 θ 为矢量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的夹角。

矢量叉积具有以下性质:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) & (\text{反交换率}) \\
 a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v}) & (\text{结合率}) \\
 \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) & (\text{分配律}) \\
 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) & (\text{标量三重积}) \\
 \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) & (\text{矢量三重积})
 \end{aligned} \tag{1.2-4}$$

为了有助于记忆三重积公式, 注意其中矢量的循环置换。换句话说, 矢量三重积可简单表达为 “ $ABC = BAC - CAB$ ”。

描述右手正交坐标系的单位矢量的叉积满足下列方程:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

也可以这样记忆: $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, 等等。根据这些性质, 我们可以导出两个矢量叉积的公式, 为了便于记忆, 将之写成类似于行列式展开的形式:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \tag{1.2-5}$$

其中, 下标 x, y, z 分别表示矢量在与单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 所对应的坐标轴上的分量。

例如, 我们可以用矢量叉积来求力 $\mathbf{F}$ 引起的力矩 $\mathbf{M}$ 。设力矢量作用点的位置矢量为 $\mathbf{r}$, 则绕矢量 $\mathbf{r}$ 原点的力矩矢量为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

下述章节还会介绍其他例题。

矢量的旋转

显然, 矢量可以通过单轴旋转、以任意方向指向空间某点。在此, 我们根据经典力学 (Goldstein, 1980) 原理导出矢量旋转公式。

参考图 1.2-2, 将自由矢量 $\mathbf{u}$ 绕单位矢量 $\mathbf{n}$ 按左手定则旋转一个角度 μ , 便得到一个新的矢量 $\mathbf{v}$ 。作 NV 和 NU , 以求 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 在旋转轴上的投影, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 与旋转轴的夹角为 μ , 则矢量 $\mathbf{v}$ 可以表达为:

$$\mathbf{v} = \mathbf{ON} + \mathbf{NW} + \mathbf{WV} =$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{(\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})}{|\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|} NV \cos \mu + \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{n})}{|\mathbf{u}| \sin \phi} NV \sin \mu$$

其中:

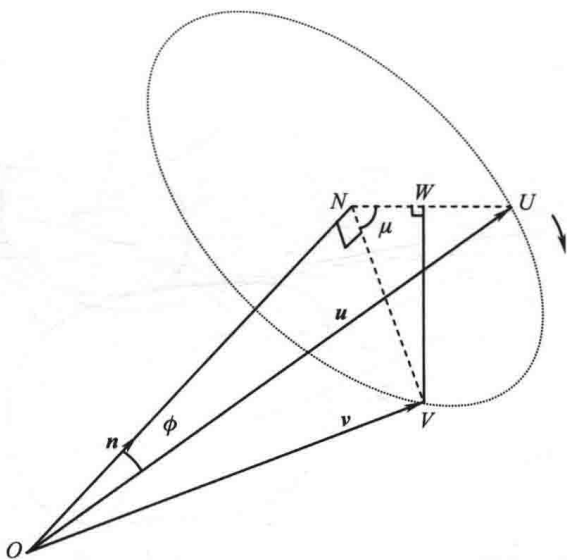


图 1.2-2 矢量的旋转

$$NV = NU = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}| = |\mathbf{u}| \sin\phi$$

因此

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \cos\mu(\mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) - \sin\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{u})$$

或者

$$\mathbf{v} = (1 - \cos\mu)\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \cos\mu\mathbf{u} - \sin\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \quad (1.2-6)$$

方程 (1.2-6) 有时被称为旋转公式。该公式表明, 如果选定 $\mathbf{n}$ 和 μ , 可以通过对 $\mathbf{u}$ 的标量积和叉积运算得到期望的旋转。

矢量导数及角速度矢量

图 1.2-3 给定一个固定于坐标系 F_b 的矢量 $\mathbf{w}$, 坐标系 F_b 相对于坐标系 F_r 正在旋转。如果从坐标系 F_b 中观察到的 $\mathbf{w}$ 的方向或/和长度在变化, 则 $\mathbf{w}$ 在坐标系 F_r 中得到的导数就不为零, 但该导数不受坐标系间的平移运动影响。相对于坐标系 F_r 的方向变化可以通过旋转定理求得。在该图中, 设 $\hat{\mathbf{s}}$ 为平行于 t 时刻旋转瞬轴的单位矢量。对于 F_r 中的观察者来说, 在 $t + \delta t$ 时刻, 由于有了微小的转动 $\delta\phi$, $\mathbf{w}$ 就变成了一个新矢量 $\mathbf{w} + \delta\mathbf{w}$ 。可以用旋转公式求 $\delta\mathbf{w}$ 。于是, 当 δt 趋于无穷小时, 通过求 $\delta\mathbf{w}/\delta t$ 的极限就可以得到 $\mathbf{w}$ 在 F_r 下的导数。设按右手定则绕 $\hat{\mathbf{s}}$ 的转角 $\delta\phi$ 为正, 则在小角度近似下, 旋转公式如下:

$$\frac{\delta\mathbf{w}}{\delta t} \approx \left(\hat{\mathbf{s}} \frac{\delta\phi}{\delta t}\right) \times \mathbf{w}$$

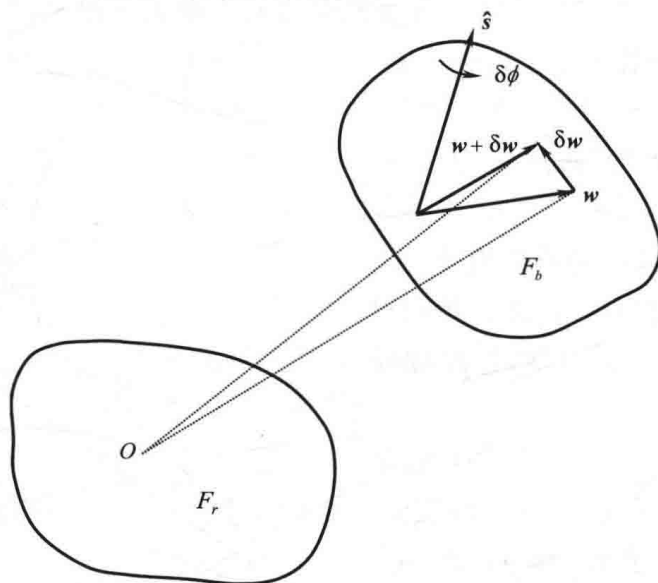


图 1.2-3 旋转坐标系中的矢量导数

求 $\delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 则

$$\dot{\mathbf{w}} = (\hat{\mathbf{s}} \dot{\phi}) \times \mathbf{w}$$

括号中的量具有矢量性质, 其方向与旋转轴方向一致, 大小等于旋转角速率。我们将其定义为相对于 F_r 、 F_b 的瞬时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{b/r}$ 。按右手定则, 绕 $\hat{\mathbf{s}}$ 的角速度矢量为正。如果在 F_b 中 $\mathbf{w}$ 的长度也在变化, 还必须将这种变化加到上述方程的右端, 于是

$$\dot{\mathbf{r}} = {}^b\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_{b/r} \times \mathbf{r} \quad (1.2-7)$$

方程 (1.2-7) 也称为科里奥利 (简称科氏, 旧译哥氏) 方程 (Blakelock, 1965), 是根据牛顿定律推导运动方程的基本工具。该式可以推广应用于任何以矢量形式表达的物理量, 甚至不必一定要对时间求导数。按照方程 (1.2-7), 角速度可以定义为这样一个矢量, 即任意一个矢量在两个不同坐标系间的关联导数。本书中关于该矢量的物理描述是以右手定则绕定向轴旋转的角速率, 通常, 速率的大小和方向都随时间变化。关于角速度矢量的其他推导过程在许多文献中都可以找到 (McGill 和 King, 1995; Kane, 1983)。

角速度矢量的主要性质有:

- (i) 角速度是关联一个矢量在两个不同坐标系下导数关系是唯一矢量。
- (ii) 角速度满足相对运动条件 $\boldsymbol{\omega}_{b/a} = -\boldsymbol{\omega}_{a/b}$ 。
- (iii) 角速度可在多坐标系中叠加, 例如:

$$\boldsymbol{\omega}_{c/a} = \boldsymbol{\omega}_{c/b} + \boldsymbol{\omega}_{b/a} \text{ (不适用于角加速度!)}$$

(iv) 角速度的导数在任何坐标系下都相同, ${}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/a} = {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/a}$ 。这就使得我们可以利用方程 (1.2-7) 计算 $\boldsymbol{\omega}$ 的导数。

在实际应用中, 定义了坐标系后, 如何确定角速度是个普遍问题。我们可以找出一个或多个明显具有旋转轴或角速率的中间坐标系, 然后, 利用叠加性质合成那些中间角速度。后面, 我们还将介绍一个实例, 即航空飞行器的“旋转地球”运动方程。

运动坐标系中的速度及加速度

图 1.2-4 所示, P 为相对于坐标系 F_a 和 F_b 运动的动点, O 和 Q 分别为与两个坐标系固连的定点。如果我们要寻求在两个坐标系下的速度、加速度的对应关系, 首先必须找出图中的位置矢量的关系, 然后在坐标系 F_a 下求导, 得到速度:

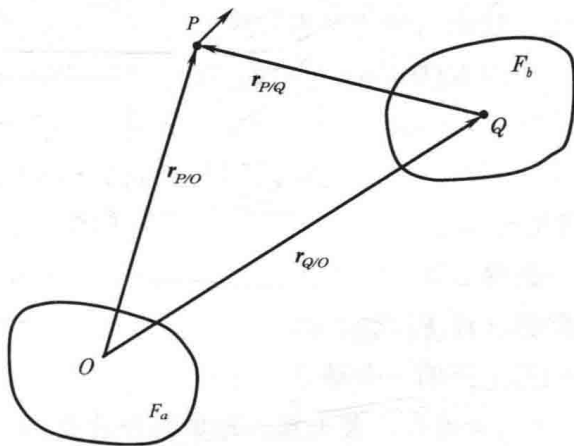


图 1.2-4 移动坐标系中的速度和加速度

$$\mathbf{r}_{P/O} = \mathbf{r}_{Q/O} + \mathbf{r}_{P/Q} \quad (1.2-8)$$

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_{P/O} = {}^a\dot{\mathbf{r}}_{Q/O} + {}^a\dot{\mathbf{r}}_{P/Q} \quad (1.2-9)$$

方程 (1.2-9) 的前两项表示在 F_a 中的速度, 而最后一项是 P 点相对于 F_b 中固定点的位置在 F_a 下的导数。我们用带有相应下标的 $\mathbf{v}$ 表示速度矢量, 于是, 根据科里奥利方程, 方程 (1.2-9) 可写为:

$$\mathbf{v}_{P/a} = \mathbf{v}_{Q/a} + \mathbf{v}_{P/b} + \boldsymbol{\omega}_{b/a} \times \mathbf{r}_{P/Q} \quad (1.2-10)$$

作为方程 (1.2-10) 的用例, 设 F_a 为惯性参考系, F_b 是相对于参考坐标系运动的刚体。假设运动物体上的导航仪 (机载惯性导航系统) 能够确定刚体在惯性参