运筹学

基础

李小光 著

运筹学

YUNCHOUXUE
JICHU

西北大学出版社

运筹学基础

李小光 著

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/李小光著. —西安：西北大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5604-3570-1

Ⅰ.①运… Ⅱ.①李… Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①022

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第013261号

运筹学基础

著　　者：李小光
出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路229号
邮　　编：710069
电　　话：029-88303059
经　　销：全国新华书店
印　　装：西安华新彩印有限公司
开　　本：787毫米×1092毫米 1/16
印　　张：15.75
字　　数：370千
版　　次：2015年4月第1版
印　　次：2015年4月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5604-3570-1
定　　价：25.00元

前 言

运筹学是一门研究如何有效地组织和管理人机系统的科学。由于它同管理科学的紧密联系，它在研究解决实际问题时所蕴含的系统整体优化思想，以及从提出问题、分析建模、求解到方案实施的一整套严密科学的方法，使它对管理学科的发展和管理人才的培养起到重要作用。人们以“运筹帷幄，决胜千里”来称颂善于分析、精于判断的决策者。随着科学技术的不断发展，“大数据”时代的到来，人们面临的管理决策问题日趋复杂，科学的决策方法已经成为管理者、决策者必备的工具和方法，受到社会科学和自然科学领域的共同关注。

运筹学的内容非常丰富，应用也极其广泛，目前运筹学已成为经济管理类专业本科普遍开设的一门重要专业基础课和研究生层次的学位课；同时，运筹学内容也逐渐渗透到项目管理、精算等领域，成为一些工科专业的必修课程。

本书的编写历时 3 年，是作者在运筹学课程讲义的基础上，提炼自己的教学经验和体会，同时汲取众家之长修改而成的教科书。相比其他同类教材，本书深入浅出，便于读者阅读，淡化较复杂的理论论述和证明，加大了用例题来理解或说明运筹学理论的篇幅。本书引入的例题，基本上是典型的、具有实际应用性的、易教易学的、通俗易懂的。对于习题部分，完全是对本章节内容的理解与加深，所配的答案具有详细的解题过程。

本书在结构设计、内容甄选等方面得到了西北大学辛小龙教授的指导；在编写的过程中得到了西安石油大学王伟的支持和帮助；在出版过程中得到了西安工程大学、西安财经学院、西安航空学院的大力支持，受到国内外很多运筹学精品课程教材的启示，西北大学出版社的编辑更为本书的编辑出版花费了大量的辛勤劳动，在此一并表示感谢。

本书可作为高等学校本科生教材，并适用于多学时和少学时两种教学方式，同时可作为应用数学专业学生的教材和教学参考书，也可作为各类专业人员的自学参考书。对于从事经济管理的人员，作为查阅参考用书也是颇有裨益的。

一本好的教材，重在特色，贵在质量。为此需要不断磨砺，反复修改提高。由于作者水平有限，经验不足，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作者

2014 年 12 月

目 录

第一章 绪 论

运筹学（Operation Research 或 Operational Research，缩写为 OR）是用数学方法研究各种系统最优化问题的学科。它是采用科学的方法来决定如何最佳地运营和设计各种系统的一门学科。其研究方法是应用数学语言来描述实际系统，建立相应的数学模型并对模型进行研究和分析，据此求出模型的最优解；其目的是制定合理运用人力、物力和财力的最优方案，为决策者提供科学的决策依据；其研究对象是各种社会系统，可以是对新的系统进行优化设计，也可以是研究已有系统的最佳运营问题。因此，数学既是应用数学，也是管理科学，同时也是系统工程的基础之一。下面介绍运筹学的发展简史、运筹学的工作步骤、运筹学的应用领域等。

一、运筹学学科的发展

20 世纪 30 年代后期，英国军事管理部门召集了一批科学家（绝大部分为自然科学家），研究与防御有关的战略和战术问题，以便更有效地利用有限的军事资源，最成功地使用现有武器装备。早期的工作包括研究新式雷达的有效使用、野外火炮控制设备的效能以对付德军空中力量越来越严重的威胁。在鲍德西（Bawdsey）成立了关于作战控制技术的研究机构。1938 年，鲍德西研究小组负责人 A. P. Rowe 把他们从事的工作称为运筹学（Operational Research）。英国运筹小组的工作促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动，他们的工作包括反潜艇策略、深水炸弹起爆深度研究，美国人称之为运筹学（Operation Research）。这些早期的运筹学工作所使用的方法一般来说都极为浅显，但成效显著。人们开始认识到，利用定量分析方法研究实际问题、建立数学模型是行之有效的。

第二次世界大战以后，军事部门转而研究在各种作战条件下对现代和未来战争中武器系统的有效地、正确地、客观地分析和评价。企业部门的管理者也注意到运筹小组的成就，想利用运筹学方法解决产业部门内部新型的管理问题，提高生产率，增加利润，减少成本。政府部门在制定计划、进行决策时也试图采用运筹学方法。随着运筹学技术的推广应用，各国都先后成立了运筹学研究的专业学术机构。早在 1948 年，英国成立了运筹学俱乐部，并出版《运筹学》的专门学术刊物。1957 年，在英国牛津大学召开了第一届国际运筹学会议。以后每隔 3 年召开一次。1959 年成立了国际运筹学联合会（IFORS）。1956 年，我国成立了第一个运筹学小组，1980 年成立了全国运筹学学会，标志着运筹学作为一门学科，已经成为我国现代科学体系中一个重要组成部分。

60 年代初以来，美国愈来愈多的本科院校相继开设了运筹学课程及其有关的一系列课程。许多主要大学还纷纷设立关于运筹学的硕士和博士研究生课程。我国早在 50 年代中期，著名数学家华罗庚教授就在一些企业和事业单位积极推广和普及优选法、统筹法等

运筹学方法，取得了显著成效。70 年代后期，由于大力提倡系统工程在各个领域中的应用，作为系统工程主要基础理论之一的运筹学，也就更加受到重视。今天，我国有关高等院校不仅设置了运筹学专业，培养从事运筹学研究的人才，而且在管理科学、应用数学、交通运输、信息技术、工程管理等专业都将其作为重要课程，并普遍开设了运筹学的专业基础课。许多专业的硕士研究生（包括 MBA），也设置了运筹学作为学位课程。大量管理干部培训班、研讨班等也开设了有关这方面内容的课程。总之，当前运筹学正处在兴旺发达的时期。

二、运筹学方法论

运用运筹学处理问题时，首先要从系统观点来分析问题，即不仅要求提出需要解决的问题和希望达到的目标，而且还要弄清楚问题所处的环境和约束条件，包括：时间、地点、资金、原材料、设备、人力、能源、动力、信息、技术等环境和约束条件，以及要处理问题中的主要因素、各种环境和约束条件之间的逻辑关系。这就要求研究运筹学的人员同其他有关的行业专家一起，发挥各自的专业特长，从不同的角度出发，共同针对问题的性质来商讨问题的处理方法，并建立相应的运筹学模型，以寻求问题的最优解答。具体步骤如图 1－1 所示。

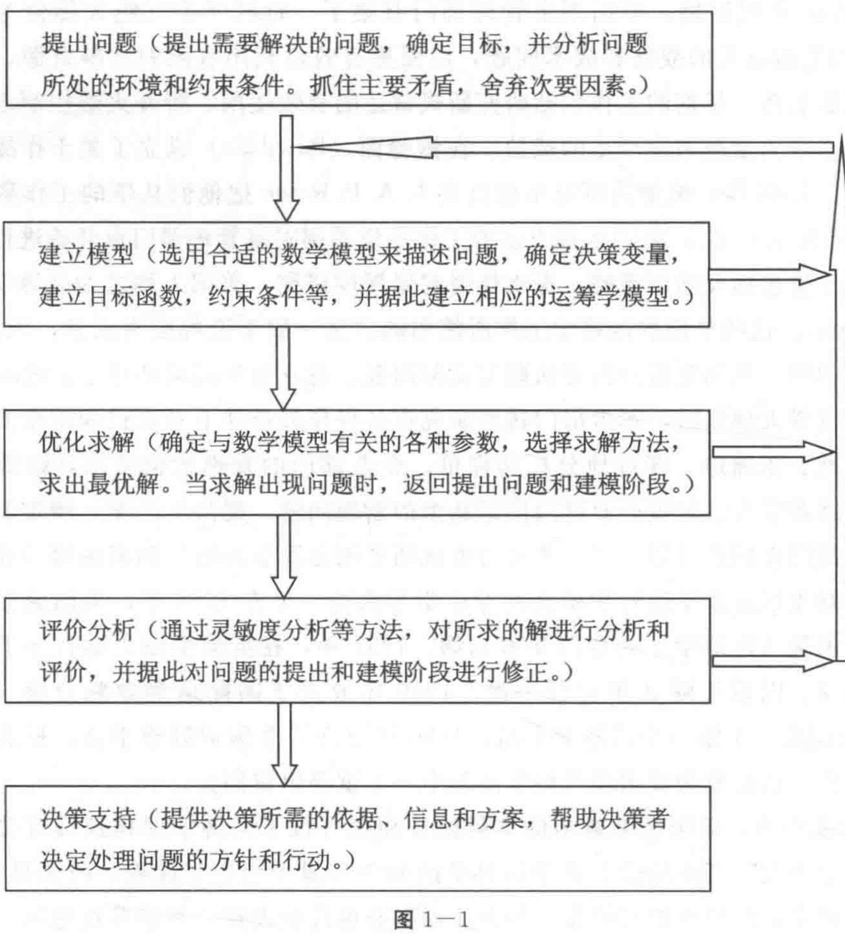

图 1—1

三、运筹学模型

运筹学的实质在于模型的建立和使用。一般情况下，模型可以定义为：对现实事物或问题的描述或抽象。运筹学的模型多数是数学模型，但也有图像模型和仿真模型。一般模型有如下特点：

(1) 简化描述。现实事物是相当复杂的，各种因素相互作用、相互影响。为了使模型能够求解并且便于求解，模型往往比现实本身描述得更为简单，即模型只是对现实事物中主要关系的描述和抽象。

(2) 核心描述。为了使得模型具有反映实际事物内在规律的能力，模型所描述的应该是事物的核心内容，即模型中不能忽略实际事物内在的核心因素和关系。

(3) 定量描述。模型应该既能反映各有关因素之间的逻辑关系，也能反映它们之间的数量关系。因此模型的描述是定量的。

利用模型来描述实际事物有许多优点：

(1) 利用模型可以对决策进行事前分析，避免决策失误所造成的损失，同时可以改变有关的条件和关系，寻求解决矛盾的方法。

(2) 模型符号语言便于交流，既能正确地描述问题，又不需要冗长的文字描述。因此，应用模型有利于对事物作更好地描述和理解。

(3) 模型既反映实际，又是现实事物的一种抽象，便于研究事物之间的共性，使模型达到现实性、简洁性和适应性的要求。

四、运筹学的分支及研究内容

基于研究的不同应用领域，运筹学逐步建立起描述各种活动的不同模型，发展各种不同的理论，从而形成不同的运筹学分支。时至今日，运筹学仍在不断发展和扩充，最主要的分支有以下几个：

(1) 线性规划（Linear Programming）。线性规划是在研究线性不等式或等式的限制条件下，使某一个线性目标取得最大（最小）值的问题。20 世纪 40 年代末，美国数学家 G. B. Dantzig 的求解方法，促使线性规划的方法和应用飞速发展。由于理论和计算方法比较成熟，线性规划在工业、农业、军事、经济、管理等方面有很多成功应用的实例。

(2) 整数规划（Integer Programming）。在线性规划模型中，一部分或全部变量要求为整数，这就构成了整数规划问题。最具代表性的解决整数规划的方法是割平面法和分支界定法，它们的共同特点是能化为多次的线性规划进行求解。

(3) 非线性规划（Nonlinear Programming）。在建立类似于线性规划的模型中，至少有一个非线性规划函数出现（无论是目标函数，还是约束条件），就称之为非线性规划问题。近 20 年来，非线性规划问题有了飞速发展。

(4) 多目标规划（Multiobjective Programming）。它是研究具有多个目标的规划问题的理论与方法的一个新的分支，应用广泛。

(5) 动态规划（Dynamic Programming）。它是运筹学最主要的分支。B. Bell-man 等

提出了解决这类多阶段决策问题的最优化理论，创建了解决这类问题的新方法——动态规划。

(6) 图论（Graph Programming）。运筹学中许多问题可以化为纯图论和网络问题，用图论的理论和方法求解十分方便。它也是运筹学的一个重要分支。

(7) 对策论（Theory of Games）。它是 J. Von Neumann 等受经济问题的启发而研究的一类具有某种特性的博弈问题。研究的主要对象是带有斗争行为的现象，在政治、军事、工业、农业、交通等许多领域有着广泛应用。

(8) 决策论（Decision Theory）。它研究的目的是从若干行动方案中合理地分析和决定满足一定要求的方案，是一个既实用又很有前途的运筹学新分支。

(9) 排队论（Queuing Theory）。排队论又称随机服务系统。它是研究拥挤现象和排队现象的一门学科。丹麦数学家 A. K. Erlang 做了开创性的工作。它在管理类各个领域都有十分广泛的应用。

(10) 存储论（Inventory Theory）。它研究在各种不同情况下的库存问题，形成数学模型，选择合理策略，使各项费用总和最小。

其主要分支情况为：

$$\text{运筹学主要分支}\begin{cases}\text{规划理论}\begin{cases}\text{线性规划}\\\text{整数规划}\\\text{非线性规划}\\\text{多目标规划}\\\text{动态规划}\end{cases}\\\text{图论}\\\text{对策论}\\\text{决策论}\\\text{排队论}\\\text{存储论}\end{cases}$$

五、本书内容

进入 21 世纪，我国社会各领域都迅速发展，科学的发展提出了培养管理科学高素质人才的要求。运筹学是管理科学的一门重要基础课。运筹学教育面临新的挑战和问题，根据人才的要求，本书从教学目标、教学内容和教学手段三个方面适应人才培养的需求，有利于学生的理解和学习。本书加强对学生解决实际问题能力的培养，结合实际的实践环节进行能力的培养，培养学生能真正走向社会，把学到的知识用到实际工作中。这既要求我们抛弃过去光讲理论而轻视实践的教学模式，也要求我们改变过去只讲模型而不重视实际问题的教学模式。同时，也要改变过去只讲简单计算而放弃实际问题模型计算的教学习惯。为做到这一点，本书加强针对实际问题建立模型和举例分析的内容，培养学生针对实际问题建立数学模型的能力，在内容上淡化较复杂的理论论述和理论证明以及复杂的人工计算内容。先要学会把理论知识用到实践中，然后需要的时候再去研究理论问题。

根据培养目标的要求，本书在编写过程中努力做到如下几点：

（1）重视运筹学基本理论、基本概念和基本方法的学习和训练，淡化较复杂的基础理论的论述证明，淡化较复杂的计算方法的指导训练。

（2）加强针对实际问题建立运筹学模型和案例分析的内容，重点培养学生针对实际问题建立数学模型的能力。

（3）书中部分案例是科研项目中的研究结果。通过学习这些案例，使学生在创新能力训练方面得到强化。

第二章 线性规划与单纯形法

线性规划就是将一些线性方程或线性不等式作为约束条件，求出线性目标函数的最大值或最小值。对于一般的线性规划问题，目标函数包括利润、费用、产量等，其约束条件涉及经济、生产活动、资源、运输等许多方面，因此，这种方法作为服务于经营管理领域的数学的一个分支而被广泛研究，并在经济、政治、社会生活等方面发挥着巨大威力。线性规划法在实际应用中，变量常常不止 2、3 个，100 个以上的情况也很多，近年来随着计算机的迅速发展，这类问题也变得能够快速准确地求解。单纯形法是美国数学家丹捷格（G. B. Dantzig）1947 年提出的一般线性规划求解方法，自此以后线性规划在计算机上趋向成熟，其应用也日趋广泛和深入。

本章主要介绍线性规划问题以及涉及的基本概念和基本知识，重点是求解线性规划问题的图解法和单纯形法，难点是理解单纯形法的思路和具体的计算过程。通过本章学习，能根据实际问题列出线性规划的数学模型；知道如何添加松弛变量和人工变量，将线性规划模型等价变换成标准形式；建立初始的单纯形表；选择入基变量和出基变量，对目标函数进行变量代换，判断迭代结束并求出最优解。

第一节 线性规划的概念

一、线性规划问题的导出

人们在现实社会活动中常常遇到两类问题：一类是当一项任务确定后，如何统筹安排，尽量做到以最少的资源消耗去完成；另一类是在已有一定数量的资源的条件下，如何安排使用它们，才能使得完成的任务最多。我们可以建立这样的数学模型：求出一组变量的值，使这组变量的一个目标函数达到极值，而这组变量必须满足一组给定的约束条件。

例 1 某工厂近期要安排生产甲、乙两种产品，产品甲需要用原料 A，产品乙需要用原料 B，由于两种产品都在一个设备上生产，且设备使用时间有限，管理者必须合理安排两种产品的产量，使得在资源有限的条件下获得最大利润。因此这个问题的决策目标是收益的最大化，研究者要根据这个目标需要收集以下数据：

（1）工厂两种原料存量以及可用设备工时数；

（2）甲、乙两种产品的单位产品需要的原料和设备工时数；

（3）甲、乙两种产品的单位产品利润。

这些数据可以通过调研或估算得出，如表 2—1 所示。

表 2－1

	产品甲	产品乙	资源限制
原料 A	1	0	6
原料 B	0	2	8
设备	2	3	18
单位利润（百万）	4	3	

为建立模型，引入如下变量：

x_1：产品甲的数量；x_2：产品乙的数量；Z：利润

由表 2－1 知，$Z = 4x_1 + 3x_2$。

目标是确定 x_1 和 x_2，使得利润 Z 最大，同时满足资源约束。

对于原料 A 和原料 B，有

$$x_1 \leqslant 6 \text{ , } 2x_2 \leqslant 8$$

对于设备工时，有

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18$$

此外，甲、乙两种产品数量不可能是负值，因此，有如下对变量非负的约束：

$$x_1 \geqslant 0 \text{ , } x_2 \geqslant 0$$

于是，问题的数学模型现在可以用代数式表述如下：

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 \leqslant 6 \\ 2x_2 \leqslant 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 max 是 maximize 的缩写，其含义为“最大化”，s. t. 是 subject to 的缩写，其含义是“受限制于……”。因此，上述数学表达式的含义是在满足给定的限制条件下，求使得 Z 达到最大的 x_1，x_2 的取值。

以上过程我们可以归纳出根据实际问题建立线性规划模型的步骤：

（1）根据管理层的要求确定决策目标和收集相关数据；

（2）确定要做出的决策，引入决策变量；

（3）确定对这些决策的约束条件和目标函数。

例 2 某铁器加工厂要制作 100 套钢架，每套要用长为 2.9 米、2.1 米和 1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问应如何下料，可使材料最省？

这是一个典型的在生产任务确定的条件下，如何合理地组织生产（下料），使所消耗的资源数量最少的问题。显然在长度确定的原料上截取三种不同规格的圆钢，有不同的下料方案，但是各种下料方案的基本原则是下料以后剩下的料头必须足够短，已不能再截下任何一种规格的圆钢，即料头的长度必须短于 1.5 米。由此可以归纳出 8 种不同的下料方

案，按料头长度逐步递增排序可得表 2－2。

表 2－2

下料方案 / 圆钢（米）	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
2.9	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5	3	1	2	0	3	1	0	4
料头（米）	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

由此，问题归纳为如何混合使用这 8 种不同的下料方案，来制造 100 套钢架，且要使剩余的料头总长为最短。

可假设 x_j（$j=1,2,\cdots,8$）表示用第 j 种下料方案的原料根数，目标是使料头总长度：

$$Z=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5+0.9x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

最小化。

100 套钢架生产任务的约束条件为

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_4+x_6&=100\\
2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7&=100\\
3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8&=100
\end{aligned}$$

同时要求 $x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,8)$ 且为整数。

由此，本例的合理下料问题可以抽象为如下数学模型：

$$\min Z=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5+0.9x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}
x_1+2x_2+x_4+x_6=100\\
2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7=100\\
3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8=100\\
x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,8)\text{ 且为整数}
\end{cases}$$

其中 min 是 minimize 的缩写，其含义为“最小化”。

二、线性规划问题的概念和模型

上面两个例子中所提出的问题，最终都归结为在变量满足线性约束条件的前提下，求使线性目标函数最大或最小的问题，这种问题称为线性规划问题。

定义 1 对于求取一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，使之既满足线性约束条件，又能够使线性目标函数取得极值的一类最优化问题称为线性规划问题。

线性规划问题也可以表示为

$$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\
\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\
x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{cases}\tag{2}
$$

这就是线性规划问题的数学模型。其中式（1）称为目标函数，式（2）称为约束条件。Z 称为目标函数，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为决策变量，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为价值系数或目标函数的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为资源常数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为技术系数。数学模型可以用更紧凑的方法表示为

$$\max(\min)Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\leqslant(=,\geqslant)b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)\\
x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n)
\end{cases}\tag{3}
$$

利用向量可表示为

$$\max(\min)Z=\boldsymbol{CX}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j\leqslant(=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\
x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n)
\end{cases}\tag{4}
$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为价值向量，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为决策变量向量，$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})$ 为决策变量 x_j 所对应的消耗向量，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 为资源向量。

利用矩阵符号也可表示为

$$\max(\min)Z=\boldsymbol{CX}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\mathrm{A}\boldsymbol{X}\leqslant(=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\
\boldsymbol{X}\geqslant 0
\end{cases}\tag{5}
$$

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ 是一个 $m\times n$ 阶矩阵，称为线性规划系数矩阵。

以上四种形式的线性规划模型在本书中会经常用到，必须掌握这四种形式之间的转换。

三、线性规划的标准型

线性规划问题有各种不同的形式，目标函数有的要求 max，有的要求 min；约束条件可以是“≤”，可以是“≥”形式的不等式，也可以是等式。决策变量一般是非负约束，但也允许在 $(-\infty,+\infty)$ 范围内取值，即无约束。将这种多形式的数学模型统一变换为标

准型。这里规定的标准形式为：目标函数的要求是 max，约束条件的要求是等式，决策变量的要求是取非负值。在标准型中规定各约束条件的约束常数 $b_i \geqslant 0$，否则等式两端乘以“-1”。

于是，线性规划标准型的四种形式分别为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

紧凑形式为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{7}$$

向量形式为

$$\max \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{8}$$

矩阵形式为

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \mathrm{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

符号的用法和意义与前面的规定相同。

四、线性规划的标准化

把一般的线性规划问题化为标准型的过程称为线性规划问题的标准化，以下讨论把一个一般的线性规划转换成标准型。

（1）最大化与最小化。

若目标函数是求最小化的线性函数，即 $\min Z = \boldsymbol{CX}$。这时只需令 $Z' = -Z$，则有 $\max Z' = \max(-Z) = -\min Z = -\boldsymbol{CX}$，即原来目标函数转化成 $\max Z' = -\boldsymbol{CX}$，这就是标准型的目标函数了。

（2）约束方程的不等式与等式。

约束方程不等式转化为等式，只需要引进新的变量来表示不等式左右两端的差异。这

里有两种情况：

一种情况是当第 i 个资源约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$，则引入非负松弛变量 x_{n+i}，就可以转换成约束方程的等式形式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$，其中 $x_{n+i} \geqslant 0$。

另一种情况是当第 k 个资源约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geqslant b_k$，则引入非负剩余变量 x_{n+k}（也可称松弛变量），就可以转换成约束方程的等式形式 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - x_{n+k} = b_k$，其中 $x_{n+k} \geqslant 0$。

值得注意的是，在引入了松弛变量或剩余变量之后，它们与其他决策变量一样，都是线性规划问题的一部分，这些变量自始至终保持非负性，而在最优解中松弛变量和剩余变量的值对原线性规划的分析也是很有用的资料。

（3）非负变量和符号不受限制的变量。当 $x_j \leqslant 0$，可以作代换 $x_j' = -x_j$，则有 $x_j' \geqslant 0$。当 x_j 符号不受限制，可以作代换，其中 $x_j' \geqslant 0, x_j'' \geqslant 0$，代入原问题就可以把符号不受限制的变量用两个非负变量替换掉。

（4）目标函数中也要加上松弛变量和剩余变量。

例 3 将下述线性规划问题化为标准型。

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 符号不受限制} \end{cases}$$

解 （1）令 $x_3 = x_4 - x_5$，其中 $x_4, x_5 \geqslant 0$；

（2）在第一个约束不等式的左端加入松弛变量 x_6；

（3）在第二个约束不等式的左端减去剩余变量 x_7；

（4）令 $Z' = -Z$，把求目标函数化为求 max 型，即可得到该问题的标准型：

$$\max Z' = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

习题 2—1

1. 假设一个成年人每天需要从食物中获取 3000 卡热量、55 克蛋白质、800 毫克的钙。某日市场上销售如下四种食品，每千克食物所含热量和营养成分见表 2—3 所示。