拓扑学基础

郭英新　毛安民　编著

科学出版社

拓扑学基础

郭英新　毛安民　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

基础拓扑学是数学的重要分支，内容丰富且应用面广. 本书以点集拓扑学为基础，通过对一般拓扑学、测度论、拓扑向量空间、拓扑群及拓扑动力系统的一些专题进行论述，向读者简要介绍拓扑学中的一些基本知识、研究思想以及解决问题的方法，以较少的篇幅展现拓扑学中的一些主要内容. 本书主要内容包括：集合与序集、可测映射与可测空间、拓扑空间、几类重要的拓扑性质、紧空间与度量空间、广义度量空间、拓扑向量空间简介、动力系统与拓扑群简介和不动点理论简介. 目的是向读者简要介绍基础拓扑学中的一些基本内容、研究思路和解决问题的方法.

本书是十多年来作者在拓扑学应用基础方面教学和科研的总结，可作为数学、统计学以及其他理工类各专业高年级本科生、研究生的教材，也可作为教师及相关工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学基础/郭英新，毛安民编著. —北京：科学出版社，2018.11
ISBN 978-7-03-059576-8

I. ①拓… II. ①郭… ②毛… III.①拓扑–研究 IV. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 260766 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 11 月第一次印刷 印张：14 1/4
字数：287 000
定价：45.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

点集拓扑的概念几乎全部来自于分析的严格化过程，来源于对非常态函数的研究．十九世纪至二十世纪初，各种非常态函数大量出现，使人意识到直观是靠不住的，大量熟知的概念需要澄清和重新认识．比如连续性、连通性，以及数学分析中的一致连续、一致收敛等概念．于是需要建立一整套抽象且符合逻辑和数学需要的概念，点集拓扑学应运而生．为了避免现代点集拓扑学的过度抽象化使人难以理解，我们在编写本书时注意了以下两点．

(1) 较多地使用图形和例题．作为公理化处理的结果，现代点集拓扑学的原理具有高度抽象化的特点．而例题教学法，是现代教育教学的重点内容．本书编写了许多例题，编者希望借助这些通俗易懂、更接地气的各个数学分支的例题，使得学生可以更轻松地学好拓扑学．同时考虑到在数学研究中，直觉和图像非常重要，所以本书插入了大量的图形作为概念、定理、性质和例题的直观说明．这对读者理解本书内容、引导他们产生学习的兴趣，甚至培养数学研究的能力都有重大意义．

(2) 注意学习的目的．本书选编了与点集拓扑学相辅相成的一些理论．这一点是为了使学生能更好地理解和掌握点集拓扑学知识，更是为了应用，也为将来的学习和研究打下基础．例如，本书在集合论之后极自然地选编了一章与拓扑空间及连续映射具有类似结构的可测映射与可测空间；还增加了拓扑向量空间简介一章，使得原本只能进行集合间的并、交和差运算的拓扑学，又可以进行元素间的加、减及数乘运算．最后还引入了动力系统与拓扑群简介和不动点理论简介这两章应用性较强的内容．

本书的编写得到了山东省数学一流学科建设奖补资金、国家自然科学基金 (10801088, 11471187)、中国博士后科学基金 (2014M551738) 和山东省自然科学基金 (ZR2017MA045) 的资助，在此表示感谢！

全书共 10 章，其中第 1 章是基础，第 2, 3 章是引入，第 4—7 章是主要内容，第 8—10 章是应用．

限于编者的视野和水平，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评和指正，联系邮箱：yxguo312@163.com.

编　者

2018 年 1 月于曲阜师范大学

符　号　表

$\in (\notin)$	属于 (不属于)
$\subset$	包含
$\bigcup (\bigcap)$	集合的并 (交)
$A - B$	集合 A 与集合 B 的差
$\overline{A}$	集合 A 的闭包
$\mathring{A}$	集合 A 的内部
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
A'	集合 A 的补集
A^d	集合 A 的导集
$A = B$	集合 A 等于集合 B
$\mathcal{P}(X)$	集合 X 的幂集
$X \to Y$	从 X 到 Y
$\Rightarrow$	推出
$\times$	笛卡儿积
$\partial(A)$	集合 A 的边界
$g \circ f$	关系 g 与关系 f 的复合
$\mathcal{A}$	集族
$\{a, b, c\}$	由 a, b, c 作为元素的集合
a^{-1}	元素 a 的逆元
$\sim$	等价关系
f^{-1}	关系 f 的逆关系
$B(x, \varepsilon)$	以 x 点为球心, 以 ε 为半径的球形邻域
$A + B$	向量空间中的两个集合 A, B 的和
λA	向量空间中的集合 A 与实数 λ 的数乘
$\varnothing$	空集
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\mathcal{U}_x$	点 x 的邻域系

目　　录

第 1 章 集合论基础

集合论产生于十九世纪七十年代, 是由德国著名数学家康托尔 (Cantor, 1845–1918) 创立的, 如今已发展成为一个独立的数学分支. 它是整个现代数学的逻辑基础, 其基本概念与方法已渗入现代数学各个领域.

1.1 集 合

我们在前期课程中已经接触过集合的概念. 集合是现代数学中一个最基本的概念, 它是唯一一个难以严格定义, 只能给予一种描述的数学概念. 集合这个概念出现于数学的各个分支. 所谓集合, 指的是具有一定性质的对象的全体. 一个集合确切地指定了一堆事物, 直观地说, 集合是作为整体上的一堆东西. 其中的个体称为集合的元素. 我们通常用大写英文字母 A, B, X, Y 等表示集合, 用小写英文字母 a, b, c 等表示集合中的元素. 对于集合 X, 如果 x 是集合 X 的元素, 则说 x 属于 X, 记作 $x \in X$; 如果 x 不是集合 X 的元素, 则称 x 不属于 X, 记作 $x \notin X$.

例 1.1.1 设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, 则 $1 \in A$, $0 \notin A$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\varnothing$. 譬如, 一个无解的线性方程组的解集合就是空集. 把空集合看作集合, 同把 0 也看作数一样, 在数学上是有好处的. 只含一个元素 x 的集合记作 $\{x\}$, 称之为单点集. 通常用特定字母来表示一些最常用的集合, 如字母 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 等分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集.

集合的表示法

(1) 列举法: 如果可能的话, 把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方法称为列举法. 例如, 大于 0 小于 9 的全体奇数的集合可记为 $\{1, 3, 5, 7\}$.

(2) 描述法: 把集合中所有元素的共同属性以文字或数学表达式的方式描述出来, 写在大括号内表示集合的方法称为描述法. 这种方法可写成 $M = \{x | x$ 具有的性质$\}$, 例如, 方程 $xy = 1$ 的全部解的集合可写成

$$M = \{(x, y) | xy = 1\}.$$

例 1.1.2 以下所定义的实直线上的区间经常在数学中出现, 其中 a 与 b 都是实数, 且 $a < b$.

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

如果两个集合 X,Y 有完全相同的元素, 即 X 的元素都属于 Y, 并且 Y 的元素也都属于 X, 则称它们相等, 记作 $X=Y$. $X=Y$ 的否定命题记为 $X\neq Y$.

如果集合 A 的元素全是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 空集是任何一个集合的子集. $A\subset B$ 的否定命题记为 $A\not\subset B$ 或 $B\not\supset A$, 其意义为: 存在 $x\in A$, 满足 $x\notin B$. 当 $A\subset B$ 而 $A\neq B$ 时, 称 A 为 B 的一个真子集, 或说 B 真包含 A. 注意: 有些作者用符号 $\subseteq$ 来表示子集, 而符号 $\subset$ 只用于表示真子集. 明显地, $X=Y$ 当且仅当 $X\subset Y$, $X\supset Y$.

以下的这个定理等价于形式逻辑中的相应命题, 从直觉去看也是自明的.

定理 1.1.1　设 A,B,C 都是集合, 则

(1) $A=A$;

(2) 若 $A=B$, 则 $B=A$;

(3) 若 $A=B,B=C$, 则 $A=C$.

定理 1.1.2　设 A,B,C 都是集合, 则

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$, $B\subset A$, 则 $B=A$;

(3) 若 $A\subset B$, $B\subset C$, 则 $A\subset C$.

有时我们要讨论以集合作为元素的集合, 这类集合常称为集族, 并用花斜体, 如 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 等表示. 例如, $\mathcal{A}=\{\{1\},\{1,2\},\{a,b,3\}\}$ 是一个集族, 它的三个元素分别为集合: $\{1\},\{1,2\},\{a,b,3\}$.

设 X 是一个集合, 我们常用 $\mathcal{P}(X)$ 或 2^X 来表示 X 的所有子集构成的集族, 称为集合 X 的幂集. 例如, 集合 $\{a,b\}$ 的幂集是 $\{\{a\},\{a,b\},\{b\},\varnothing\}$. 一般地, 当集合 X 是由 n 个元素构成的有限集时, 则 $\mathcal{P}(X)$ 含有 2^n 个元素.

1.2　集合的运算

两个集合 A 和 B 的并, 记为 $A\bigcup B$, 是指这样的集合, 它由 A 的所有元素和 B 的所有元素所构成 (图 1.1), 即

$$A\bigcup B:=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

其中 “或” 是表示 “与/或” 的意思.

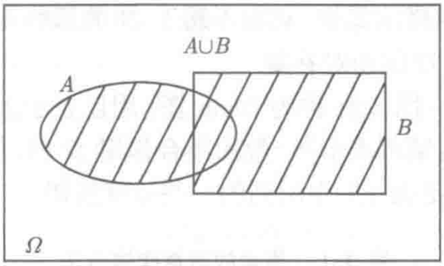

图 1.1 集合的并

两个集合 A 和 B 的交, 记为 $A\bigcap B$, 是指这样的集合, 它由既属于 A 又属于 B 的那些元素所构成 (图 1.2), 即

$$A\bigcap B := \{x|x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$

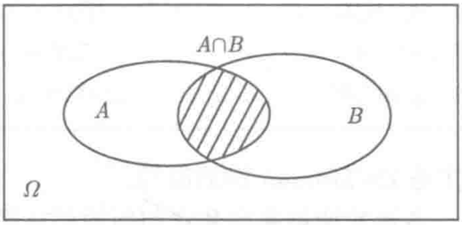

图 1.2 集合的交

若 $A\bigcap B = \varnothing$, 即 A 和 B 没有相同的元素, 则称 A 和 B 互斥或不相交; 如果一个集族中的任何两个集合都互斥, 则称为互斥集族.

B 的相对于 A 的相对补集, 或简称为 A 与 B 之差, 记作 $A-B$, 是指这样的集合, 它由属于 A 而不属于 B 的那些元素所构成 (图 1.3), 即

$$A-B := \{x|x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}.$$

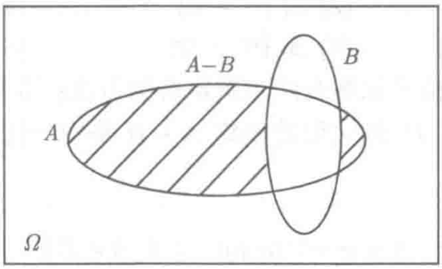

图 1.3 集合的差

显然 $A-B$ 和 B 是互斥的, 即 $(A-B)\bigcap B = \varnothing$.

在集合论的诸多实际应用中, 所考察的集合一般都是某一个确定集合的一些子集. 这个确定的集称为宇宙集. 集合 B 的绝对补集或简称为 B 的补集或简称为 B

的余集, 记为 B', 是指这样的集合, 它由不属于 B 的那些元素所组成. 也就是当集合 A 是宇宙集时, 集合 B 的相对补集.

例 1.2.1　(图 1.1—图 1.3) 称为 Venn 图, 用以表示上述的集合运算, 其中宇宙集 Ω 由整个矩形的区域所表示, 一般的集合都用 Ω 内区域表示.

上述集合的运算满足表 1.1 中所列的一些运算规律.

表 1.1　集合的运算律表示法

名称	集合的并运算	集合的交运算
幂等律	$A\bigcup A = A$	$A\bigcap A = A$
结合律	$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$	$(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$
交换律	$A\bigcup B = B\bigcup A$	$A\bigcap B = B\bigcap A$
分配律	$A\bigcup(B\bigcap C)= (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$	$A\bigcap(B\bigcup C)= (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$
恒等律	$A\bigcup\varnothing = A,\ A\bigcup\Omega = \Omega$	$A\bigcap\varnothing = \varnothing,\ A\bigcap\Omega = A$
互补律	$A\bigcup A' = \Omega,\ (A')' = A$	$A\bigcap A' = \varnothing,\ \Omega' = \varnothing,\ \varnothing' = \Omega$
D. M. 律	$(A\bigcup B)' = A'\bigcap B'$	$(A\bigcap B)' = A'\bigcup B'$

注 1.2.1　D. M. 律是 De Morgan 律的简写.

注 1.2.2　以上每一条运算律都是由和它相似的语言逻辑规律导出的. 例如

$$\begin{aligned} A\bigcap B &= \{x:\ x\in A \text{ 并且 } x\in B\} \\ &= \{x:\ x\in B \text{ 并且 } x\in A\} \\ &= B\bigcap A. \end{aligned}$$

关于集合的包含关系和集合的运算之间有以下定理.

定理 1.2.1　以下各条是等价的:

(1) $A\subset B$;　(2) $A\bigcap B = A$;　(3) $A\bigcup B = B$;

(4) $B'\subset A'$;　(5) $A\bigcap B' = \varnothing$;　(6) $A'\bigcup B = \Omega$.

下面介绍一种新的由已知集合产生新集合的方法: 笛卡儿积法.

已知两个集合 A 与 B, 则它们的积集 $A\times B$ 是由一切有序偶 (a,b) 所构成的, 其中 $a\in A,\ b\in B$, 即

$$A\times B = \{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}.$$

这种记法就是解析几何上建立了平面直角坐标系的平面上点的坐标写法, 其中 a 称为第一个坐标, b 称为第二个坐标. 当然积集这个概念用到了有序对的概念, 它可以像集合那样, 作为一个原始概念; 也可以将其定义为一种集族, 如 $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$. 注意 (a,b) 在数学分析中曾表示区间, 本书中, 它是积集还是区间,

用到时可以根据上下文判断. 此外, 积集的概念可自然地推广到有限个集上去, 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的积集, 记为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \quad \text{或} \quad \prod_{i=1}^{m} A_i$$

是由一切 m 有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 所构成的, 其中对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$, $a_i \in A_i$.

注意: 有序偶 (a, b) 与集合 $\{a, b\}$ 是两个不同的概念. 后者中 a, b 是不同的两个元素, 并且无关顺序, 即 $\{a, b\} = \{b, a\}$.

例 1.2.2 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$, 则它们的积集为

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.$$

如图 1.4 所示.

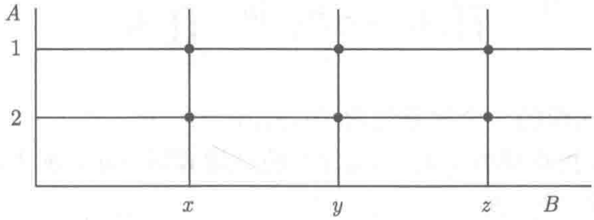

图 1.4 集合的笛卡儿积

1.3 指标集及其运算

一个指标集族是 $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ 或 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. 它对每一个 $\gamma \in \Gamma$, 都有一个 A_γ 与之对应. 集合 Γ 叫做指标集, 每个 $\gamma \in \Gamma$ 叫指标. 当指标集 Γ 是自然数集时, 相应的指标集族 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$ 称为一个集合序列, 简称集列. 指标集族在本书中有时也常常写作 $\{A_i | i \in I\}$ 或 $\{A_j | j \in J\}$ 等.

1.3.1 集合运算的一般化

两个集合的并及交的概念可以推广到任何集族上去. 一个集族 $\mathcal{A}$ 中所有集合的并, 记为 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, 是指所有这样的元素所构成集合, 这些元素的每一个至少是 $\mathcal{A}$ 中某个集合的元素, 即

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x | \text{ 存在 } A \in \mathcal{A}, \text{满足 } x \in A\}.$$

一个集族 $\mathcal{A}$ 中所有集合的交, 记为 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, 是指所有这样的元素所构成集合,

这些元素的每一个属于 $\mathcal{A}$ 中每一个集合, 即

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A=\{x|\ \text{对任意的 } A\in\mathcal{A}, \text{都有 } x\in A\}.$$

对于任何指标集族 $\mathcal{A}=\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$, 它们的并记为 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$, 交记为 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$.

如果 $A\bigcap B=\varnothing$, 那么 $A\bigcup B$ 也可以记作 $A\oplus B$, 称为 A, B 的直和. 若集族 $\mathcal{A}$ 中其所有的元素两两不交, 则 $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A$ 可以记作 $\sum_{A\in\mathcal{A}}A$. 一般情形有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n,$$

其中 $B_n=A_0'\bigcap A_1'\bigcap\cdots\bigcap A_{n-1}'\bigcap A_n$, $A_0=\varnothing$.

指标集族 $\mathcal{A}=\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 的笛卡儿积 (Cartesian product) 记为

$$\prod\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\quad \text{或}\quad \prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma.$$

若 $a_\gamma\in A_\gamma$, 笛卡儿积的一个元素记为 $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

注 1.3.1　在指标集族 $\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 的交运算时, 为了避免逻辑上的困难, 我们总是假定指标集 $\Gamma\neq\varnothing$.

例 1.3.1　已知 $\Gamma=(0,1]$, 且对每个 $\gamma\in\Gamma$, $A_\gamma=[-\gamma,\gamma)$, 则

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=[-1,1),\qquad \bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=\{0\}.$$

对于一般化的集合运算来说, 分配律和 D. M. 律也成立.

定理 1.3.1　对于任何集族 $\mathcal{A}=\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 及任何集合 B, 有

(1) $B\bigcap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(B\bigcap A_\gamma)$;

(2) $B\bigcup\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(B\bigcup A_\gamma)$;

(3) $B-\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(B-A_\gamma)$;

(4) $B-\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(B-A_\gamma)$.

在 D. M. 律中, 当集合 B 是宇宙集时, 我们有如下推论.

推论 1.3.1

(1) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$;

(2) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)'=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$.

1.3.2 集合序列的极限

和数学分析中数列的极限类似, 我们也可以定义集列的上、下极限集.

定义 1.3.1 对于集列 $\{A_n:\ n\geqslant 1,\ n\in\mathcal{N}\}$, 以下集合

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n := \{x:\ x \text{ 属于无穷多个 } A_n(n\geqslant 1)\}$$

称为集列 $\{A_n:\ n\geqslant 1,\ n\in\mathcal{N}\}$ 的上极限集.

易证

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to\infty} A_n &\Longleftrightarrow \{x:\ x \text{ 属于无穷多个 } A_n(n\geqslant 1)\}\\
&\Longleftrightarrow \text{对每一个 } n\geqslant 1,\ \text{都存在一个 } m_n(x)\geqslant n, \text{满足 } x\in A_{m_n(x)}\\
&\Longleftrightarrow \text{对每一个 } n\geqslant 1,\ x\in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\\
&\Longleftrightarrow x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.
\end{aligned}$$

定义 1.3.2 对于集列 $\{A_n:\ n\geqslant 1,\ n\in\mathcal{N}\}$, 以下集合

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n := \{x:\ x \text{ 至多不属于有限多个 } A_n(n\geqslant 1)\}$$

称为集列 $\{A_n:\ n\geqslant 1,\ n\in\mathcal{N}\}$ 的下极限集. 显然, 集列 $\{A_n\}$ 下极限集等价于

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{x:\ \text{存在正整数 } n_0(x), \text{使得当 } n>n_0(x) \text{ 时},\ x\in A_n(n\geqslant 1)\}.$$

类似地有

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m;$$

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

例 1.3.2 设 $A_{2n-1}=A,\ A_{2n}=B(n=1,2,\cdots)$, 则

(1) $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = A\bigcup B$;

(2) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = A\bigcap B$.

证明 (1) 若 $x\in A\bigcup B$, 不妨设 $x\in A$, 于是有 $x\in A_{2n-1}(n=1,2,\cdots)$. 由上极限的定义知

$$x\in \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

故有

$$A\bigcup B \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

另一方面, 设 $x \in (A\bigcup B)'$, 即 $x \notin A\bigcup B$, 于是 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$. 故 $x \notin A_n(n = 1, 2, \cdots)$, 因此

$$x \notin \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

即

$$x \in \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)'.$$

于是有

$$(A\bigcup B)' \subset \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)'.$$

此即

$$A\bigcup B \supset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

所以

$$A\bigcup B = \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

(2) 若 $x \in A\bigcap B$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B$, 于是有 $x \in A_n(n = 1, 2, \cdots)$. 由下极限的定义知

$$x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n,$$

故有

$$A\bigcap B \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

另一方面, 设 $x \in (A\bigcap B)'$, 即 $x \notin A\bigcap B$, 于是 $x \notin A$ 或者 $x \notin B$. 不妨设 $x \notin A$, 即 $x \notin A_{2n-1}(n = 1, 2, \cdots)$, 因此

$$x \notin \varliminf_{n\to\infty} A_n,$$

即

$$x \in \left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)'.$$

于是有

$$(A\bigcap B)' \subset \left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)'.$$

此即

$$A\bigcap B \supset \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

所以

$$A\bigcap B = \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

例 1.3.3 设 A_n 是如下定义的集列 (实数的闭区间):

$$A_{2n+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{n+1}\right], \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

$$A_{2n} = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求集列 A_n 的上、下极限.

解 因为闭区间 $[0,1]$ 中的点属于每一个 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$[0,1] \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

对于区间 $(1,2]$ 中的每个点 x, 必存在正整数 $n_0(x)$, 使得当 $n > n_0(x)$ 时, $x > 1 + \dfrac{1}{n}$, 即 $x \notin A_{2n}$. 又区间 $[0,2]$ 以外的点不属于任何 A_n, 因此

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = [0,1].$$

对于区间 $(1,2)$ 中的每个点 x, 必存在正整数 $n_0(x)$, 使得当 $n > n_0(x)$ 时, $x < 2 - \dfrac{1}{n+1}$, 即 $x \in A_{2n+1}$. 又点 2 仅仅属于 A_2, 因此

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [0,2).$$

定理 1.3.2 设 A_n 是任一集列, 则

(1) $\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n\right)' = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n'$;

(2) $\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n\right)' = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n'$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)' &= (\{x:\ x \text{ 属于无穷多个 } A_n (n \geqslant 1)\})' \\ &= \{x:\ \text{有无穷多个 } A_n \text{ 不包含 } x\} \\ &= \{x:\ x \text{ 属于无穷多个 } A_n' (n \geqslant 1)\} \\ &= \varliminf_{n\to\infty} A_n'.\end{aligned}$$

类似地可证明 (2).

定义 1.3.3 如果有

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

则称集列 $\{A_n:\ n \geqslant 1,\ n \in \mathcal{N}\}$ 的极限集存在, 并以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示此极限集.