普通高等教育"十三五"规划教材

高等数学（上册）

同步辅导分册

◎主　编　汪永娟
◎副主编　付吉丽　高　剑

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

同步辅导分册

主　编　汪永娟

副主编　付吉丽　高剑

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书共分 6 章，每章又分若干节，各节主要内容由 5 部分组成：一、基本要求；二、考点知识概述；三、常用解题技巧；四、典型题解；五、测试题。

本书以“够用、管用、会用”为指导思想，将数学训练和实际问题相结合。每章都配有不同难度的测试题，对本章的学习情况进行检验。测试题是从各类考试题中精选出的大量有代表性的题目，可以满足不同基础、不同要求的学生使用。

本书可作为应用型本科院校及高职高专理工、经管类各专业学生的高等数学课程参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）同步辅导分册 / 汪永娟主编. —北京：电子工业出版社，2017.8

ISBN 978-7-121-32069-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①汪…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 154031 号

策划编辑：朱干支
责任编辑：李　蕊
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：北京季蜂印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：6.75　字数：172.8 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版
印　　次：2018 年 8 月第 2 次印刷
定　　价：22.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254573，zgz@phei.com.cn。

前　言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它既为后续课程准备必要的数学知识与方法，又对学生科学思维的训练起着重要的作用。

本书是为学习《高等数学》而编写的辅导用书，充分考虑了应用型本科院校以培养具有实践能力和创新能力的应用型人才为宗旨，力求贯彻“够用、管用、会用”的“三用原则”，旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。在内容的取舍方面，在巩固基础、强化理解基本概念的前提下，将一些典型应用型例题及解题方法与技巧融入书中，突出应用型本科院校学生培养特色。本书体现了数学教学循序渐进、由浅入深的特点，同时，体现了近几年考研命题的新动向。本书将会成为读者学习《高等数学》的良师益友。

为了方便使用，本书配有习题答案（电子版），请有此需要的读者登录华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）免费注册后下载。

本书由汪永娟担任主编，由付吉丽、高剑担任副主编，由曾昭英教授担任主审。编写分工如下：付吉丽编写第1章和第2章；汪永娟编写第3章和第4章；高剑编写第5章和第6章。本书得到了哈尔滨石油学院领导的大力支持，得到了张春志教授的悉心指导，并得到教研室同事张瑶、金宝胜、段宏博、武斌、王晓春老师在收集材料和校稿方面的大力帮助，在此一并表示衷心的感谢。

本书是与教学同步的学习辅导书，也是阶段复习的指导书。我们真诚地希望编出一本能够帮助读者学好《高等数学》的辅导书，但由于编者的水平有限，书中难免存在诸多错误与不足，敬请读者不吝指正，编者在此不胜感激。

编　者

2017年5月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函　　数

一、基本要求

（1）理解邻域的概念，函数的基本概念.
（2）掌握函数的表示方法，基本初等函数，初等函数，分段函数.

二、考点知识概述

1．邻域

$|x-x_0|<\delta$，即开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$.

把 x_0 去掉，即 $0<|x-x_0|<\delta$，称为去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$.

2．函数

设有两个变量 x 与 y，变量 x 的变化范围为实数集合 D，如果存在一个确定的法则（或对应规则）f，使得对于每个 $x\in D$ 都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应规则.

3．函数的表示方法

（1）解析法：显函数，隐函数，参数方程，复合函数，反函数.
（2）表格法.
（3）图像法.

4．常用函数

（1）基本初等函数：
① 常数函数 $y=c$（c 常数）.
② 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）.
③ 指数函数 $y=a^x$　$(a>0且a\neq 1)$.
④ 对数函数 $y=\log_a x$　$(a>0且a\neq 1)$.
⑤ 三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.
注：自变量 x 一律采用弧度.
⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$.
（2）初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合，并用一个式子表

示的函数称为初等函数。

（3）分段函数.

如 $f(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\0, x\text{为无理数}\end{cases}$.

三、常用解题技巧

求函数的定义域：

（1）若函数式含有分式，则分母不为0.

（2）若函数式含有开偶次方根式，则被开方数非负.

（3）若函数式含有对数，则真数大于0，底大于0且不等于1.

（4）若函数式含有反正弦或反余弦，则反正弦或反余弦符号下式子的绝对值要不大于1.

（5）若函数式含有正切符号，则正切符号下的式子的值不能为 $K\pi+\dfrac{\pi}{2}$；若函数式含有余切符号，则余切符号下的式子的值不为 $K\pi$（K 为整数）.

（6）函数具有实际意义时，除了考虑上述要求外，还要根据实际意义来确认其定义域，如正方形边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2, x\in(0,+\infty)$.

四、典型题解

【例1】 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

（1）$f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$.

（2）$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 （1）不相同，因为定义域不同，$D_f=[0,+\infty)$，$D_g=(-\infty,+\infty)$.

（2）相同，因为定义域都是 $\mathbf{R}$，且对应法则也相同.

【例2】 确定下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\lg(x-1)$；　　（2）$y=\lg(1-2\cos x)$.

解 （1）由 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\x-1>0\end{cases}$，有 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\x>1\end{cases}$，所以定义域为 $\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$.

（2）由 $1-2\cos x>0$，知 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}, 2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，从而函数的定义域为 $\left\{x\,|\,x\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}, 2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}), k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$.

【例3】 若 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 由 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x-\dfrac{1}{x})^2+2$，可知 $f(x)=x^2+2$.

【例4】 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(x-1)$ 及 $f\left[f(x)\right]$.

解 $f(x-1)=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\dfrac{1}{x}$

$$f\left[f(x)\right]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}$$

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f\left[f(x)\right]$.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2\geqslant 0$，故 $f\left[f(x)\right]=1+x^2$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1+x\geqslant 1>0$，故 $f\left[f(x)\right]=1+(1+x)=2+x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

【例 6】设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 z 的表达式.

解　$y=0$，$z=x^2$，将 $y=0$ 代入 $z=x+y+f(x-y)$，得 $z=x+f(x)$，即可得 $f(x)=x^2-x$，$f(x-y)=(x-y)^2-(x-y)$，所以 $z=x+y+f(x-y)=x+y+(x-y)^2-(x-y)=(x-y)^2+2y$.

1.2　函数的性质

一、基本要求

掌握函数的四个基本性质：有界性、单调性、周期性、奇偶性.

二、考点知识概述

（1）有界性：如果存在一个正常数 M，对任何 $x\in D$，都有 $\left|f(x)\right|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

（2）单调性：$y=f(x)$ 在 D 上有定义，任取两点 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少的.

（3）周期性：$y=f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在一个非零常数 T 及任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，如果存在最小正数 T，则称 T 为周期函数的最小正周期.

（4）奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；否则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

三、常用解题技巧

1．单调性

（1）两个增函数之和是增函数（两个减函数之和是减函数）.

（2）两个正增函数之积为增函数（两个正减函数之积为减函数）.

（3）$f\left[g(x)\right]$ 的增减性：同增异减，即 $f(x)$ 增，$g(x)$ 减，则 $f\left[g(x)\right]$ 为减函数.

2．奇偶性

（1）若 $f(x)+f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(x)-f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为偶函数；

若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$，则 $f(x)$ 为偶函数.

（2）若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，则 $h(x)=f(x)-f(-x)$ 一定是奇函数，$g(x)=f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数.

（3）奇函数+奇函数=奇函数；偶函数+偶函数=偶函数；奇函数+偶函数=非奇非偶
奇函数×奇函数=偶函数；偶函数×偶函数=偶函数；奇函数×偶函数=奇函数

（4）$f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，则 $f\left[g(x)\right]$ 是偶函数，$g\left[g(x)\right]$ 为奇函数.

1.3 数列的极限

一、基本要求

（1）理解数列极限的概念.

（2）掌握数列极限的性质和运算.

二、考点知识概述

1. 数列极限

定义：数列 $\{a_n\}$，当 n 无限增大时，如果其通项 a_n 与一个常数 a 无限接近，即 $|a_n-a|$ 趋于0，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，或称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或者 $a_n\to a$（$n\to\infty$）；否则称 $\{a_n\}$ 发散或没有极限.

2. 运算性质

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$c$ 常数，则：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n=ca$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$；

（4）$b\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

3. 重要公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases}\qquad(a_0b_0\neq0)$$

4. 收敛数列性质

定理 1.3.1 （极限的唯一性）如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么它的极限是唯一的.

定理 1.3.2　收敛数列一定有界（反之未必）.

定理 1.3.3　（收敛数列的保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $a_n>0$（或 $a_n<0$）.

定理 1.3.4　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$.

定理 1.3.5　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a \quad (k\in\mathbf{N})$.

三、常用解题技巧

（1）公式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases}\quad (a_0b_0\neq 0)$

【例 1】已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{2n+1}+an+b\right)=3$，求 a、b 的值.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2+2an^2+(a+2b)n+b}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2a+1)n^2+(a+2b)n+b+2}{2n+1}=3$

由公式可知：

$$\begin{cases}2a+1=0\\ \dfrac{a+2b}{2}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

（2）对于分式类型求极限可以找到分子、分母中变化最快的项（当 $n\to\infty$ 时），让分子、分母同时除以这个最快的项。

【例 2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+4^n}{9^n-2^n}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 9^n+4^n}{9^n-2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n}=3$

【例 3】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\cos n}{n+5}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\cos n}{n}}{1+\dfrac{5}{n}}=1$

【例 4】若 $a>0$、$b>0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

解 当$a>b$时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}=1$.

当$a=b$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=0$.

当$a<b$时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}=-1$.

【例 5】求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+n+3^n\cdot n}{4n-1-3(2n+1)3^{n-1}}$.

解 分子、分母中变化最快的是$3^n\cdot n$，所以

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n+n}{3^n\cdot n}+1}{\dfrac{4n-1}{3^n\cdot n}-\dfrac{3(2n+1)3^{n-1}}{3^n\cdot n}}=-\frac{1}{2}$$

（3）含参数问题，应对参数进行分类讨论.

【例 6】计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$，$\theta\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}=\begin{cases}1, & 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & \theta=\dfrac{\pi}{4}\\ -1, & \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

四、典型题解

【例 7】观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限，如果有极限，指出它们的极限.

（1）$x_n=1+(-1)^n\dfrac{2}{n}$；（2）$x_n=(-1)^n$；

（3）$x_n=2^{(-1)^n}$；（4）$x_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$；

（5）$x_n=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

解 （1）$(-1)^n\dfrac{2}{n}$随着n的增大，$\left|(-1)^n\dfrac{2}{n}\right|=\dfrac{2}{n}$无限趋于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{2}{n}\right]=1$$

（2）$x_n=(-1)^n$，1 和-1 交替出现，所以该数列的极限不存在.

（3）$x_{2k}=2$，$x_{2k-1}=\frac{1}{2}$，所以数列 $x_n=2^{(-1)^n}$ 的极限不存在.

（4）当 n 趋于无穷大时，$\frac{1}{n}$ 无限趋于 0，$\sin\frac{1}{n}$ 也无限趋于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right]=0$$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

【例 8】$\lim\limits_{n\to\infty}\left[2-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n\right]=2$，求 r 的取值范围.

解　由已知可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n=0$，即 $\left|\frac{r}{r+1}\right|<1$，解得 $r>-\frac{1}{2}$.

1.4　函数的极限

一、基本要求

（1）理解函数极限的概念.

（2）掌握函数极限的性质.

二、考点知识概述

1．函数极限

（1）定义：函数 $y=f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 有定义，如果当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 无限趋于一个常数 A，即 $|f(x)-A|$ 趋于 0，则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 收敛于 A，或称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（$x\to a$）；否则称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时发散，或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在.

（2）极限符号：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\overset{\Delta}{=}f(x_0^+)$ 右极限；$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\overset{\Delta}{=}f(x_0^-)$ 左极限.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2．充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

3．函数极限的性质

定理 1.4.1　（极限的唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则极限唯一.

定理 1.4.2　（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在点 a 的某个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，则 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 一定有界.

定理 1.4.3　（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，

使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

定理 1.4.4 如果 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$（$A$ 可以是无穷大）且 $g(x)\neq A$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to a}f\left[g(x)\right]=B$.

4．函数极限的运算法则

如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，$c$ 常数，则：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=cA$；

（2）$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=AB$；

（4）$B\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

三、常用解题技巧

（1）分解因式，通分，有理化.

（2）公式法：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & k<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ \infty, & k>m\end{cases}$ （$a_0b_0\neq 0$）.

（3）分段函数分段点（或间断点）的极限采用左右极限的方法：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

四、典型题解

【例 1】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2, & x=0\\ (x-1)^2, & 0<x<2\\ 0, & x=2\\ x-3, & x>2\end{cases}$$

求下列极限，如果极限不存在，则说明理由.

（1）$\lim\limits_{x\to -1}f(x)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$. 因为 $f(0^-)=f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

（3）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$

（4）$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1$

因为 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在.

【例 2】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$；

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{h}$；　（4）$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{5x}+\dfrac{8}{x^2}\right)$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)$.

解　（1）因为分母的极限不为 0，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{9}{-1}=-9$$

（2）因为分母的极限不为 0，所以

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)}=\frac{0}{5}=0$$

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4hx+4h^2}{h}=4x$

（4）分子、分母的极限均为 0，不能直接利用商的运算法则求解，必须将分子、分母因式分解，分解出 $(x+1)$ 因子，再把它消去：

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0}{-2}=0$$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{5x}+\dfrac{8}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=3$

（6）因为分子、分母的极限均为 0，所以分子、分母要因式分解消去分子、分母为 0 的公因子，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x^2-2x+1)x}{(3x+2)x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(5x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\frac{1}{2}$$

（7）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{1+x^3}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=-1$$

【例 3】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

解　$x=0$ 是间断点，因此需要讨论在 $x=0$ 处的左右极限.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=-1,\ (\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\infty,\ (\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0)$$

【例 4】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，$|x|<1$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^4)\cdots(1+x^{2^n})\\&=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x},\ |x|<1\end{aligned}$$

【例 5】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}$.

解 （1）当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.

（2）当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^{nx}}}{1+\frac{1}{e^{nx}}}=1$.

（3）当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1$.

【例 6】$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 1, & x=0\\ 1+x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因为 0 为函数的分段点，故需要求 0 点的左右极限.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x\sin\frac{1}{x})=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.5 无穷大与无穷小

一、基本要求

（1）理解无穷大与无穷小的概念.

（2）掌握无穷小的性质.
（3）掌握无穷小的阶的比较.
（4）理解无穷大的性质.

二、考点知识概述

1. 无穷小

（1）定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为在 $x\to x_0$ 时的无穷小，特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，称 a_n 为在 $n\to\infty$ 时的无穷小.

（2）无穷小与极限的关系：
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

（3）无穷小的性质：
① 两个无穷小的代数和仍是无穷小.
② 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.
③ 常数与无穷小的积仍是无穷小.
④ 两个无穷小的积仍是无穷小.
⑤ 有限个无穷小的积仍是无穷小.
⑥ 有界变量与无穷小的积仍是无穷小.
常用的有界变量：$(-1)^n$、$\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、$\arctan(x)$、$\operatorname{arccot}(x)$，以及由三角函数、反三角函数复合得到的函数。

（4）无穷小的阶的比较：

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=0,\quad \lim_{x\to x_0}\beta=0$$

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称 α 是 β 的同阶无穷小；

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=C\neq 0$，$k>0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小；

④ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

⑤ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小.

（5）无穷小的等价替换定理：
设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

2. 无穷大

（1）定义：无穷小 α（$\neq 0$）的倒数，称为无穷大.
（2）无穷大的性质：
① 两个同号的无穷大的和仍是无穷大；