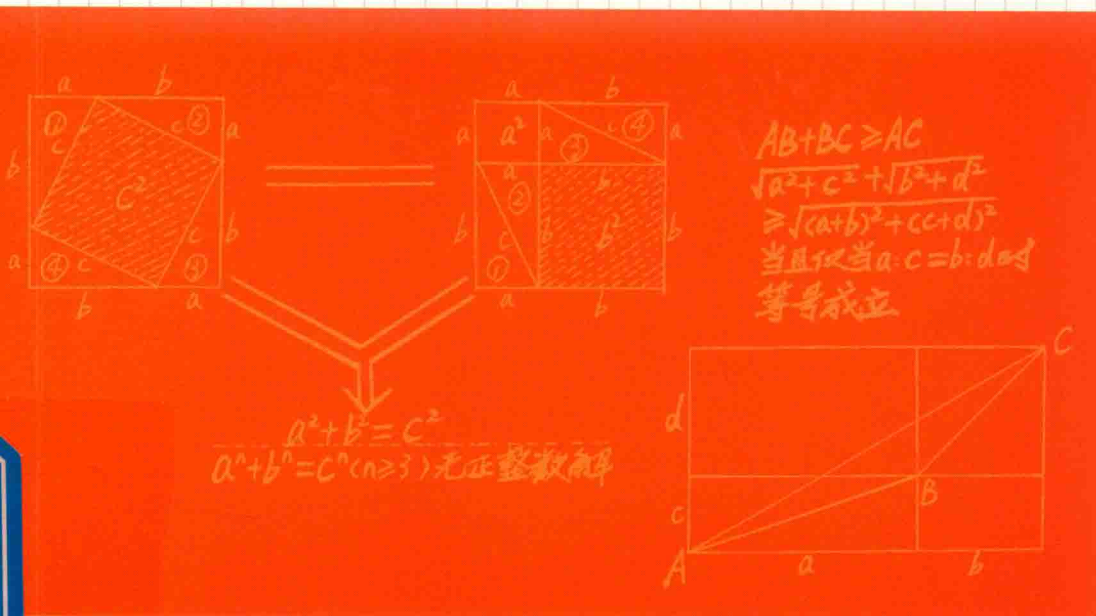


高中数学

思想方法 及应用

高慧明◎著





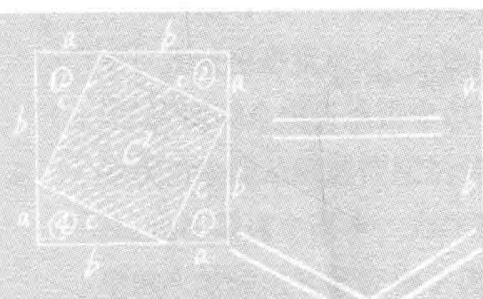
梦山书系

◆ 高慧明数学教学实践与研究

高中数学

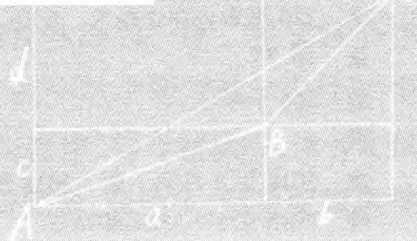
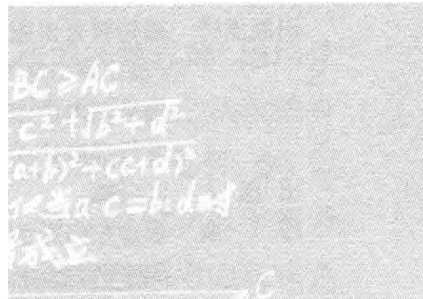
思想方法 及应用

高慧明◎著



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$a^2 + b^2 = c^2 (n \geq 3)$ 无正整数解



海峡出版发行集团 | 福建教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思想方法及应用 / 高慧明著. —福州:
福建教育出版社, 2018. 8

(高慧明数学教学实践与研究)

ISBN 978-7-5334-8074-5

I. ①高… II. ①高… III. ①中学数学课—教学研究
—高中 IV. ①G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 039272 号

高慧明数学教学实践与研究

GAOZHONG SHUXUE SIXIANG FANGFA JI YINGYONG

高中数学思想方法及应用

高慧明 著

出版发行 福建教育出版社

(福州梦山路 27 号 邮编:350025 网址:www.fep.com.cn)

编辑部电话:010-62027445

发行部电话:010-62024258 0591-87115073)

出版人 江金辉

印刷 福建东南彩色印刷有限公司

(福州市金山工业区 邮编:350002)

开本 710 毫米×1000 毫米 1/16

印张 16.75

字数 266 千字

插页 1

版次 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-5334-8074-5

定价 39 元

如发现本书印装质量问题, 请向本社出版科(电话:0591-83726019)调换。

总 序

2009年7月,我的《高考数学的理论与实践》由哈尔滨工业大学出版社出版后,得到许多一线教师和专家教授的厚爱,时任《数学通报》杂志主编北师大的张英伯教授,《中学数学教学参考》杂志主编陕西师大的石生民教授,《中学数学研究》杂志主编华南师大的林长好教授,《中学生数理化》(高中版)杂志主编师广智,全国十杰中小学中青年教师、陕西省特级教师安振平等对我的专著给予了充分肯定,他们激情澎湃的文字一直鼓励和鞭策我埋头奋进、锲而不舍,百尺竿头、更进一步.2011年2月,我的《给学生一个心灵的支点——高慧明班级高效管理艺术》一书由华东师范大学出版社出版.2014年2月,我的《让高中生学会学习》由中国轻工业出版社出版.

2015年6月,福建教育出版社拟计划出版我的数学教学实践与研究丛书.我曾惶恐犹豫过,也曾忐忑不安,后来想到自己在国家教育部“国培计划”讲课和全国各地讲学过程中,很多一线老师都希望我能把自己从教的有效成功经验系统地传授给他们,我经常接到大量的电话和电子邮件、QQ留言,也都是这个需求.为此我利用业余时间对自己近30年来数学教学实践中的有效做法和研究做了比较完整的梳理和总结.在撰写过程中力求将系统性、理论性、实践性、引领性、可读性、操作性融为一体.整套丛书计划分别围绕“高考数学命题规律与教学策略”“高中数学课堂教学设计”“中学数学思想方法及应用”“一线教师教学研究与写作”等专题撰写,读者定位为中学数学教师、数学爱好者、初等中等数学研究者、高中生、师范院校数学系学生、教科研机构研究人员等.

近年来,随着高中课程改革和高考制度改革的推进,高考命题为有效考查考生的综合素质和能力进行了积极而卓有成效的改革与探索.数学学科

的高考命题强调对学生学习潜能和数学素养的考查,其考查范围和命题指向具有相当的确定性,其落脚点体现了学科体系的主干,并与高校数学专业课程的内容有着密切联系;虽然,高考命题也有一定的局限性和随机性,这与试卷长度和命题周期有关,但是,不可否认的是,高考命题其实蕴含着规律.

在多年的教学实践中,我认为教好、学好数学必须站在系统的角度看问题,勤于思考,以“高考数学命题规律与教学策略”为专题的书着眼联系实际,综述高考命题规律并重点分析各主要考点的命题规律,且提出切实可行的教学策略.

以“高中数学课堂教学设计”为专题的书,探索数学课堂教学的内涵和特点,数学课堂教学的设计主要体现在预设有效的教学过程,并从理论解析到实践探索.我从不同层面和不同视角着重探讨如下问题:如何有效地实现数学新课程的目标体系?如何有效地组织教学内容?如何有效地设计教学活动?如何有效地设计教学反馈?如何有效地弘扬数学精神、传播数学文化?如何有效地改进并丰富学生的数学学习方式,真正体现主体性、探究性和创造性?如何有效地促进学生综合素质的发展,特别是创新意识和实践能力的提高?

中学数学教材中的思想方法,有抽象概括、化归、数形结合、数学模型、归纳猜想、分类、类比、特殊化、演绎、完全归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法等.数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中.在数学教学中,加强数学思想方法教学不但具有重要意义,而且现实可行,是颇具开发价值的研究课题.

数学思想方法是数学知识的精髓,是知识转化为能力的催化剂.因此在数学教学中,我们应当有意识地挖掘和提炼数学知识本身所蕴涵着的丰富的数学思想和方法,以“高中数学思想方法及应用”为专题的书联系具体实例在这方面做了一些比较有效的探究.

.....

在新课程改革的背景下,“教师即研究者”已成为时代对教师的基本要

求,其实,我们有着得天独厚的研究优势,因为我们自始至终都生活在教育教学的现实场景之中,我们的所思、所想、所感、所悟,就是教育学科科研活动的最直接的体现方式。所以,只要坚持教学研究的主体意识,秉承积极应对独特问题的勇气和智慧,去观察、去研究、去探索、去尝试、去反思,那么在教育教学实践中闪耀出来的思想火花、真知灼见,必将成为教研课题和论文取之不尽的活水源头。

一线教师如何做课题研究?教研论文的学术性、科学性、创新性、实践性、艺术性等基本特点,教研论文的写作规范,教研论文写作的常见弊病,教研论文写作技巧等,这些都是我在“一线教师教学研究与写作”专题深入探讨的内容。

新课标的实行,需要的是研究性教师,不是教书匠,面对汹涌而来的改革浪潮,或者被淹没,消失于茫茫的大海;或者做时代的弄潮儿,在课改的大潮里畅游。而要在汹涌澎湃的改革大潮中自由游弋,就必须抛开尘世的喧嚣,耐得寂寞,耐得繁华,静下心来,潜心研究,以期提高自身的学养。以学习为舟,以研究为桨,以人格为帆,驶向教育成功的彼岸。

高慧明

2015年11月18日于北京

序

高慧明老师的“数学教学实践与研究”丛书即将出版,邀我作序,有幸先期阅读,于深受启发的同时,敬意油然而生.他在急功近利之风劲吹的当下,能静下心来坚持教学教研齐头并进,使学生实实在在受益,很是难能可贵.我和高老师虽然同在北京工作,但直接交流的机会并不多,只是常常从多种不同的学术期刊上读到他的最新文章.写序本来是名人、名家的事,而我只是大学里的一名普通老师,加上我正在墨尔本大学访问、合作研究一个月,几乎每天都有讨论、会议、报告,日程安排得也很紧,但是想到能为奋斗在一线的中学教师做点力所能及的帮助,还是欣然提笔写了自己的阅读感受.

首届全国十佳班主任,北京市高中数学特级教师,……这些沉甸甸的荣誉背后是高老师二十多年如一日的勤勉付出,孜孜不倦.在《教育研究》《中国教育学刊》《数学教育学报》《数学通报》等学术期刊上发表论文 500 余篇,其中相当一部分被中国人民大学复印报刊资料全文转载,出版专著 3 本.在繁重的中学一线教学的同时,能够取得如此丰硕的教学成果,这让专业从事数学教育研究的我汗颜.

在这套书中高慧明老师对他自己数学教学实践中的有效做法和教育教学研究做了比较完整的梳理与总结.最能激起我共鸣的是,书中所涉及的问题也是我近几年来一直关注和思考的问题.整套书将系统性、理论性、实践性、引领性、可读性、操作性融为一体,分为“高考数学命题规律与教学策略”“高中数学课堂教学设计”“中学数学思想方法及应用”“一线教师教学研究与写作”等专题,涉及高中数学课堂教学、学习指导、教学研究等方面,内容十分丰富.

为了应对新时代对数学教师的要求,适应新的教育理念和新课改的挑战,促进数学教师的专业化发展是根本,这就需要通过加强数学教师专业素质的培养和提升.当今时代,许多一线教师不再满足于做教书匠,而是更多地寻找作为教师的幸福,这种幸福来自于教师自身的不断思考、学习和研究.苏联教育家苏霍姆林斯基说过:“如果能让教师的劳动能够给教师带来乐趣,使天天上课不致于变成一种单调乏味的义务,那就应当引导每一位教师走上从事研究的这条幸福的道路上来.”决定一位教师是不是专家型教师有几个基本要素,一是掌握丰富的学科知识,对所教学科有深刻的认识;二是具有扎实的教育理论知识并与学科教学实践相结合;三是坚持实践、反思,再实践、再反思,不断在教学实践中提高自身的专业能力.而这几个基本要素,在高老师的丛书中都得到了充分体现.教师通过参与研究,得到成长,从而更好地实现教师的价值.高老师就是经常有意识地对自己的工作进行分析、总结,经常有意识地用先进的教育教学理论来指导自己的课堂教学,从而教育教学效果显著,并取得了一系列的科研成果.只要一线教师以研究者的心态置身于日常教学中,以研究者的眼光审视每天遇到的教学实践中的种种问题、不断对自身的教育教学行为进行反思,对身边出现的各种教育教学问题进行探究,对积累的教育教学经验进行总结归纳,广大一线教师也能成为像高老师这样的研究型教师.

教育无止境,研究无止境.希望高慧明老师的这套丛书,能带给广大读者更多的思考,思考数学教育的本质,潜下心来深入研究当前数学教育所面临的问题、机遇与挑战.这不仅是为自身的发展,更是为学生的发展.

让我们一起为数学教育的明天不断学习,不断研究,不断前行.以此与高老师共勉!

全国数学教育研究会理事长
北京师范大学数学科学学院教授



2015年11月28日于墨尔本大学国际课堂教学研究中心

目 录

第一篇 数学思想方法概述	1
第二篇 数学思想	7
第1节 函数与方程的思想	7
第2节 数形结合的思想	32
第3节 分类与整合的思想	61
第4节 化归与转化的思想	80
第5节 特殊与一般的思想	107
第6节 有限与无限的思想	117
第7节 必然与或然的思想	124
第三篇 数学方法	129
第1节 配方法	129
第2节 换元法	140

第 3 节	待定系数法	152
第 4 节	定义法	165
第 5 节	数学归纳法	180
第 6 节	参数法	189
第 7 节	反证法	202
第 8 节	分离常(参)数法	211
第 9 节	割补法、构造法和特值法	226
第 10 节	分析法和综合法	234
第 11 节	合情推理与演绎推理	242

第一篇 数学思想方法概述

数学思想是数学的灵魂，数学方法是数学的行为。运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程，当这种量的积累达到一定程度时就产生了质的飞跃，从而上升为数学思想。如果把数学知识看作由一幅构思巧妙的蓝图而建筑起来的一座宏伟大厦，那么数学方法相当于建筑施工的手段，而这张蓝图就相当于数学思想。教会学生正确运用数学思想方法学习数学或解题，有利于对知识进行比较归类，只有这样，才能把所学知识学得系统，学得灵活，才能把所学的知识真正纳入到学生的知识结构中去，变成自己的财富。

数学思想是人们对现实世界空间形式和数量关系的本质的认识，是思维加工后的产物，它隐藏在数学概念、法则、公式、公理、定理、方法等知识的背后，反映了这些知识的共同本质。它比一般的数学概念和数学方法具有更高的概括性和抽象性，因而更深刻、更本质。数学思想是数学知识的核心，是数学的精髓和灵魂。简言之，数学思想是对数学概念、方法和理论的本质认识。

数学方法，顾名思义，就是人们从事数学活动时所使用的方法。

人们往往将数学思想和数学方法合为一谈，称之为数学思想方法，可见两者之间既有区别又有密切的联系，但要想将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的。因此，人们常常对这两者不加区分，而统称为数学思想方法，这样研究问题更为方便。

中学数学教材中的思想方法有：抽象概括、化归、数形结合、数学模型、归纳猜想、分类、类比、特殊化、演绎、完全归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法。从中可以看出，中学数学中确实蕴含了丰富的数学思想方法内容，不但方法的种类多，而且某些方法反复出现并应用，这说明在数学教学中加强数学思想方法教学不但具有重要意义，而且现实可行，是一个颇具开发价值的研究课题。

数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴含在数学知识发生、发展和应用的过程中。日本数学家米山国藏曾说过这样一段话：“学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一两年就忘掉了。然而不管他们从事什么职业，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着作用。”理论研究和人才成长的轨迹都表明，数学思想方法在人的能力培养和素质提高方面具有重要作用，因此，对数学思想方法的考查也是高考数学能力考查的必然。

高考数学试题重在考查对知识理解的准确性、深刻性，重在考查知识的综合灵活运用。它着眼于知识点新颖巧妙的组合，试题新而不偏，活而不过难；着眼于对数学思想方法、数学能力的考查。高考命题这种积极导向，决定了我们在教学中必须以数学思想指导知识、方法的运用，整体把握各部分知识的内在联系。只有加强数学思想方法的教学、优化学生的思维、全面提高数学能力，才能提高学生的解题水平和应试能力。

高考复习有别于新知识的教学。它是在学生基本掌握了中学数学知识体系、具备了一定的解题经验的基础上进行复习课教学，也是在学生基本认识各种数学基本方法、思维方法及数学思想的基础上进行复习课教学。其目的在于深化学生对基础知识的理解；完善学生的知识结构，在综合性强的练习中进一步形成基本技能，优化思维品质；使学生在多次的练习中充分运用数学思想方法，提高数学能力。高考复习是学生发展数学思想，熟练掌握数学方法理想的难得的教学过程。

高考对数学思想方法的考查是与数学知识的考查结合进行的，是通过对数学知识的考查来反映考生对数学思想和方法理解和掌握的程度。国家教育部考试中心在全国高考数学考试大纲中明确指出必考的数学思想方法：

数学基本方法包括：待定系数法、换元法、配方法、割补法、反证法等；

数学逻辑方法(或思维方法)包括：分析与综合、归纳与演绎、比较与类比、具体与抽象等；

数学思想包括：函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或与必然的思想等。

【高考链接】中学数学思想方法是指渗透在中学数学知识与方法中具有普遍适应性的本质思想. 中学数学涉及的数学思想主要有: 函数与方程思想, 数形结合思想, 分类与整合思想, 化归与转化思想, 特殊与一般思想, 有限与无限思想, 或然与必然思想等. 数学思想方法是理解、思考、分析与解决数学问题的普通方法, 高考对数学思想方法的考查一般是结合数学知识多层次进行. 数学思想方法贯穿于一套高考试卷解答的始终.

1. 高考对函数与方程思想进行重点考查, 通常使用选择题和填空题考查函数与方程思想的简单应用, 而在解答题中, 则从更深的层次, 在知识网络的交汇处, 从思想方法与相关能力综合的角度进行较为深入的考查.

2. 高考对数形结合思想进行重点考查, 一个方面是用选择题、填空题进行考查, 数形结合思想用于简捷地解答一些选择题、填空题, 另一方面在解答题中, 通过画图, 往往能激发解题灵感. 如函数的解答题, 在解答书写的过程中, 一般不必画出函数图象, 但解题思路又必须依赖于函数图象, 这是在解答题中考查数形结合思想的一种形式.

3. 高考把对分类与整合思想的考查放在比较重要的位置, 并以解答题为主进行考查.

4. 高考中十分重视对化归与转化思想的考查, 要求考生熟悉数学变换的思想, 在变换思想指导下, 针对面临的数学问题, 实施或变换问题的条件, 或变换问题的结论, 或变换问题的内在结构, 或变换问题的外部表现形式去灵活解决有关的数学问题. 高考中重点考查一些常用的变换方法, 如一般与特殊的转化、繁与简的转化、命题的等价转化、空间图形与平面图形的转化、数与形的转化等.

5. 在高考中, 会有意设计一些能集中体现特殊与一般思想的试题, 如利用归纳的方法进行猜想的试题; 设计由平面到空间、由空间到平面, 通过特殊和一般进行类比猜想的试题; 选择题中还特别着重考查特殊与一般思想, 突出体现特殊化方法的作用. 通过构造特殊函数、特殊数列, 寻找特殊点, 确定特殊位置, 利用特殊值、特殊方程等, 研究解决一般问题、抽象问题、运动变化的问题、不确定的问题, 等等.

6. 高考中对有限与无限思想的考查, 既可单独考查, 也可在考查其他数学思想和方法的过程中同时考查. 例如: 在使用由特殊到一般的归纳

思想时,含有有限与无限的转化思想;在使用数学归纳法证明时,解决的是无限的问题,体现的也是有限与无限思想;等等.

7. 高考对必然与或然的思想考查主要通过概率统计进行, 高考中对概率与统计的考查已放在了重要的位置. 通过对随机事件、等可能性事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、古典概型、几何概型、条件概率、独立重复试验与二项分布、超几何分布、离散型随机变量的分布列、离散型随机变量的期望值和方差、抽样方法、总体分布的估计等重点内容的考查,一方面考查基本概念和基本方法,另一方面考查在解决实际问题中能否运用或然与必然的辩证关系,从而体现了或然与必然思想.

【考点透析】

1. 函数与方程的思想: 函数思想的实质是抛开所研究对象的非数学特征,用联系和变化的观点提出数学对象,抽象其数学特征,建立各变量之间固有的函数关系,通过函数形式,利用函数的有关性质(定义域、值域、最值、奇偶性、单调性、周期性等),使问题得到解决. 方程思想的实质是,将所求的量设成未知数,用它表示问题中的其他各量,根据题中隐含的等量关系,列方程(组),通过解方程(组)或对方程(组)进行研究,以求得问题的解决.

2. 数形结合的思想: 数形结合思想,就是根据数与形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想,包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面.

3. 分类与整合的思想: 在解某些数学问题时, 我们常常会遇到这样一种情况: 解到某一步之后, 发现问题的發展是按照不同的方向进行的. 当被研究的问题包含了多种情况时, 就必须抓住主导问题发展方向的主要因素, 在其变化范围内, 根据问题的不同发展方向, 划分为若干部分分别研究. 这里集中体现的是由大化小、由整体化为部分、由一般化为特殊的解决问题的方法, 其研究的基本方向是“分”, 但分类解决问题之后, 还必须把它们整合在一起, 这种“合—分—合”的解决问题的思想, 就是分类与整合思想.

4. 化归与转化的思想: 化归与转化思想本质含义: 在解决一个问题时人们的眼光并不落在结论上, 而是去寻觅、追溯一些熟知的结果, 由此将问题化难为易, 化繁为简, 化大为小, 各个击破, 达到最终解决问题的

目的. 解题过程具有灵活性与多样性的特点. 化归变换原则的结构中蕴含着三个基本要素, 即变换的对象、目标和方法. 变换的对象就是待解决问题中需要变更的问题, 变换的目标是指所要达到的规范问题, 变换的方法就是规范化的手段、措施和技术. 变换的方法是实现变换的关键. 一个数学问题, 我们可以视其为一个数学系统或数学结构, 组成其要素之间的关系是可变的, 但寻求变形的方法并不唯一. 所以, 应用数学变换的方法去解决有关数学问题时, 就没有一个统一的模式可以遵循, 需要我们依据问题本身所提供的信息, 利用所谓的动态思维, 去寻找有利于问题解决的变换途径和方法, 并从中进行选择, 做到生疏变换成熟悉、复杂变换成简单、抽象变换成直观、含糊变换成明朗.

5. 特殊与一般的思想: 人们对一类新事物的认识往往是从这类事物中的个体开始的. 通过对某些个体的认识与研究, 逐渐积累对这类事物的了解, 逐渐形成对这类事物总体的认识, 发现特点, 掌握规律, 形成共识, 由浅入深, 由现象到本质, 由局部到整体, 这种认识事物的过程是由特殊到一般的认识过程. 但这并不是目的, 还需要用理论指导实践, 用所得到的特点和规律解决这类事物中的新问题, 这种认识事物的过程是由一般到特殊的认识过程. 于是这种由特殊到一般再由一般到特殊反复认识的过程, 就是人们认识世界的基本过程之一. 数学研究也不例外, 这种由特殊到一般、由一般到特殊的研究数学问题的思想, 就是数学研究中的特殊与一般思想. 在数学学习过程中, 对公式、定理、法则的学习往往都是从特殊开始, 通过归纳总结得出结论, 经过证明后, 又利用它们来解决相关的数学问题. 在数学学习中经常使用归纳、演绎等方法分析、探索数学问题中的规律和结论, 这些方法就是特殊与一般思想方法的集中体现, 也是高考考查的重点之一.

6. 有限与无限的思想: 有限与无限相比, 有限显得具体, 无限显得抽象, 对有限的研究往往先于对无限的研究, 对有限个对象的研究往往有章法可循, 并可以积累一定的经验. 而对无限个对象的研究, 却往往不知如何下手, 显得经验不足, 于是将对无限的研究转化成对有限的研究, 就成了解决无限问题的必经之路. 反之, 当积累了解决无限问题的经验之后, 可以将有限问题转化成无限问题来解决. 这种无限化有限、有限化无限的解决数学问题的方法就是有限与无限思想.

7. 必然与或然的思想： 世间万物是千姿百态、千变万化的，人们对世界的了解、对事物的认识是从不同侧面进行的，人们发现事物或现象可以是确定的，也可以是模糊的，或随机的．为了了解随机现象的规律性，便产生了概率论的数学分支．概率是研究随机现象的学科，随机现象有两个最基本的特征：一是结果的随机性，即重复同样的试验，所得到的结果未必相同，以至于在试验之前不能预料试验的结果；二是频率的稳定性，即在大量重复试验中，每个试验结果发生的频率“稳定”在一个常数附近．了解一个随机现象就是知道这个随机现象中所有可能出现的结果，知道每个结果出现的概率．知道这两点就说明对这个随机现象研究清楚了．概率研究的是随机现象，研究的过程是在“偶然”中寻找“必然”，然后再用“必然”的规律去解决“偶然”的问题，这其中所体现的数学思想就是必然与或然思想．

第二篇 数学思想

第1节 函数与方程的思想

要点概述

函数是高中代数内容的主干，它主要包括函数的概念、图象和性质，重点介绍了几类典型的函数．函数的思想是对函数内容在更高层次上的抽象、概括与提炼，是从函数各部分内容的内在联系和整体角度来考虑问题、研究问题和解决问题．具体来说，函数思想就是用运动和变化的观点，集合与对应的思想，即用函数的观点去分析和研究数学问题中的数量关系，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题，从而使问题得到解决，是对函数概念的本质认识．函数思想贯穿于高中代数的全部内容，它是在学习指数函数、对数函数及三角函数的过程中逐渐形成，并为研究这些函数服务的．在研究方程、不等式、复数、数列、解析几何等其他内容时，函数思想也起着十分重要的作用．

方程是初中代数的主要内容．初中阶段主要学习了几类方程和方程组的解法，但在初中阶段很难形成方程的思想．所谓方程的思想，就是分析、研究数学问题中变量间的关系，通过设未知数、列方程(不等式)或方程(不等式)组，解方程(不等式)或方程(不等式)组等步骤，达到求值目的之解题思路和策略，它是解决各类计算问题的基本思想，是运算能力的基础，或者运用方程的性质去分析、转化问题，使问题得到解决，是对方程概念的本质认识．

函数思想与方程思想是密切相关的．函数与方程、不等式是通过函数值等于零、大于零或小于零而相互关联的，它们之间既有区别又有联系．函数与方程的思想，既是函数思想与方程思想的体现，也是两种思想综合运用的体现，更是研究变量与函数、相等与不等过程中的基本数学思想．