

普通高等教育“十三五”规划教材
阿尔泰数学教程系列



小波理论及其在 图像处理中的应用

The Wavelet Theory with Application in the Field of
Image Processing

郑勋烨 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

阿尔泰数学教程系列

小波理论及其在图像处理中的应用

The Wavelet Theory with Application in the Field of
Image Processing

郑勋烨 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书内容共分九章,包括:经典小波理论的源流与发展、数字音像信号小波去噪方法、小波在纹理图像处理中的应用、脊波和曲波变换方法、嘉伯(GABOR)小波图像目标识别方法、轮波变换与影像融合、基于曲波的活动轮廓图像分割、复小波图像去噪方法、总结与展望。

本书的读者对象主要是从事小波分析、地理信息工程、信号处理、模式识别、图像处理、通信理论、突变理论、控制论、石油地质、机械工程、遥感探测、交通控制、雷达追踪、航空航天、数学、物理、计算机等领域工作的研究人员、大学师生、工程师、技术员等。对小波的爱好的来说,本书也是理论与应用价值兼备的、有深度、有广度、有温度的一本很好的入门小册子。

图书在版编目(CIP)数据

小波理论及其在图像处理中的应用 / 郑勋烨编著. —西安:西安交通大学出版社, 2018. 4

ISBN 978-7-5693-0573-9

I. ①小… II. ①郑… III. ①小波理论 IV. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 084572 号

书 名	小波理论及其在图像处理中的应用
编 著	郑勋烨
责任编辑	李佳

出版发行	西安交通大学出版社
	(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址	http://www.xjtpress.com
电 话	(029)82668357 82667874(发行中心)
	(029)82668315(总编办)

传 真	(029)82668280
印 刷	陕西日报社

开 本	787mm × 1092mm 1/16	印张 9.5	字数 218 千字
版次印次	2018 年 8 月第 1 版	2018 年 8 月第 1 次印刷	
书 号	ISBN 978-7-5693-0573-9		
定 价	25.00 元		

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82668284

读者信箱:medpress@126.com

版权所有 侵权必究

Foreword 前言

本书致力于研究小波理论在图像尤其是遥感图像处理领域的应用。书中首先总结了小波理论的源流与发展,介绍了连续小波变换、离散小波变换、多分辨分析和几类经典小波。对小波理论在信号和图像处理领域的应用指出了其优缺点。进而,针对经典小波的缺陷改良,介绍了新型小波系统的发展沿革和现状,主要包括脊波变换(Ridgelet)、曲波变换(Curvelet)、轮波变换(Contourlet)等,阐述了新型小波系统的主要思想和算法。

本书研究了数字音频和图像信号的小波去噪理论,对一维音乐信号和二维标准图像重点讨论了小波阈值去噪算法,并进行了去噪仿真实验,根据峰值信噪比(PSNR)等判别参数,将实验结果进行了对比。

一个明确而新颖的观点是从纹理图像的角度理解地图,对遥感图像做卡通和纹理分解。本书给出了离散小波框架变换的定义和用它来进行纹理刻画的方法,由此,结合 Gabor 小波和支持向量机(SVM)提出了图像分割算法,并对标准纹理图像库图像和北京地区遥感地图进行了纹理图像分割实验。

本书建立了数字脊波和数字曲波变换的图像分解算法,比较了基于全局和局部对偶框架的 GDF 算法和 LDF 算法。给出了二维 Gabor 滤波器基函数的一般形式和图形,讨论了滤波器选取原则、设计方法和特征提取步骤,并用基于纹理分析的 Gabor 方法对遥感图像目标区域进行特征提取和边缘刻画。

轮波变换具有良好的多分辨率、局部化及方向性特征,本书重点讨论了方向滤波器组的设计。针对影像融合,探讨了基于多孔(à trous)小波与广义 IHS 变换结合的融合方法。此外,本书把测地线活动轮廓(GAC)用曲波演化方法进行多尺度改进,获得曲波测地线蛇形活动轮廓(CGS)。探讨了边界探测函数的构造。

最后,本书研究了复小波基本概念和小波域图像去噪基本理论,重点是希

尔伯特变换对和二元树复小波变换的设计、双变量收缩函数和复小波域内基于系数尺度相关性的图像去噪算法。文章结尾提出“全息地图”的概念构想。

关键词:经典小波,多分辨分析,遥感,纹理,去噪,融合,脊波,曲波,轮波,复小波,全息地图

Abstract

This thesis aims to study the application of waveletfamily in image processing, especially in remote sensing image. The main innovative contributions of this dissertation are as follows:

Firstly, the author gives a thorough introduction on the history of classical wavelet analysis, including the source from Fourier analysis, and the background of signal processing. Also on the main idea of the wavelet transform, MRA, especially the Daubechies wavelets.

The success of wavelets is mainly due to the good performance for piecewise smooth functions in one dimension. Unfortunately, such is not the case in two dimensions. The ridgelet system is very well at representing the smooth functions with line singularities. The curvelet has the best ability at representing the smooth functions with curvilinear singularities. Abilities of ridgelet and curvelet make them superior to the classical wavelets for image processing.

Texture is an important attribute in the image, which provides substantial information for the recognition and interpretation of this image. Contourlet transform has good multi - resolution, localized and directional characteristics. The method based on Contourlet + IHS transform is proposed to fuse SAR image and multi - spectral images. A global dual frame (GDF) and the local dual frame (LDF) representation for the digital ridgelet reconstruction algorithm is discussed.

Combing the basic theory of multi - scale Gabor and BP neural net, Gabor filter recognition algorithm is designed, which can solve bottle - neck problem namely Gabor feature vector dimension is relatively high, as well as large computational complexity. A construction method of edge detection function and a curvelet - based Ge-

odesic snake(CGS) is proposed, and applied to complex image segmentation of multiple objects. An approach for designing biorthogonal DT – CWT filters is proposed; where the two related complex wavelet pairs form approximate Hilbert transform pairs.

Key words classical wavelet, MRA, remote sensing, texture, denoising, fusion, ridgelet, curvelet, contourlet, complex wavelet, AIG

目录

第1章 绪论

1.1 引言:小波理论与图像处理	1
1.2 经典小波理论的源流与发展	2
1.2.1 傅里叶分析和早期探索	2
1.2.2 连续小波变换	4
1.2.3 多尺度分析	5
1.2.4 经典小波体系	6
1.2.4.1 哈尔 Haar 小波族	6
1.2.4.2 道波茜 Daubechies 小波族	6
1.2.4.3 symlets(symN)小波族	7
1.2.4.4 双正交(Biorthogonal)小波族	8
1.2.4.5 Coiflet 小波族	8
1.2.4.6 莫莱 Morlet 小波	8
1.2.4.7 墨西哥草帽(Mexican Hat)小波	9
1.2.4.8 迈耶 Meyer 小波	9
1.2.5 小波包、多小波和提升方法	10
1.3 新型小波族及其图像处理应用综述	11
1.3.1 经典小波分析的优缺点	11
1.3.2 新型小波系统的改良	13
1.3.2.1 降低平移敏感性	13
1.3.2.2 增强方向选择性	13
1.3.2.3 提供相位信息	14

1.3.3 非自适应新型小波系统	15
1.4 本书的研究内容与组织结构	16
1.5 主要创新点和贡献	17

第2章 数字音像信号小波去噪方法

2.1 小波在一维语音信号去噪中的应用	19
2.1.1 小波滤波去噪方法的工程背景	19
2.1.2 一维语音信号小波滤波基本方法	19
2.1.3 小波变换模极大值的奇异点传播特性	21
2.1.4 高斯白噪声的小波变换模极大值的尺度传播特性	22
2.1.5 一维音频信号去噪算法	22
2.2 非线性小波阈值音乐去噪	23
2.2.1 选择小波基和小波分解层数	23
2.2.2 选择阈值函数	24
2.2.3 选择阈值	24
2.2.4 小波去噪性能的评价标准	25
2.2.5 音乐信号去噪的仿真实验及结果分析	26
2.2.5.1 全局阈值去噪法的结果分析	26
2.2.5.2 分层阈值去噪法的结果分析	28
2.2.5.3 不同分解层数对去噪结果的影响比较	30
2.3 小波二维图像去噪方法	32
2.3.1 二维小波变换及快速算法	32
2.3.2 二维小波去噪效果的评价指标	34
2.3.3 二维小波图像去噪算法	34
2.3.3.1 阈值的选择	34
2.3.3.2 阈值函数的选择	35
2.3.3.3 算法的实现步骤	37
2.3.4 二维小波图像去噪仿真实验	37
2.4 本章小结	41

第3章 小波在纹理图像处理中的应用

3.1 纹理与小波	42
3.1.1 纹理的定义	42

3.1.2 地图的纹理图像属性	43
3.2 纹理研究的基本问题和主要方法回溯	44
3.3 纹理图像分类与融合	46
3.3.1 纹理图像库简介	46
3.3.2 离散小波框架变换与纹理分类	48
3.3.2.1 离散小波框架变换	48
3.3.2.2 离散小波框架变换用于纹理分类	49
3.3.3 基于嘉伯小波和核方法的纹理图像分割算法	50
3.3.3.1 特征提取	50
3.3.3.2 分割算法	51
3.3.3.3 仿真实验	52
3.4 本章小结	53

第4章 脊波和曲波变换方法

4.1 脊波变换概念	54
4.1.1 连续脊波变换	54
4.1.2 有限脊波变换	55
4.1.3 有限 Radon 变换	56
4.1.4 正交脊波基	56
4.2 基于全局和局部对偶框架的数字脊波重构	56
4.2.1 快速 Slant Stack 变换	56
4.2.2 离散迈耶小波	57
4.2.3 数字脊波	58
4.2.4 基于全局对偶框架的图像压缩和去噪算法	58
4.2.5 基于局部对偶框架的图像压缩和去噪算法	59
4.3 图像去噪的数字曲波变换算法	60
4.3.1 连续曲波变换	60
4.3.2 数字曲波变换	61
4.3.3 数字曲波变换去噪仿真实验	62
4.4 基于曲波变换的遥感图像分解	63
4.4.1 图像卡通部分和纹理部分的分解	63
4.4.2 仿真实验	65
4.5 本章小结	66

第5章 嘉伯小波图像目标识别方法

5.1 嘉伯变换及其函数特性 67

5.2 提取嘉伯变换小波特征的方法 69

5.3 小波特征模板 70

5.3.1 能量函数的确定和最小化 70

5.3.2 参数优化 70

5.3.3 小波特征模板的算法 71

5.4 多通道嘉伯变换滤波器 71

5.4.1 多通道嘉伯滤波器展开 71

5.4.2 多通道嘉伯滤波器选择原则 72

5.4.3 多通道嘉伯滤波器设计 72

5.5 本章小结 73

第6章 轮波变换与影像融合

6.1 二维离散小波变换 74

6.2 轮波变换 76

6.2.1 轮波变换多尺度分析 76

6.2.2 框架金字塔 77

6.2.3 方向滤波器组 78

6.2.4 轮波变换的改进 80

6.3 多尺度轮波变换方法遥感影像融合 80

6.3.1 影像融合中常用的经典小波分解 80

6.3.2 多光谱与全色影像小波域融合规则 81

6.3.3 最小二乘估计与多光谱与全色影像小波变换融合方法 83

6.3.4 小波基的选择、分解层次及算法 85

6.4 常用 SAR 与小波多光谱影像融合方法比较分析 85

6.5 SAR 影像的多孔小波与轮波融合 87

6.5.1 SAR 影像的多孔小波融合 87

6.5.2 SAR 影像的轮波融合 87

6.6 本章小结 88

第7章 基于曲波的活动轮廓图像分割

7.1 图像分割与曲波变换 89

7.1.1	引言:蛇形活动轮廓理论	89
7.1.2	蛇形活动轮廓理论的发展	90
7.1.3	曲波和其他小波的比较	90
7.1.4	曲波解决的问题	91
7.2	基于曲波的测地线活动轮廓	91
7.2.1	水平集概念	91
7.2.2	基于曲波的测地线活动轮廓与边界探测函数构造	92
7.2.3	改进的曲波重构算法	94
7.2.4	曲波尺度集上的边界地图	95
7.2.5	SNAKE 在曲波尺度间的穿越	95
7.2.6	曲波测地线活动轮廓算法	96
7.2.7	曲波测地线活动轮廓处理含噪图像仿真实验	96
7.3	本章小结	97

第 8 章 复小波图像去噪方法

8.1	复小波理论基本概念	98
8.1.1	双正交完全重构滤波器	98
8.1.2	希尔伯特变换对	99
8.2	二元树复小波变换	100
8.2.1	二元树复小波变换	100
8.2.2	二元树复小波变换滤波器设计	101
8.2.3	二元树复小波平移不变性和方向性分析	102
8.2.4	二元树复小波变换的实现	104
8.3	图像的小波域统计模型	105
8.3.1	双变量收缩(BiShrink)模型	105
8.3.2	高斯尺度混合(Gaussian Scale Mixture, GSM)模型	106
8.3.3	隐马尔可夫树(HMT, Hidden Markov Tree)模型	106
8.4	二元树复小波构造	107
8.4.1	希尔伯特变换对设计	107
8.4.2	二元树复小波变换滤波器设计	110
8.5	复小波在图像去噪中的应用	111
8.5.1	复小波域内利用尺度间和尺度内相关性的图像去噪	111
8.5.2	基于二元树复小波变换的去噪算法	112

8.5.3 复小波去噪仿真实验	113
8.6 本章小结	114
第9章 总结与展望	
9.1 总结:小波图像处理的成果与问题	115
9.2 展望:全息地图概念构想	115
后记	117
参考文献	118
附录(小波名词索引)	134

第1章 绪 论

1.1 引言：小波理论与图像处理

我们身处在一个“读图时代”，当代人类获取的信息量约有七成以上来自图像。图像是自然界或人类社会客观对象的视觉表示，在我们感知的各类数据中最具直观性。图像信息处理研究已成为数学、测量学、地图制图学、光学、电子学、自动化、计算机科学等多领域的跨学科课题。而地理信息科学领域的工作者尤其关注遥感图像。

很多图像采集设备在获取或处理数字图像时会产生失真，这些失真包括：像素丢失、图像模糊、压缩失真、几何变形等。图像的分割、去噪、压缩、重建和恢复就是要尽量减少这些失真。利用恰当的数学方法和模型对数字图像进行处理和恢复意义重大。

图像处理的数学方法主要包括偏微分方程(PDE)、概率统计模型(Statistics)和小波分析(Wavelets Representation)。长期以来，以傅里叶分析为代表的线性滤波方法是数字图像处理的主流方法，它把图像视为索伯列夫(Sobolev)空间的元素，将快速傅里叶变换(FFT)广泛应用于图像处理。

20世纪八十年代始，图像处理方法逐渐融入非线性科学，小波分析的诞生和发展是这一世纪大趋势的典型体现。小波分析的数学渊源包括：迈耶(Yves Meyer)和考伊夫曼(Coifman)分解伪微分算子，斯特罗姆伯格(Stromberg)构造巴拿赫(Banach)空间无条件里茨(Riesz)基；崔锦泰(C. K. Chui)和王(Wang)拓展样条理论，格罗斯曼(Alex Grossmann)、莫莱(Jean Morlet)和巴拓(Battle)研究数学物理方程。上述诸位的工作，都推动了小波的诞生。

1982年，格罗斯曼和莫莱首创连续小波变换的概念。图像的局部响应可用小波近似表示。相比古典傅里叶分析，小波变换作为优异的时频分析方法独树一帜。但它是连续时间系统，无法直接数字实现。1988年，马拉(Stephane Mallat)结合信号处理、调和分析和计算机视觉等理论，提出了多分辨分析(MRA)。

马拉和迈耶共同设计了离散小波变换(DWT)快速算法。离散小波变换是连续小波

变换的严格采样,是对音频和图像进行小波分析的真正实用方法。1988年,道波茜(Ingrid Daubechies)设计了著名的道波茜小波族 dbN,具有时频局部化和多尺度特征,能对信号和图像进行正交多分辨分析,在纹理识别、边缘检测、图像分割和去噪等方面得到了广泛应用。DWT 已成为静态图像压缩标准 JPEG2000、音频压缩以及 MPEG 视频压缩和美国联邦调查局(FBI)指纹识别的核心技术。

在数学分析、计算机视觉、模式识别等不同领域中,一种共通的多尺度分析理论各自独立地发展起来,其主要目的是为了检测和处理某些高维空间数据,这些数据的某些特征集中表现在它的低维子集(如曲线、曲面等)。比如,二维图像的主要轮廓特征可由边缘刻画,三维图像中的某些特征又表现为丝状体和管状体。当前主要的新型小波多尺度分析方法包括脊波变换(Ridgelet)、曲波变换(Curvelet)、带波变换(Bandelet)、轮波变换(Contourlet)等。

经典小波处理包含点奇异的一维信号时,可达最优非线性逼近阶,而处理二维或高维线奇异信号却不能达到最优逼近阶。新型小波多尺度分析致力于解决这一问题,发展一些新的高维函数表示方法,由此引入了蛇形活动轮廓(active contour, snake)、水平集(level Set)等新概念。

从数学角度看,小波分析提供了一套渐近子空间,采用具有不同分辨率的函数序列逼近原函数,且保证不同逼近间的误差正交性。而从信号处理角度理解,它提供了一种时频局部化,时频窗会随着频率的变化而自适应变化。相比之下,古典傅里叶分析是纯频域分析,加窗傅里叶分析或嘉伯分析的时-频窗则是固定的。由于小波可以聚焦到信号的任意细节,因此荣膺“数学显微镜”的美称。

小波分析理论的创建几乎与我国“改革开放”同步,迄今逾三十年,其优美的理论和强大的功能令人瞩目。现在,小波分析已广泛应用于信息与计算科学、数字信号图像处理、计算机视觉、天文学、地质学、地球物理、生命科学等多种学科,成为最强大的分析工具之一。

1.2 经典小波理论的源流与发展

1.2.1 傅里叶分析和早期探索

1998年,美国迪斯尼公司首映了一部长篇电脑动画电影《昆虫世界》,其中应用了一种全新的塑模技艺——有小波加盟的多尺度分析。对于摄影师们来说,多尺度分析早已是他们的拿手好戏。在电影大师希区柯克(Alfred Hitchcock)的悬念片《海外特派员》

(*Foreign Correspondent*)中,女主角琼斯坐在飞机里,镜头从云雾弥漫的天空延伸到舷窗内,我们的视线也从漫不经心地仰眺大气层逐渐专注于美丽女孩的凉帽。在他另一部作品《眩晕》(*Vertigo*)的片头里,占据画面的景象由一只瞳孔扩展为旋转的教堂扶梯。人类视觉捕捉对象的过程就是一个多尺度分析的过程,然而小波参与其中却是近来之事。但每个新生儿都有海猿时代的祖先,小波的历史由来已久。

1807年,法国数学家傅里叶(Jean Baptist Joseph Fourier)发现周期函数或波可表示为不同频率三角波(正弦或余弦波)的无穷傅里叶级数,对于非周期函数,则有傅里叶变换,自此以后,傅里叶变换与傅里叶级数成为经典数学必不可少的基石,并统治着线性时不变信号处理。19世纪,傅里叶分析臻于完善,但在复原具有突变或瞬态特征的信号时遇到了困难。因为它是纯频域的分析方法,反映平稳信号在全部时间下的总体频域特征,却不能定位局部时间段上的频率信息。比如敲击音叉可获得频率单一的持久的纯音,亦即信号是集中于小频带或频率局部化的。相反,一个脱口而出的词语作为不同频率音节的组合只持续极短的时间,因而是时间局部化的。不同领域的研究者发展了在不同分辨率下对信号进行时间局部化分解的技巧,这些思想汇合成为小波分析的渊源。

1909年,匈牙利数学家哈尔(Alfred Haar)发现了由正负脉冲构成的最简单的首例小波,它的小波母函数如下定义:

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1)$$

1946年,一位英匈混血的数学家嘉伯(Dennis Gabor)引入了高斯型加窗傅里叶变换,即嘉伯变换:

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-b)e^{-i\omega t} dt \quad (1-2)$$

它使信号 f 的傅里叶变换在时间窗中心 $t=b$ 附近局部化,将其信号分解为时频包。其中的

窗口函数可取高斯类函数 $g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$ 。以能量有限函数 ϖ 与其傅里叶变换作

为窗口函数的加窗傅里叶变换称为短时傅里叶变换(SFT),即

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varpi(t-b)} e^{-i\omega t} dt \quad (1-3)$$

20世纪70到80年代,数字信号与图像处理领域的学者引入了各自版本的小波分析。1976年,IBM的工程师 Claude Galand 和 Daniel Esteban 发明了用于数字电话的子图编码和能够精确消除混淆现象的正交镜像滤波器(QMF)。1981年,J.斯特罗姆伯格以分段线性函数改进了哈尔正交小波基。1982年,麻省理工学院(MIT)的 Edward Adelson 和

Peter Burt 为图像压缩发展了金字塔算法。1983 年, M. Smith, T. Barnwell 和 F. Mintzer 发现了具有优良重构的共轭正交滤波器(CQF)。所有这些独立进行的工作使用的方法有共同特征,即将信号分解为时频原子的平移伸缩系的线性组合,使人们能在任意时间段以不同分辨率对信号进行时频定位。小波理论自立门户的时机渐趋成熟。

1.2.2 连续小波变换

地震信号有许多瞬态突变点,用古典傅里叶分析难以处理。同时,在高频探测时,若脉冲波持续时间太长,便不可用于分辨密集地层结构。法国地震学者莫莱在解决这一问题时,找到了一种替代短时傅里叶变换(SFT)的方法,首次引入了他称之为“稳态小波”的变换函数。但当时他的发现不在数学教科书中,因而饱受质疑。他向量子物理学家格罗斯曼求助,格罗斯曼为他的积分变换构造了反演公式,一起探讨了其多方面应用。在两人 1984 年合作的论文中,首次正式创造了“小波”(wavelet)的提法,从此却在科技史上产生了类似蝴蝶效应的伟大变革。

他们对小波的原始定义是:一个小波是一个能量有限的函数 $\varphi(t) \in L^2(R)$, 其傅里叶变换对几乎所有 $a \in R$ 满足 $\int_0^\infty \frac{|\hat{\varphi}(a\omega)|}{\omega} d\omega = 1$, 其必要条件是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0$, 这一条件正是容许性条件(Admissible Condition)。如果定义小波的平移伸缩系

$$\varphi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1-4)$$

则相应于此容许小波的连续小波变换(CWT)可视为一种希尔伯特内积

$$(W_\varphi f)(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_{a,b}(t)} dt \quad (1-5)$$

其中 a 为尺度因子, b 为平移参数。它的实际意义是表示了函数与小波的平移伸缩系的相关度,因而上述 CWT 也称为相关型小波变换。连续小波变换具有下述主要性质:

性质 1 (线性性质) 设 $f(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$, 则

$$(W_\varphi f)(a,b) = \alpha (W_\varphi g)(a,b) + \beta (W_\varphi h)(a,b) \quad (1-6)$$

性质 2 (平移不变性) 若 $f(t) \leftrightarrow (W_\varphi f)(a,b)$, 则

$$f(t-\tau) \leftrightarrow (W_\varphi f)(a,b-\tau) \quad (1-7)$$

平移不变性是一个很好的性质,在实际运用中,尽管离散小波变换要用的广泛一些,但在需要有平移不变性的情况下,离散小波变换是不能直接使用的。

性质 3 (伸缩共变性) 若 $f(t) \leftrightarrow (W_\varphi f)(a,b)$, 则

$$f(ct) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} (W_\varphi f)(ca,cb), c > 0 \quad (1-8)$$